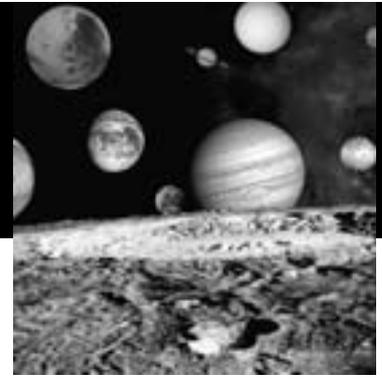


# 6

# Lugares geométricos y cónicas



## 1. Lugares geométricos

### ■ Piensa y calcula

Dados los puntos  $A(4, 1)$  y  $B(-2, 5)$ , halla mentalmente el punto medio y la pendiente del segmento  $AB$

**Solución:**

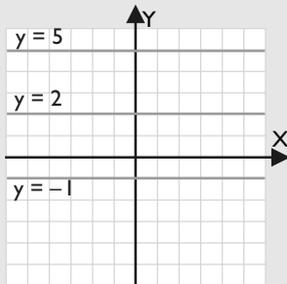
$$M(1, 3)$$

$$\vec{AB}(-6, 4) \Rightarrow m = -2/3$$

### ● Aplica la teoría

1. Dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que están a 3 unidades de la recta  $y = 2$ . Halla mentalmente su ecuación.

**Solución:**



Son las rectas:  $y = 5, y = -1$

2. Halla mentalmente la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(5, 2)$

**Solución:**

$$x = 3$$

3. Halla la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los puntos  $A(2, 1)$  y  $B(-4, 3)$

**Solución:**

$$M(-1, 2)$$

$$\vec{AB}(-6, 2) \parallel (3, -1) \Rightarrow m_{AB} = -1/3 \Rightarrow m = 3$$

$$y - 2 = 3(x + 1)$$

$$y = 3x + 5$$

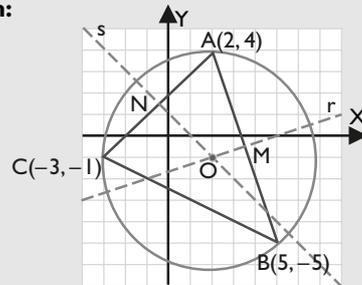
4. Halla mentalmente la ecuación de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

**Solución:**

$$y = x$$

5. Calcula el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos:  $A(2, 4)$ ,  $B(5, -5)$  y  $C(-3, -1)$

**Solución:**



Mediatriz  $r$  del lado  $AB$ :

$$M(7/2, -1/2)$$

$$m_{AB} = -3 \Rightarrow m = 1/3$$

$$y + 1/2 = 1/3(x - 7/2)$$

$$r \equiv x - 3y - 5 = 0$$

Mediatriz  $s$  del lado  $AC$ :

$$N(-1/2, 3/2)$$

$$m_{AC} = 1 \Rightarrow m = -1$$

$$y - 3/2 = -(x + 1/2)$$

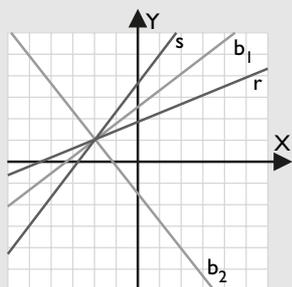
$$s \equiv x + y - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por  $r$  y  $s$ , se obtiene el circuncentro:  $O(2, -1)$

6. Aplicando la propiedad de que la bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los lados, halla las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:

$$r \equiv 5x - 12y + 22 = 0, \quad s \equiv 4x - 3y + 11 = 0$$

**Solución:**



$$d(P, r) = d(P, s)$$

$$\frac{|5x - 12y + 22|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{|4x - 3y + 11|}{\sqrt{16 + 9}}$$

$$b_1 \equiv 9x + 7y + 11 = 0$$

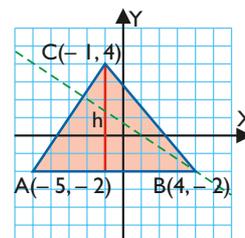
$$b_2 \equiv 7x - 9y + 23 = 0$$

## 2. Alturas y medianas de un triángulo

### ■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente:

- el área del triángulo del dibujo que tiene como vértices los puntos  $A(-5, -2)$ ,  $B(4, -2)$  y  $C(-1, 4)$
- la pendiente del lado AC
- la pendiente de una recta perpendicular al lado AC que pasa por el vértice B



**Solución:**

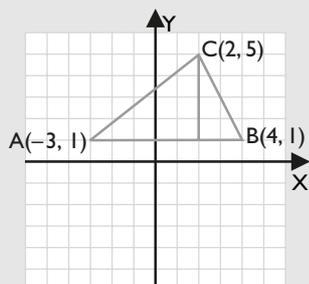
- $A = 27 \text{ u}^2$
- $m_{AC} = 3/2$
- $m = -2/3$

### ● Aplica la teoría

7. Dibuja la altura relativa al lado AB, y calcula mentalmente la longitud de dicha altura en el triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(-3, 1), B(4, 1) \text{ y } C(2, 5)$$

**Solución:**

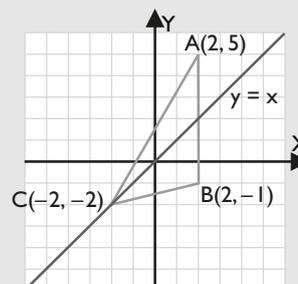


Altura = 4 unidades.

