Examen de Matemáticas 1º de Bachillerato

Problema 1 Calcular la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(-2,0)$, $B(0,4)$ y $C(3,1)$. Obtener su centro, su radio.

Solución:

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0$$

$$\left\{\begin{array}{c} -2m+p=-4 \\ 4n+p=-16 \\ 3m+n+p=-10 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} m=-2/3 \\ n=-8/3 \\ p=-16/3 \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}y-\frac{16}{3}=0 \Longrightarrow 3x^2+3y^2-2x-8y-16=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} m=-2a=-\frac{2}{3} \Longrightarrow a=\frac{1}{3} \\ n=-2b=-\frac{8}{3} \Longrightarrow b=\frac{4}{3} \\ p=-16/3=a^2+b^2-r^2 \Longrightarrow r=\frac{\sqrt{65}}{3} \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$\text{Centro}=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3}\right), \quad r=\frac{\sqrt{65}}{3}$$

Problema 2 Sea $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ la ecuación de una elipse horizontal. Encontrar todos los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$a^2=25 \Longrightarrow a=5, \quad b^2=9 \Longrightarrow b=3$$

$$a^2=b^2+c^2 \Longrightarrow c=4 \quad e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

Eje Mayor$=2a=10$
Eje Menor$=2b=6$
Distancia Focal$=2c=8$
Excentricidad$=e=\dfrac{4}{5}$
Vértices: $A(5,0)$, $A'(-5,0)$, $B(0,3)$, $B(0,-3)$
Focos: $F(4,0)$, $F'(4,0)$
Ecuación general: $9x^2+25y^2=225$

Problema 3 De una elipse horizontal conocemos su eje menor que mide 8 cm y tiene una excentricidad $e=\dfrac{1}{5}$. Calcular los datos que la definen y su ecuación general.

Solución:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{5}\Longrightarrow a=5c$$

$$a^2=b^2+c^2\Longrightarrow 25c^2=16+c^2\Longrightarrow c=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$a=5c=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$

Eje Mayor$=2a=\frac{10\sqrt{6}}{3}$
Eje Menor$=2b=8$
Distancia Focal$=2c=\frac{2\sqrt{6}}{3}$
Excentricidad$=e=\dfrac{1}{5}$
Vértices: $A\left(\dfrac{5\sqrt{6}}{3},0\right)$, $A'\left(-\dfrac{5\sqrt{6}}{3},0\right)$, $B(0,4)$, $B'(0,-4)$
Focos: $F\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$, $F'\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$
Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{50/3}+\frac{y^2}{16}=1\Longrightarrow\frac{3x^2}{50}+\frac{y^2}{16}=1$$

Ecuación general: $24x^2+25y^2=400$

Problema 4 Encontrar los puntos de la recta

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}$$

que se encuentran a una distancia 5 del punto $P(-1,2)$.
Solución:
Construimos la circunferencia de centro P y radio 5:

$$(x+1)^2+(y-2)^2=25$$

Cortamos r con esta circunferencia; para ello ponemos r en parámetricas: $r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\y=1+\lambda\end{cases}$ y sustituimos en la circunferencia:

$$(2+2\lambda)^2+(-1+\lambda)^2=25\Longrightarrow 5\lambda^2+6\lambda-20=0\Longrightarrow\lambda_1=1,49,\ \ \lambda_2=-2,69$$

$$\begin{cases}\lambda_1=1,49\Longrightarrow P_1(3,98;2,49)\\\lambda_2=-2,69\Longrightarrow P_2(-4,38;-1,69)\end{cases}$$

