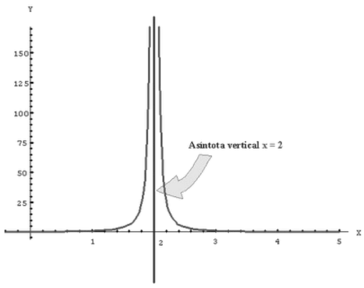
Asíntotas

Una asíntota es una recta imaginaria formada por valores que una función nunca toma, pero a los cuales se aproxima en el infinito. Las asíntotas pueden ser verticales, horizontales u oblicuas.



Asíntotas verticales

En principio, sólo tienen asíntotas verticales las funciones con un denominador polinómico. Hallar las asíntotas verticales de una función es lo mismo que calcular qué puntos están fuera de su dominio. Así pues, la función:

$$f(x) = (x-4)/(x+5)$$

Tiene una asíntota vertical en x = -5.

Aparte de localizar las asíntotas, hay que calcular los límites laterales, para ver si la función se acerca a cada uno de los lados de la asíntota dirigiéndose hacia arriba (hacia +∞) o hacia abajo (hacia -∞).

$\lim_{x \to -5^-} f(x) = \lim_{x \to -5^-} (x-4)/(x + 5)$ $\qquad$ $\lim_{x \to -5^+} f(x) = \lim_{x \to -5^+} (x-4)/(x + 5)$

Para calcular estos límites damos un valor a la *x* que esté muy próximo a la asíntota *por el lado que nos estemos acercando.* Por ejemplo, cuando calculamos el límite para -5 por la izquierda, podemos probar con el -5'00001; y para -5 por la derecha, con el -4,9999.

En realidad, para calcular el límite no necesitamos saber el valor exacto. Por eso da un poco igual el número que escojamos. Lo que nos importa saber es *el signo* que nos sale. Si es negativo, el límite valdrá -∞, y si es positivo, +∞.

$\lim_{x \to -5^-} (x-4)/(x + 5) = - / - = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to -5^+} (x-4)/(x + 5) = - / + = -\infty$

Asíntotas horizontales

Sólo tienen asíntotas horizontales las funciones con un numerador polinómico y un denominador polinómico que sea de grado mayor o igual al del numerador. Hallar las asíntotas horizontales consiste en calcular el límite de la función cuando esta tiende a +∞. La función

$$f(x) = (x+1)/(x-1)$$

tiene una asíntota horizontal, pues el grado del numerador y del denominador son iguales.

$\lim_{x \to +\infty} (x+1)/(x-1) = 1$ (si no sabes de dónde sale el 1, revisa cómo se resuelven los límites de ∞/∞)

Así pues, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 1$ (además de una vertical en $x=1$)

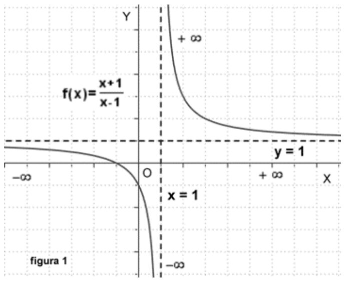


figura 1

Asíntotas oblicuas

Una función tiene asíntotas oblicuas si tiene un numerador cuyo grado es una unidad mayor que el grado del denominador. La función

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)/(x-1)$$

tiene una asíntota oblicua (y una vertical, si te fijas, pero no la vamos a calcular ahora).

Si una función tiene asíntotas oblicuas, no tiene horizontales, y viceversa. (En realidad, una asíntota oblicua no es más que una horizontal que está inclinada; o una horizontal no es más que una oblicua que está tumbada. Si se ven por separado es porque se calculan de forma distinta.)

Como una asíntota oblicua es una recta, tendrá siempre la forma ***y = mx + n.*** Para hallarla tendremos que calcular tanto la *m* como la ***n.***

* Cálculo de la *m*

$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x)/x} = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 2)/x(x-1)$ (la *x* multiplica en el denominador; es lo mismo que dividir la función entre *x*)

Si resuelves ese límite verás que sale igual a 1

* Cálculo de la *n*

$\mathbf{n} = \boldsymbol{\lim_{x \to +\infty} f(x) - mx} = \lim_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 2)/(x-1) - 1x$

Si resuelves este límite verás que sale igual a -1

Por lo tanto, la asíntota oblicua será

y = x-1

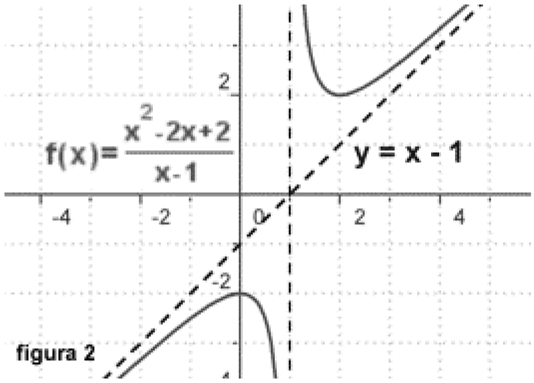


figura 2

(Y fíjate que además hay una asíntota vertical en x=1)