8. Dibuja y halla mentalmente la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado AB del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(2, 5), B(2, -1) \text{ y } C(-2, -2)$$

**Solución:**

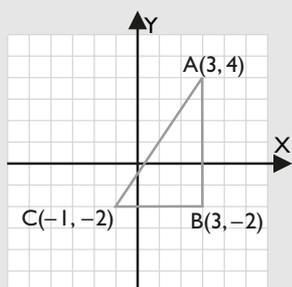


Mediana:  $y = x$

9. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos y calcula mentalmente su área:

$$A(3, 4), B(3, -2) \text{ y } C(-1, -2)$$

**Solución:**

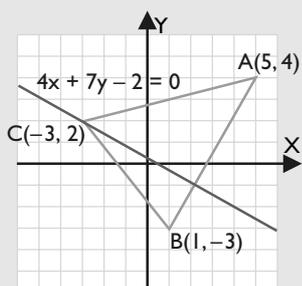


$$\text{Área} = 12 \text{ u}^2$$

10. Dibuja y halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al lado AB del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(5, 4), B(1, -3) \text{ y } C(-3, 2)$$

**Solución:**



Ecuación de la recta que contiene a la altura:

$$C(-3, 2)$$

$$m_{AB} = 7/4 \Rightarrow m = -4/7$$

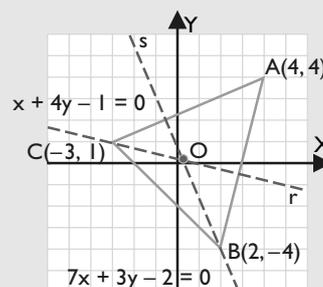
$$y - 2 = -4/7(x + 3)$$

$$4x + 7y - 2 = 0$$

11. Halla y dibuja el ortocentro del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(4, 4), B(2, -4) \text{ y } C(-3, 1)$$

**Solución:**



Recta que contiene a la altura relativa al lado AB:

$$C(-3, 1)$$

$$m_{AB} = 4 \Rightarrow m = -1/4$$

$$r \equiv x + 4y - 1 = 0$$

Recta que contiene a la altura relativa al lado AC:

$$B(2, -4)$$

$$m_{AC} = 3/7 \Rightarrow m = -7/3$$

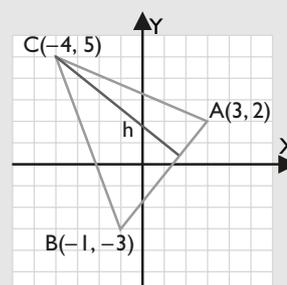
$$s \equiv 7x + 3y - 2 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por  $r$  y  $s$ , se obtiene el ortocentro:

$$O(1/5, 1/5)$$

12. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos y halla su área:  $A(3, 2)$ ,  $B(-1, -3)$  y  $C(-4, 5)$

**Solución:**



Longitud de la base:

$$d(A, B) = \sqrt{41}$$

Altura:

Ecuación de la recta que contiene al lado AB:

$$r \equiv 5x - 4y - 7 = 0$$

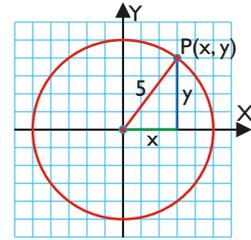
$$h = d(C, r) = \frac{47}{\sqrt{41}} \text{ unidades.}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{41} \cdot \frac{47}{\sqrt{41}} = 23,5 \text{ u}^2$$

### 3. Secciones cónicas y circunferencia

#### ■ Piensa y calcula

Aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo del dibujo, escribiendo los cuadrados de los catetos en el primer miembro. ¿Qué fórmula obtienes?



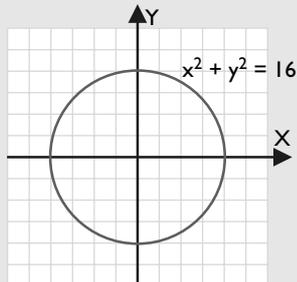
**Solución:**

$$x^2 + y^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

#### ● Aplica la teoría

13. Dibuja la circunferencia que tiene el centro en el origen de coordenadas y radio  $R = 4$ , y halla mentalmente su ecuación.

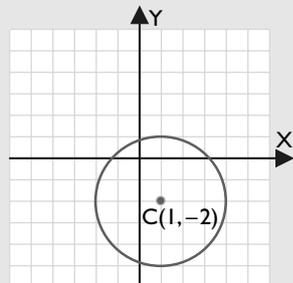
**Solución:**



$$x^2 + y^2 = 16$$

14. Dibuja y halla la ecuación general de la circunferencia que tiene el centro en el punto  $C(1, -2)$  y radio  $R = 3$

**Solución:**



$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 3^2$$

La ecuación general es:

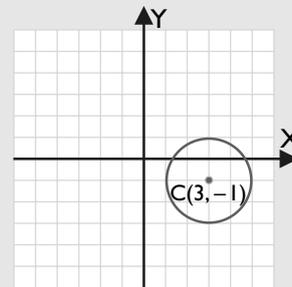
$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

15. Halla el centro y el radio de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ . Haz el dibujo.

**Solución:**

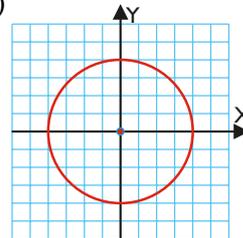
$$C(3, -1)$$

$$R = \sqrt{9 + 1 - 6} = 2$$

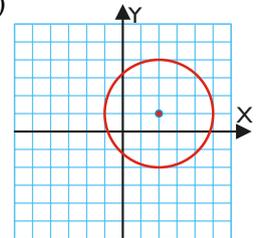


16. Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a)



b)



**Solución:**

a)  $x^2 + y^2 = 16$

b)  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

## 4. Posiciones relativas

### ■ Piensa y calcula

De las siguientes ecuaciones, ¿cuál corresponde a una recta y cuál a una circunferencia? Calcula mentalmente: en la recta, la pendiente y la ordenada en el origen, y en la circunferencia, el centro y el radio.

a)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$

b)  $y = 2x - 5$

**Solución:**

a) Circunferencia de  $C(2, -3)$  y  $R = 1$

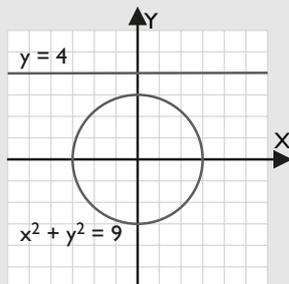
b) Recta de pendiente  $m = 2$  y ordenada en el origen  $b = -5$

### ● Aplica la teoría

17. Dibuja la siguiente recta y circunferencia e indica su posición relativa.

$$y = 4 \quad x^2 + y^2 = 9$$

**Solución:**



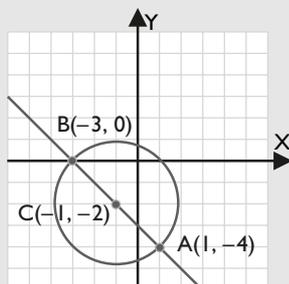
La recta es exterior a la circunferencia.

18. Halla los puntos de corte de la siguiente recta y circunferencia y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

$$x + y = -3 \quad x^2 + y^2 + 2x + 4y - 3 = 0$$

**Solución:**

Resolviendo el sistema se obtienen dos puntos de corte:  $A(1, -4)$ ,  $B(-3, 0)$



La recta es secante.

