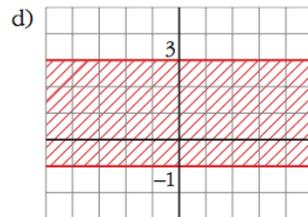
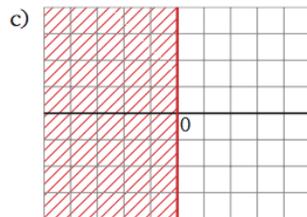
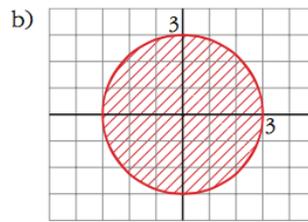
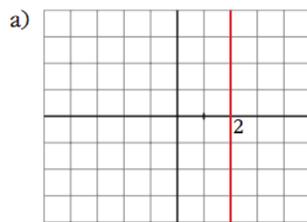


## CÓNICAS

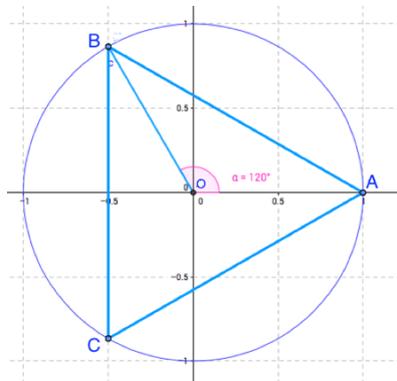
1. Demuestra que la recta  $r$  de ecuación  $3x+4y-25 = 0$  es tangente a la circunferencia  $C: x^2+y^2 = 25$ .
2. El afelio de la órbita elíptica que describe la Luna alrededor de la Tierra es de 400.491 km y el perihelio de 349.632 km. Con estos datos calcula la excentricidad de dicha órbita e interprétala. Si el perihelio se alcanza a una distancia que es 55 veces el radio de la Tierra calcula dicho radio.
3. Describe la siguiente cónica:  $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$ . Obtén sus elementos y dibújala.
4. La parábola  $y^2-4y-6x-5 = 0$  tiene por foco el punto  $(0,2)$ . Encuentra su directriz.

## COMPLEJOS

5. Determina  $k$  para que el cociente  $\frac{k-2i}{k+i}$  sea a) real, b) imaginario puro.
6. Escribe la condición que cumplen los números complejos cuyos afijos se encuentran en las regiones representadas en los siguientes casos:



7. Con la información de la figura, calcula las coordenadas de todos los vértices del triángulo equilátero con centro el origen que aparecen en ella (*considera los valores correspondientes al complejo cuyo afijo es el punto A*).



8. Obtén las cuatro soluciones de la ecuación  $z^4+16 = 0$  e indica que representan los afijos de sus soluciones.

## CÓNICAS

1. Demuestra que la recta  $r$  de ecuación  $3x+4y-25 = 0$  es tangente a la circunferencia  $C: x^2+y^2 = 25$ .

*Solución:*

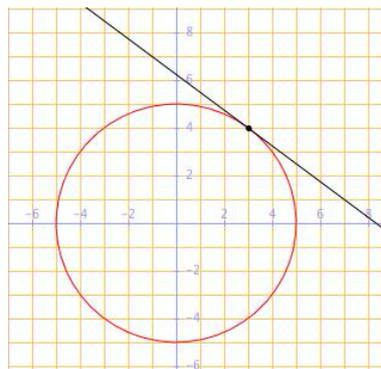
Para comprobar que  $r$  es tangente a la circunferencia en el punto  $A$  se comprueba que el punto de corte de ambas es único.

$$3x+4y-25 = 0 \Rightarrow y = \frac{25-3x}{4}$$

sustituyendo:

$$x^2 + \left(\frac{25-3x}{4}\right)^2 = 25 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$$

que es única, por lo tanto  $r$  es tangente a  $C$  en el punto  $A = (3, 4)$ .



2. El afelio de la órbita elíptica que describe la Luna alrededor de la Tierra es de 400.491 km y el perihelio de 349.632 km. Con estos datos calcula la excentricidad de dicha órbita e interprétala. Si el perihelio se alcanza a una distancia que es 55 veces el radio de la Tierra calcula dicho radio.