Problema 5 En Santorini, isla griega del mar Mediterraneo, se encuentran, pasando unas vacaciones, unos amigos que habían estudiado el bachillerato en el colegio Villaeuropa de Móstoles, se habían citado antigüos compañeros de clase, para recordar viejos tiempos. La erupción de su volcán amenaza con amargarlos la cita. Desde su observatorio comprueba que se ha formado un rio de lava que avanza lenta pero imparable hacia el mar. Comprueban que la distancia de la urbanización hasta el río de lava es igual a la que separa la lava de la formación rectilínea de acantilados de la costa. Y ésto se cumple siempre de forma uniforme. Automáticamente sacaron un plano para situar la urbanización en el punto $F(-1, 2)$ y la línea de costa seguiría la ecuación de la recta $x - 2y = 0$.
Uno de los alumnos que conoce bastante la zona les comenta que este fenómeno puede ser muy peligroso si estamos a menos de 200 metros de la corriente de lava. (escala $1 : 100$)

Se pide:

a) Identifica de que curva se trata.

b) Calcular la ecuación de esta curva.

c) Calcular las tangentes a la curva en los puntos en los que corta la recta $x = 1$

d) ¿Estarían en peligro?

Solución:

a) Se trata de una parábola por definición.

b) Sea $P(x, y)$ un punto de esa parábola, se tiene que cumplir:

$$|\overrightarrow{AP}| = d(P, r)$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} \Longrightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{(x-2y)^2}{5}$$

$$\Longrightarrow 4x^2 + y^2 + 4xy + 10x - 20y + 25 = 0$$

c) En $x = 1 \Longrightarrow y^2 - 16y + 39 = 0 \Longrightarrow y_1 = 3 \quad y_2 = 13$:

$$P_1(1, 3) \quad P_2(1, 13)$$

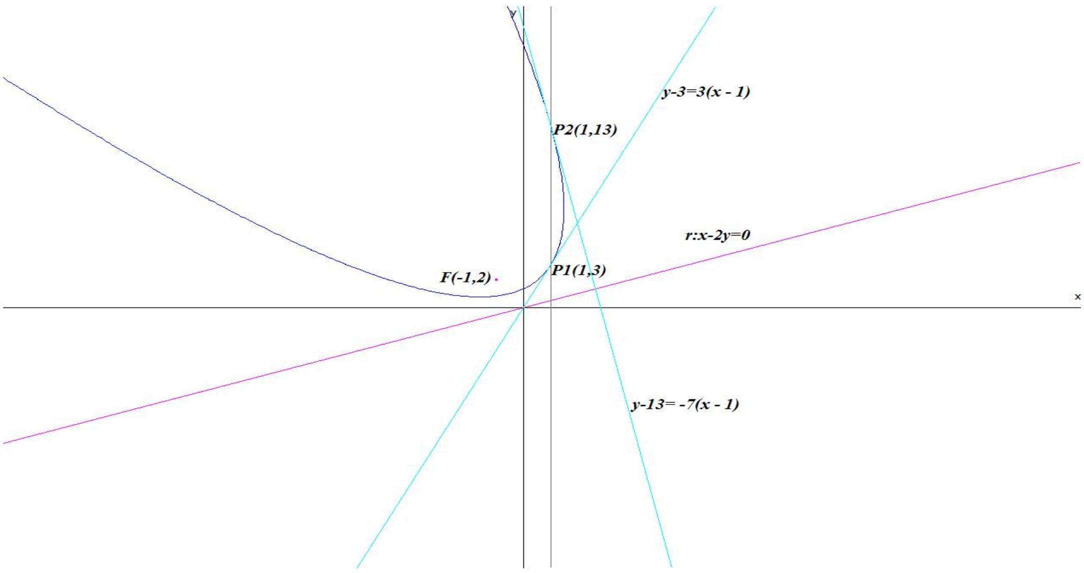
$$8xdx + 2ydy + 4ydx + 4xdy + 10dx - 20dy = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8x + 4y + 10}{4x + 2y - 20} = -\frac{4x + 2y + 5}{2x + y - 10}$$

En $P_1(1, 3) \Longrightarrow m = 3 \Longrightarrow y - 3 = 3(x - 1)$

$P_2(1, 13) \Longrightarrow m = -7 \Longrightarrow y - 13 = -7(x - 1)$

d) Claramente estarían en peligro.


y
y-3=3(x - 1)
P2(1,13)
r:x-2y=0
F(-1,2)
P1(1,3)
x
y-13= -7(x - 1)