19. Dadas la recta y la circunferencia siguientes:

$$y = 2x + 5 \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

calcula la distancia del centro de la circunferencia a la recta y el radio de la circunferencia, y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

**Solución:**

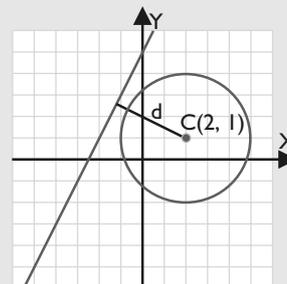
Centro de la circunferencia:  $C(2, 1)$

Radio:  $R = 3$

Distancia del centro a la recta:

$$d = d(C, r) = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} = 3,58$$

$d > R \Rightarrow$  La recta es exterior.



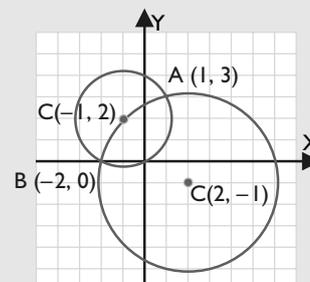
20. Estudia la posición relativa de las siguientes circunferencias. Haz el dibujo.

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 12 = 0$$

**Solución:**

Resolviendo el sistema se obtienen:

$A(1, 3)$ ,  $B(-2, 0)$



Las circunferencias son secantes.

## 5. La elipse

### ■ Piensa y calcula

En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide 5 m, y un cateto, 4 m. Halla mentalmente la medida del otro cateto.

**Solución:**

3 m

### ● Aplica la teoría

21. Se tiene una elipse en la que  $b = 4$  y  $c = 3$ . Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

**Solución:**

$$a = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

**Puntos**

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(5, 0), A'(-5, 0), B(0, 4)$  y  $B'(0, -4)$

Focos:  $F(3, 0), F'(-3, 0)$

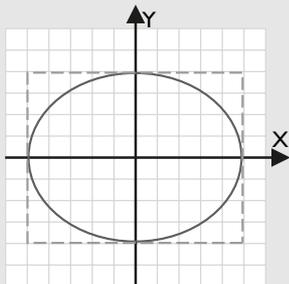
**Segmentos**

Eje principal: es  $AA'$ ,  $d(A, A') = 2a = 10$

Eje secundario: es  $BB'$ ,  $d(B, B') = 2b = 8$

Distancia focal: es  $FF'$ ,  $d(FF') = 2c = 6$

**Excentricidad:** es  $e = c/a = 3/5$



22. La ecuación reducida de una elipse es:  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

**Solución:**

$$a = 4, b = 3$$

$$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

**Puntos**

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(4, 0), A'(-4, 0), B(0, 3)$  y  $B'(0, -3)$

Focos:  $F(\sqrt{7}, 0), F'(-\sqrt{7}, 0)$

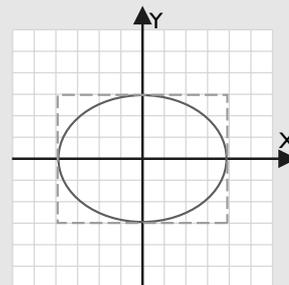
**Segmentos**

Eje principal: es  $AA'$ ,  $d(A, A') = 2a = 8$

Eje secundario: es  $BB'$ ,  $d(B, B') = 2b = 6$

Distancia focal: es  $FF'$ ,  $d(F, F') = 2c = 2\sqrt{7}$

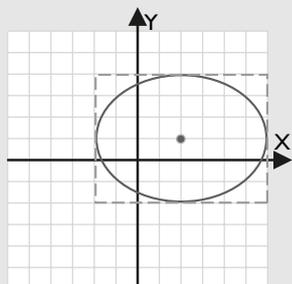
**Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{7}/4$



23. Halla la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto  $C(2, 1)$  y en la que  $a = 4$  y  $b = 3$ . Dibújala.

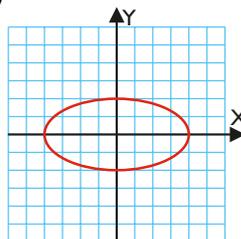
**Solución:**

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

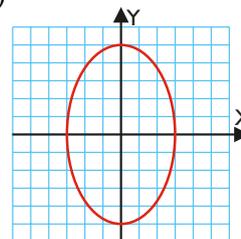


24. Halla la ecuación de las siguientes elipses:

a)



b)



**Solución:**

a)  $a = 4, b = 2$        $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $a = 3, b = 5$        $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

## 6. La hipérbola

### ■ Piensa y calcula

Halla mentalmente las pendientes de las siguientes rectas: a)  $y = 3x/4$  b)  $y = -3x/4$

**Solución:**

a)  $m = 3/4$

b)  $m = -3/4$

### ● Aplica la teoría

25. Se tiene una hipérbola en la que  $b = 4, c = 5$  y los focos están en el eje X. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

**Solución:**

$$a = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

**Puntos**

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(3, 0), A'(-3, 0), B(0, 4)$  y  $B'(0, -4)$

Focos:  $F(5, 0), F'(-5, 0)$

**Segmentos**

Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 6$

Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 8$

Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 10$

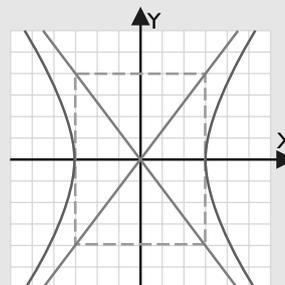
**Excentricidad:** es  $e = c/a = 5/3$

**Rectas**

Asíntotas:

$$y = 4x/3$$

$$y = -4x/3$$



26. Halla la ecuación de una hipérbola que tiene el centro en el punto  $C(1, -2)$  y en la que  $a = 4$  y  $b = 3$

**Solución:**

$$\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

27. La ecuación reducida de una hipérbola es:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

**Solución:**

$$a = 4, b = 3$$

$$c = \sqrt{16 + 9} = 5$$

**Puntos**

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(4, 0), A'(-4, 0), B(0, 3)$  y  $B'(0, -3)$