*Solución:*

Al ocupar la Tierra uno de los focos las distancias mínima y máxima de la Luna a la Tierra son  $a-c$  y  $a+c$  respectivamente. Con los datos del problema obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a + c = 400.491 \\ a - c = 349.632 \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos la distancia focal:

$$2c = 50.859$$

por lo tanto la semidistancia focal es  $c = 25.430$  km

Sumando ambas ecuaciones obtenemos el eje mayor:

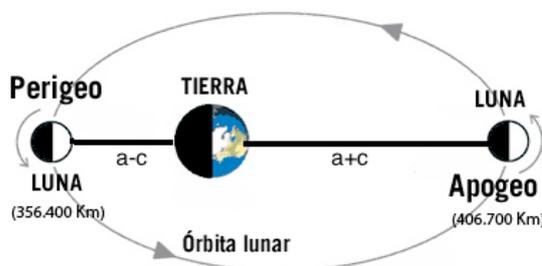
$$2a = 750.114$$

por lo tanto el semieje mayor es  $a = 375.057$  km

La excentricidad se obtiene mediante la relación  $e = \frac{c}{a} = \frac{25.430}{375.057} = 0,068$  luego es casi una circunferencia.

Para hallar el radio de la Tierra dividimos el perihelio por 55 obteniendo:

$$R = \frac{a-c}{55} = \frac{349.632}{55} = 6357 \text{ km.}$$



3. Describe la siguiente cónica:  $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{16} = 1$ . Obtén sus elementos y dibújala.

*Solución:*

Es una hipérbola horizontal centrada en  $P(3, -2)$ , observando la ecuación obtenemos que:

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Los focos son  $F(3, -2+2\sqrt{5})$  y  $F'(3, -2-2\sqrt{5})$

Los vértices son:  $V(3, -2+2) = V(3,0)$  y  $V'(3, -2-2) = V'(3, -4)$

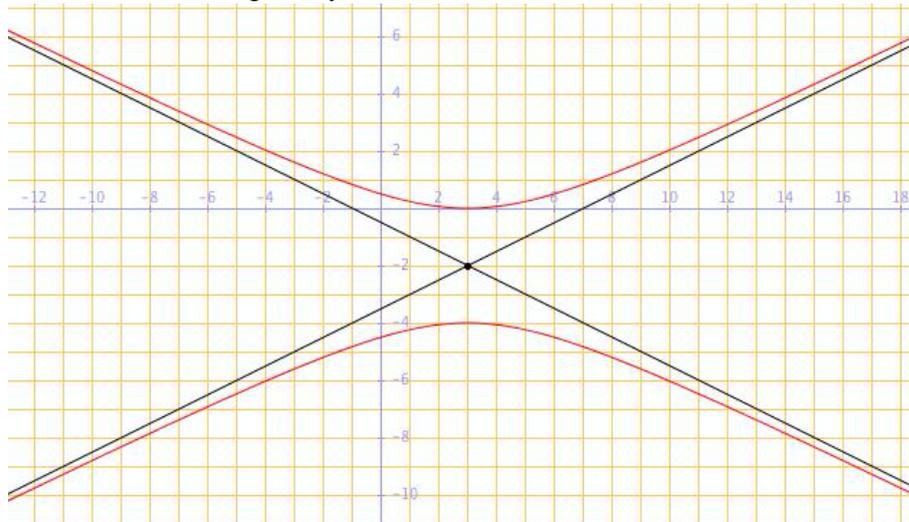
$$\text{La excentricidad es: } e = \frac{c}{b} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \approx 2,24$$

Las asíntotas son:

$$y - P_2 = \frac{b}{a}(x - P_1) \Rightarrow y + 2 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = 0,5x - 3,5$$

$$y - P_2 = -\frac{b}{a}(x - P_1) \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow y = -0,5x - 0,5$$

La gráfica de cónica es la de la figura adjunta:



4. La parábola  $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$  tiene por foco el punto  $(0, 2)$ . Encuentra su directriz.

*Solución:*

$$y^2 - 4y - 6x - 5 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 6x + 9$$

Utilizando el cuadrado de la suma y sacando 6 factor común:

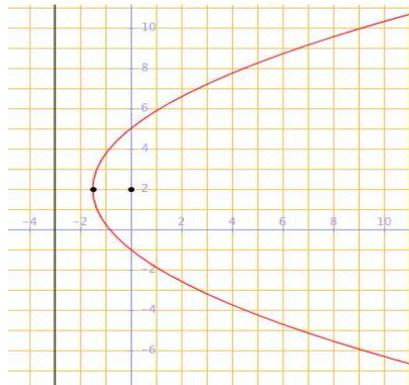
$$(y - 2)^2 = 6 \left( x + \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{Por lo tanto } 2p = 6 \Rightarrow p = 3.$$