Focos:  $F(5, 0), F'(-5, 0)$

**Segmentos**

Eje principal: es  $AA'$ ,  $d(A, A') = 2a = 8$

Eje secundario: es  $BB'$ ,  $d(B, B') = 2b = 6$

Distancia focal: es  $FF'$ ,  $d(F, F') = 2c = 10$

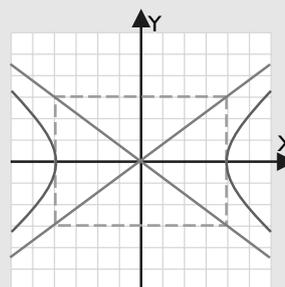
**Excentricidad:** es  $e = c/a = 5/4$

**Rectas**

Asíntotas:

$$y = 3x/4$$

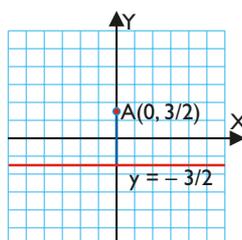
$$y = -3x/4$$



## 7. La parábola

### ■ Piensa y calcula

Halla mentalmente la distancia que hay entre el punto  $A(0, 3/2)$  y la recta  $y = -3/2$



**Solución:**

Distancia = 3 u

## ● Aplica la teoría

28. Se tiene una parábola en la que  $p = 3/2$  y el foco está en el eje Y. Halla la ecuación reducida, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

**Solución:**

$$y = \frac{x^2}{3}$$

**Puntos**

Vértice:  $V(0, 0)$

Foco:  $C(0, 3/4)$

**Segmentos**

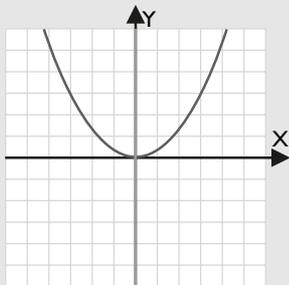
Distancia focal:  $d(F, d) = 3/2$

**Excentricidad:**  $e = 1$

**Rectas**

Directriz:  $y = -3/4$

Eje:  $x = 0$

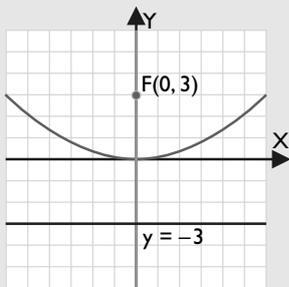


29. El foco de una parábola es el punto  $F(0, 3)$  y la directriz es la recta  $y = -3$ . Halla la ecuación de la parábola y dibújala.

**Solución:**

$$p = 6$$

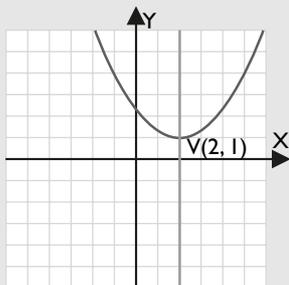
$$y = \frac{x^2}{12}$$



30. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto  $V(2, 1)$  y en la que  $p = 3/2$ . Dibújala.

**Solución:**

$$y = \frac{(x-2)^2}{3} + 1$$

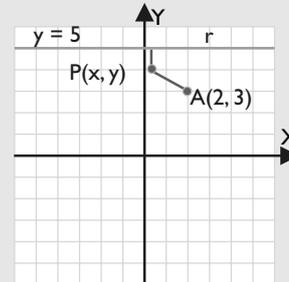


31. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen doble distancia al punto  $A(2,3)$  que a la recta  $y = 5$

**Solución:**

a) Sea el punto  $P(x, y)$

b)



c)  $d(A, P) = 2 d(P, r)$

d)  $d(A, P) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$

$$d(P, r) = y - 5$$

e)  $\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 2(y-5)$

f) Se opera, se simplifica y se obtiene:

$$x^2 - 3y^2 - 4x + 34y - 87 = 0$$

32. Se tiene una parábola de ecuación  $y = x^2/2$ . Halla el valor del parámetro  $p$ , el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

**Solución:**

$$2p = 2 \Rightarrow p = 1$$

**Puntos**

Vértice:  $V(0, 0)$

Foco:  $C(0, 1/2)$

**Segmentos**

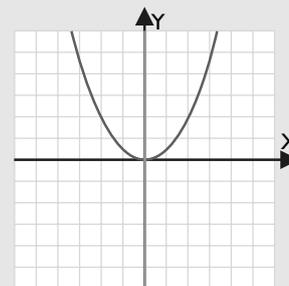
Distancia focal:  $d(F, d) = 1$

**Excentricidad:**  $e = 1$

**Rectas**

Directriz:  $y = -1/2$

Eje:  $x = 0$

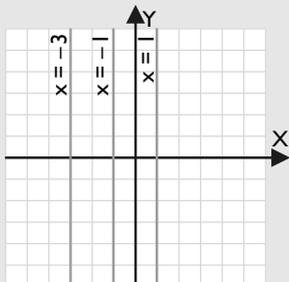


# Ejercicios y problemas

## 1. Lugares geométricos

33. Dibuja el lugar geométrico de los puntos del plano que están a 2 unidades de la recta  $x = -1$  y halla mentalmente su ecuación.

**Solución:**



$$x = -3, x = 1$$

34. Halla mentalmente la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(1, 4)$

**Solución:**

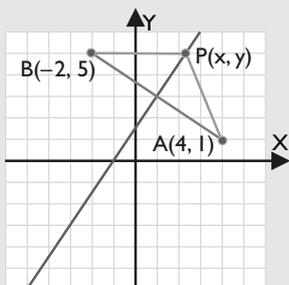
$$y = 3$$

35. Aplicando la propiedad de que la mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos, halla la mediatriz del segmento que tiene los extremos en los puntos  $A(4, 1)$  y  $B(-2, 5)$

**Solución:**

- a) Sea el punto  $P(x, y)$

b)



c)  $d(A, P) = d(B, P)$

d)  $d(A, P) = \sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2}$

$d(B, P) = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2}$

e)  $\sqrt{(x-4)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-5)^2}$

- f) Se eleva al cuadrado, se opera y se obtiene:  
 $3x - 2y + 3 = 0$

- g) Se obtiene la ecuación de una recta.

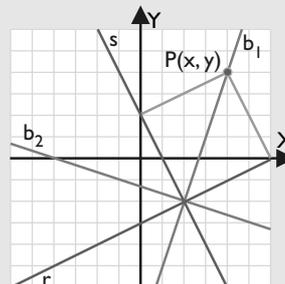
36. Halla las bisectrices de las rectas:

$$r \equiv x - 2y - 6 = 0, \quad s \equiv 2x + y - 2 = 0$$

**Solución:**

- a) Sea  $P(x, y)$

b)



c)  $d(P, r) = d(P, s)$

d)  $\frac{|x - 2y - 6|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{|2x + y - 2|}{\sqrt{4 + 1}}$

- e) Se simplifica y se obtiene:

$$b_1 \equiv 3x - y - 8 = 0$$

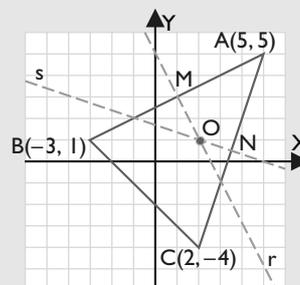
$$b_2 \equiv x + 3y + 4 = 0$$

- f) Se obtienen dos rectas que son las bisectrices.

37. Calcula el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos:

$$A(5, 5), B(-3, 1) \text{ y } C(2, -4)$$

**Solución:**



Mediatriz del lado AB:

$$M(1, 3)$$

$$m_{AB} = 1/2 \Rightarrow m = -2$$

$$y - 3 = -2(x - 1)$$

$$r \equiv 2x + y - 5 = 0$$

Mediatriz del lado AC:

$$N(7/2, 1/2)$$

$$m_{AC} = 3 \Rightarrow m = -1/3$$

$$y - 1/2 = -1/3(x - 7/2)$$

$$s \equiv x + 3y - 5 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por  $r$  y  $s$ , se obtiene el circuncentro:

$$O(2, 1)$$

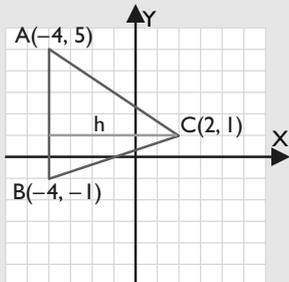
# Ejercicios y problemas

## 2. Alturas y medianas de un triángulo

38. Dibuja y halla mentalmente la longitud de la altura relativa al lado AB del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(-4, 5), B(-4, -1) \text{ y } C(2, 1)$$

**Solución:**

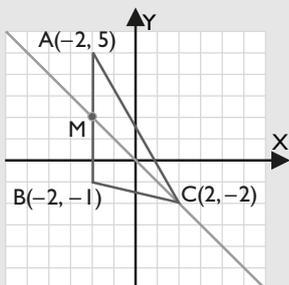


Altura = 6 unidades.

39. Dibuja y halla mentalmente la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado AB del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(-2, 5), B(-2, -1) \text{ y } C(2, -2)$$

**Solución:**

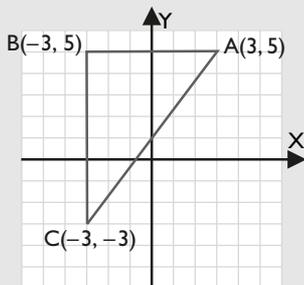


La mediana es  $y = -x$

40. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla mentalmente su área:

$$A(3, 5), B(-3, 5) \text{ y } C(-3, -3)$$

**Solución:**



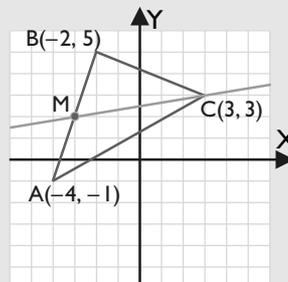
Área =  $24 \text{ u}^2$

41. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(-4, -1), B(-2, 5) \text{ y } C(3, 3)$$

Halla la ecuación de la recta que contiene a la mediana relativa al lado AB

**Solución:**



Punto medio del lado AB es  $M(-3, 2)$

$$m_{MC} = 1/6$$

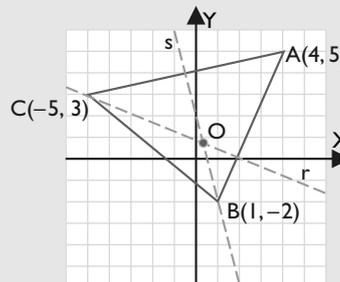
$$y - 2 = \frac{1}{6}(x + 3)$$

La mediana es  $x - 6y + 15 = 0$

42. Halla y dibuja el ortocentro del triángulo que tiene como vértices los puntos:

$$A(4, 5), B(1, -2) \text{ y } C(-5, 3)$$

**Solución:**



Recta que contiene a la altura relativa al lado AB:

$$C(-5, 3)$$

$$m_{AB} = 7/3 \Rightarrow m = -3/7$$

$$y - 3 = -3/7(x + 5)$$

$$r \equiv 3x + 7y - 6 = 0$$

Recta que contiene a la altura relativa al lado AC:

$$B(1, -2)$$

$$m_{AC} = 2/9 \Rightarrow m = -9/2$$

$$y + 2 = -9/2(x - 1)$$

$$s \equiv 9x + 2y - 5 = 0$$

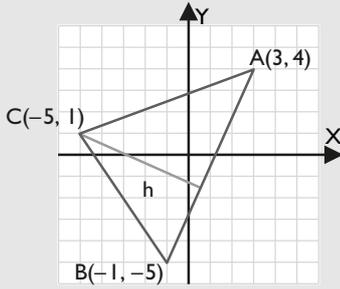
Resolviendo el sistema formado por  $r$  y  $s$ , se obtiene el ortocentro:

$$O(23/57, 13/19)$$

43. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla su área:

$$A(3, 4), B(-1, -5) \text{ y } C(-5, 1)$$

**Solución:**



Longitud de la base:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{97} \text{ unidades.}$$

Altura:

Ecuación de la recta que contiene al lado AB:

$$r \equiv 9x - 4y - 11 = 0$$

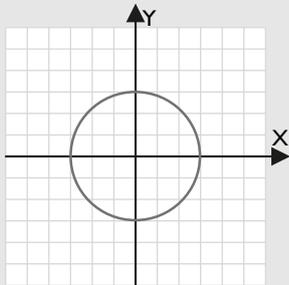
$$h = d(C, r) = \frac{|-45 - 4 - 11|}{\sqrt{97}} = \frac{60}{\sqrt{97}} \text{ unidades.}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{97} \cdot \frac{60}{\sqrt{97}} = 30 \text{ u}^2$$

### 3. Secciones cónicas y circunferencia

44. Dibuja la circunferencia que tiene el centro en el origen de coordenadas y radio  $R = 3$ , y halla mentalmente su ecuación.