El vértice de la parábola es  $\left( -\frac{3}{2}, 2 \right)$

Como el foco es  $F(0, 2)$  y  $\frac{p}{2}$  es la distancia entre el vértice y el foco entonces la directriz es

$$x = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2} = -3.$$



### COMPLEJOS

5. Determina  $k$  para que el cociente  $\frac{k - 2i}{k + i}$  sea a) real, b) imaginario puro.

*Solución:*

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{k - 2i}{k + i} = \frac{(k - 2i)(k - i)}{(k + i)(k - i)} = \frac{k^2 - ki - 2ki + 2i^2}{k^2 - i^2} = \frac{k^2 - 2 - 3k}{k^2 + 1} = \frac{k^2 - 2}{k^2 + 1} - \frac{3k}{k^2 + 1} i$$

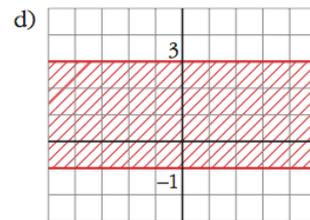
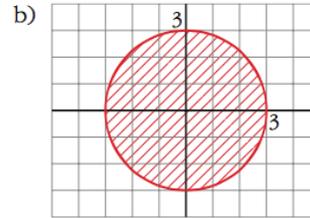
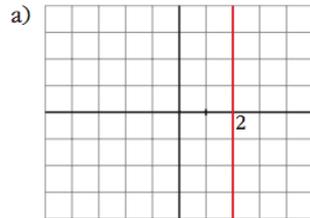
a) Para que el cociente sea un número real su parte imaginaria debe ser nula:

$$\frac{3k}{k^2 + 1} = 0 \Rightarrow k = 0$$

b) Para que sea imaginario puro ha de tener parte real nula:

$$\frac{k^2-2}{k^2+1} = 0 \Rightarrow k^2 = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{2}$$

6. Escribe la condición que cumplen los números complejos cuyos afijos se encuentran en las regiones representadas en los siguientes casos:



Solución:

a)  $\text{Re } z = 2$

b)  $|z| \leq 3$

c)  $\text{Re } z \leq 0$

d)  $-1 \leq \text{Im } z \leq 3$

7. Con la información de la figura, calcula las coordenadas de todos los vértices del triángulo equilátero con centro el origen que aparecen en ella (considera los valores correspondientes al complejo cuyo afijo es el punto A).

Solución:

Si el vértice A corresponde al afijo del complejo  $z_A = 1$ , para obtener los demás se realizan giros horarios de centro el origen y ángulo:

$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

es decir hallamos los número multiplicando  $z_A$  por  $1_{120}$

Pasamos  $z_A$  a forma polar hallando módulo y argumento:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\alpha = \text{arc tg} \left( \frac{0}{1} \right) = 0^\circ$$

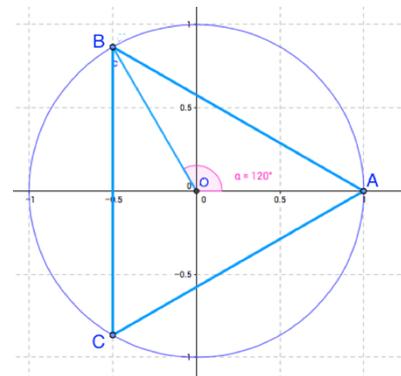
Por lo tanto:

$$z_B = z_A \cdot 1_{120} = 1_{120} = 1(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_C = z_A \cdot 1_{240} = 1_{240} = 1(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Luego las coordenadas de los tres vértices son:

$$A = (1,0), B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$



8. **Obtén las cuatro soluciones de la ecuación  $z^4+16 = 0$  e indica que representan los afijos de sus soluciones.**

*Solución:*

Despejando en la ecuación y resolviendo y pasando las soluciones a forma polar obtenemos:

$$z^4 = -16 \Rightarrow z^4 = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16_{180^\circ}} = 2_{(180^\circ+360^\circ k)/4} = 2_{45^\circ+90^\circ k} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

Las cuatro raíces son:

$$z_1 = 2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

$$z_2 = 2_{135^\circ} = \sqrt{2} - \sqrt{2} i$$

$$z_3 = 2_{225^\circ} = -\sqrt{2} - \sqrt{2} i$$

$$z_4 = 2_{315^\circ} = -\sqrt{2} + \sqrt{2} i$$

Los afijos de sus soluciones representan los vértices de un cuadrado centrado en el origen y de lado 2, al como se ve en la figura adjunta.