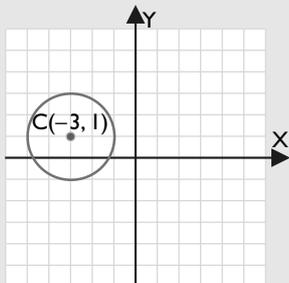
**Solución:**



$$x^2 + y^2 = 9$$

45. Dibuja y halla la ecuación general de la circunferencia que tiene el centro en el punto  $C(-3, 1)$  y radio  $R = 2$

**Solución:**



$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 2^2$$

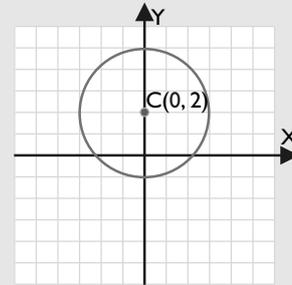
$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$$

46. Halla el centro y el radio de la circunferencia  $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$ . Haz el dibujo.

**Solución:**

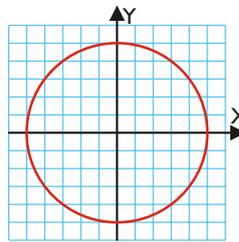
$$C(0, 2)$$

$$R = \sqrt{0 + 4 + 5} \Rightarrow R = 3$$

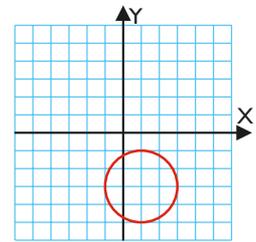


47. Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:

a)



b)



**Solución:**

a)  $x^2 + y^2 = 25$

b)  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 2^2$

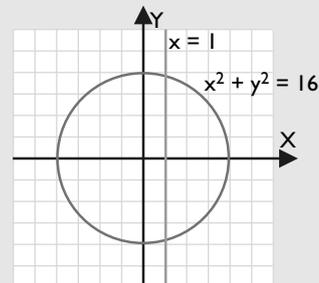
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

### 4. Posiciones relativas

48. Dibuja la recta y la circunferencia siguientes y estudia mentalmente su posición relativa.

$$x = 1 \quad x^2 + y^2 = 16$$

**Solución:**



La recta es secante.

49. Halla los puntos de corte de la recta y la circunferencia siguientes y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

$$3x - 2y = -3 \quad x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$$

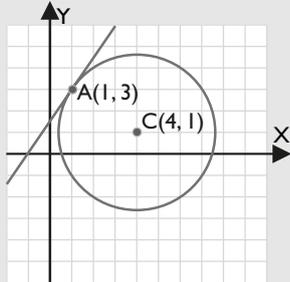
# Ejercicios y problemas

## Solución:

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$x = 1, y = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$

La recta es tangente a la circunferencia.



50. Dadas la recta y la circunferencia siguientes:

$$y = x + 2$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$$

calcula la distancia del centro de la circunferencia a la recta, el radio de la circunferencia y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

## Solución:

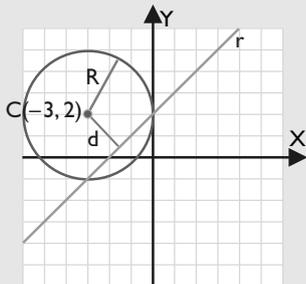
Centro de la circunferencia:  $C(-3, 2)$

Distancia del centro a la recta  $x - y + 2 = 0$  es

$$d = d(C, r) = \frac{|-3 - 2 + 2|}{\sqrt{2}} = 2,12$$

$$\text{Radio: } R = \sqrt{9 + 4 - 4} = 3$$

$d < R \Rightarrow$  La recta es secante.



51. Estudia la posición relativa de las siguientes circunferencias. Haz el dibujo.

$$x^2 + y^2 + 6x - 11 = 0$$

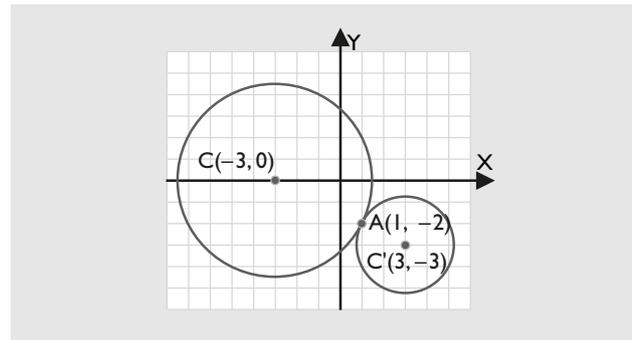
$$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 13 = 0$$

## Solución:

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$A(1, -2)$$

Las circunferencias son tangentes exteriores.



## 5. La elipse

52. Se tiene una elipse en la que  $a = 4$  y  $b = 2$ . Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

## Solución:

$$c = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

## Puntos

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(4, 0), A'(-4, 0), B(0, 2)$  y  $B'(0, -2)$

Focos:  $F(2\sqrt{3}, 0), F'(-2\sqrt{3}, 0)$

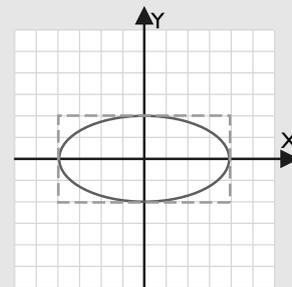
## Segmentos

Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 8$

Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 4$

Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 4\sqrt{3}$

Excentricidad: es  $e = c/a = \sqrt{3}/2$



53. La ecuación reducida de una elipse es:

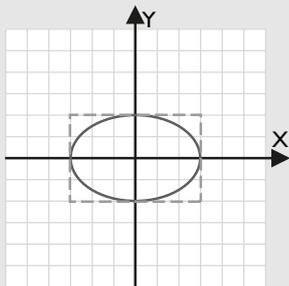
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

## Solución:

$$a = 3, b = 2$$

$$c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

**Puntos**Centro:  $O(0, 0)$ Vértices:  $A(3, 0), A'(-3, 0), B(0, 2)$  y  $B'(0, -2)$ Focos:  $F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$ **Segmentos**Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 6$ Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 4$ Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 2\sqrt{5}$ **Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{5}/3$ 

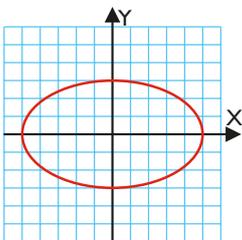
54. Halla la ecuación de una elipse que tiene el centro en el punto  $C(3, -2)$  y en la que  $a = 5$  y  $b = 4$

**Solución:**

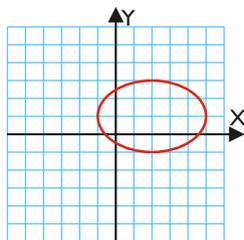
$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

55. Halla la ecuación de las siguientes elipses:

a)



b)

**Solución:**

a)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

b)  $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

**6. La hipérbola**

56. Se tiene una hipérbola en la que  $a = 2$  y  $b = 1$ , y los focos están en el eje X. Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

**Solución:**

$$c = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

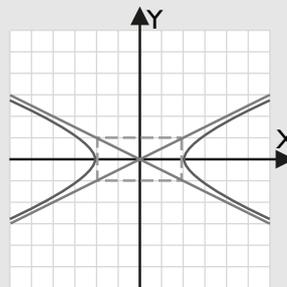
$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

**Puntos**Centro:  $O(0, 0)$ Vértices:  $A(2, 0), A'(-2, 0), B(0, 1)$  y  $B'(0, -1)$ Focos:  $F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$ **Segmentos**Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 4$ Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 2$ Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 2\sqrt{5}$ **Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{5}/2$ **Rectas**

Asíntotas:

$$y = x/2$$

$$y = -x/2$$



57. La ecuación reducida de una hipérbola es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

**Solución:**

$a = 3, b = 2$

$$c = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

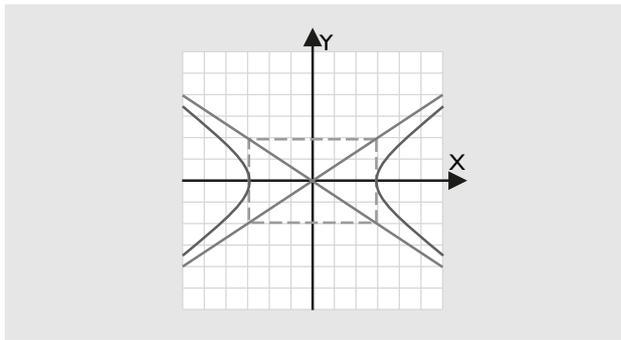
**Puntos**Centro:  $O(0, 0)$ Vértices:  $A(3, 0), A'(-3, 0), B(0, 2)$  y  $B'(0, -2)$ Focos:  $F(\sqrt{13}, 0), F'(-\sqrt{13}, 0)$ **Segmentos**Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 6$ Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 4$ Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 2\sqrt{13}$ **Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{13}/3$ **Rectas**

Asíntotas:

$$y = 2x/3$$

$$y = -2x/3$$

# Ejercicios y problemas



58. Halla la ecuación de una hipérbola que tiene el centro en el punto  $C(2, -1)$  y en la que  $a = 3$  y  $b = 4$

**Solución:**

$$\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$$

59. Se tiene una hipérbola equilátera en la que  $a = 3$  y los focos están en el eje  $X$ . Halla la ecuación reducida, el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas. Dibuja la hipérbola.

**Solución:**

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$c = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

**Puntos**

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(3, 0), A'(-3, 0), B(0, 3)$  y  $B'(0, -3)$

Focos:  $F(3\sqrt{2}, 0), F'(-3\sqrt{2}, 0)$

**Segmentos**

Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 6$

Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 6$

Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 6\sqrt{2}$

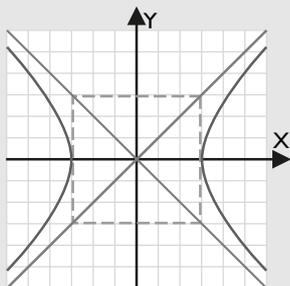
**Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{2}$

**Rectas**

Asíntotas:

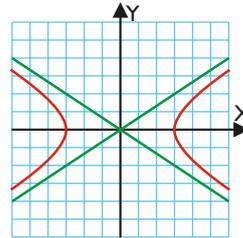
$$y = x$$

$$y = -x$$

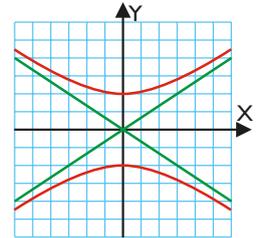


60. Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas y de sus asíntotas:

a)



b)



**Solución:**

a)  $a = 3, b = 2$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Asíntotas:

$$y = 2x/3$$

$$y = -2x/3$$

b)  $b = 2, a = 3$

$$-\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

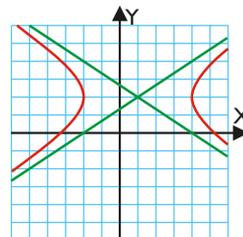
Asíntotas:

$$y = 2x/3$$

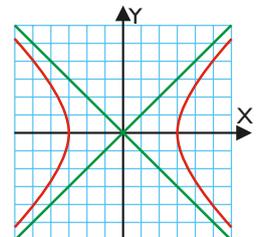
$$y = -2x/3$$

61. Halla las ecuaciones de las siguientes hipérbolas y de sus asíntotas:

a)



b)



**Solución:**

a)  $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

Asíntotas:  $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}, y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

b)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 9$

Asíntotas:  $y = x, y = -x$

## 7. La parábola

62. Se tiene una parábola en la que el foco está en el eje  $Y$  y  $p = 2$ . Halla la ecuación reducida, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

**Solución:**

$$y = \frac{x^2}{4}$$

**Puntos**

Vértice:  $V(0, 0)$

Foco:  $F(0, 1)$

**Segmentos**

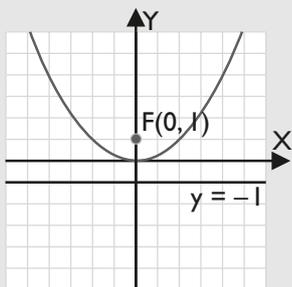
Distancia focal:  $d(F, d) = 2$

**Excentricidad:**  $e = 1$

**Rectas**

Directriz:  $y = -1$

Eje:  $x = 0$

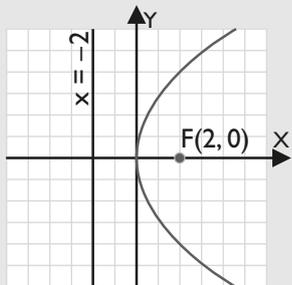


63. El foco de una parábola es el punto  $F(2, 0)$  y la directriz es la recta  $x = -2$ . Halla la ecuación de la parábola y dibújala.

**Solución:**

$$p = 4$$

$$x = \frac{y^2}{8}$$

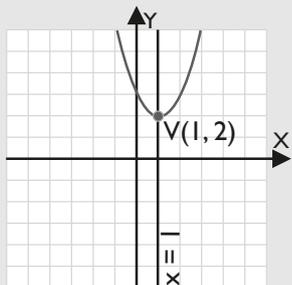


64. Halla la ecuación de una parábola que tiene el vértice en el punto  $V(1, 2)$ , el eje es paralelo al de ordenadas y en la que  $p = 1/2$ . Haz el dibujo.

**Solución:**

$$y = (x - 1)^2 + 2$$

$$y = x^2 - 2x + 3$$



65. Se tiene una parábola de ecuación  $y = x^2/3$ . Halla el valor del parámetro  $p$ , el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

**Solución:**

$$2p = 3 \Rightarrow p = 3/2$$

**Puntos**

Vértice:  $V(0, 0)$

Foco:  $F(0, 3/4)$

**Segmentos**

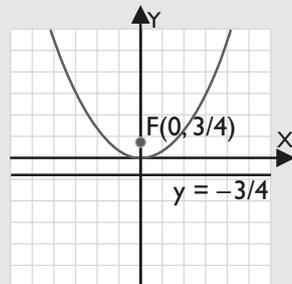
Distancia focal:  $d(F, d) = 3/2$

**Excentricidad:**  $e = 1$

**Rectas**

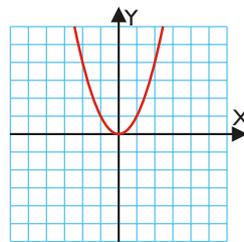
Directriz:  $y = -3/4$

Eje:  $x = 0$

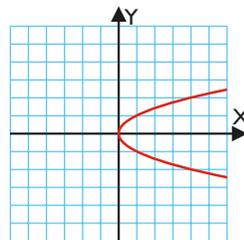


66. Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a)



b)



**Solución:**

a)  $y = x^2$

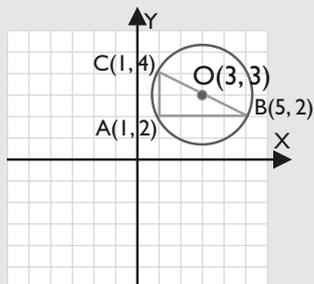
b)  $x = y^2$

# Ejercicios y problemas

## Para ampliar

67. Dibuja el triángulo que tiene los vértices en los puntos  $A(1, 2)$ ,  $B(5, 2)$  y  $C(1, 4)$ , y halla mentalmente el circuncentro. Dibuja la circunferencia circunscrita.

**Solución:**

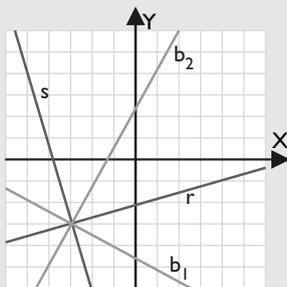


El circuncentro es el punto medio de la hipotenusa:  
 $O(3, 3)$

68. Halla las bisectrices de las rectas:

$$r \equiv 2x - 7y - 15 = 0, \quad s \equiv 7x + 2y + 27 = 0$$

**Solución:**



$$d(P, r) = d(P, s)$$

$$\frac{|2x - 7y - 15|}{\sqrt{4 + 49}} = \frac{|7x + 2y + 27|}{\sqrt{49 + 4}}$$

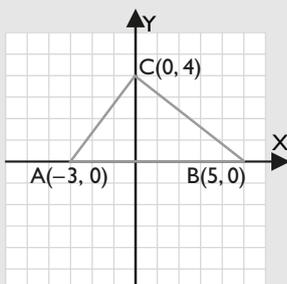
$$b_1 \equiv 5x + 9y + 42 = 0$$

$$b_2 \equiv 9x - 5y + 12 = 0$$

69. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla mentalmente su área:

$$A(-3, 0), B(5, 0) \text{ y } C(0, 4)$$

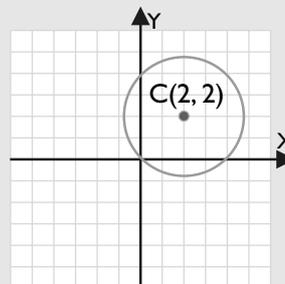
**Solución:**



$$\text{Área} = 16 \text{ u}^2$$

70. Dibuja la circunferencia que tiene el centro en el punto  $C(2, 2)$  y radio  $R = 2\sqrt{2}$ . Halla mentalmente su ecuación.

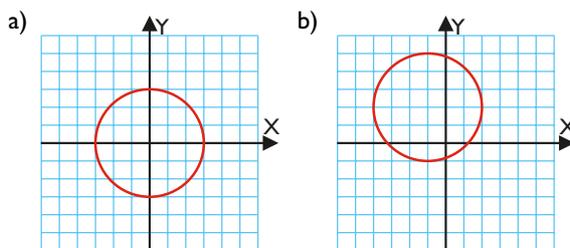
**Solución:**



$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$$

71. Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:



**Solución:**

$$a) x^2 + y^2 = 9$$

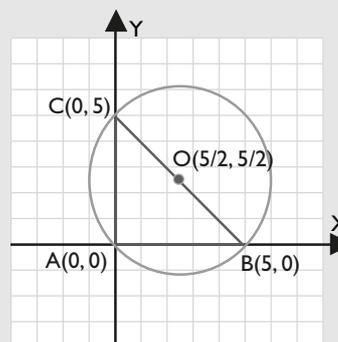
$$b) (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$$

72. Dibuja la circunferencia que pasa por los puntos  $A(0, 0)$ ,  $B(5, 0)$  y  $C(0, 5)$ . Halla el centro, el radio y su ecuación.

**Solución:**

Como el triángulo es rectángulo, el centro de la circunferencia circunscrita es el punto medio de la hipotenusa, y el diámetro es la longitud de la hipotenusa.



El centro es  $O(5/2, 5/2)$

El radio es  $R = 5\sqrt{2}/2$

Ecuación:

$$(x - 5/2)^2 + (y - 5/2)^2 = 25/2$$

$$x^2 + y^2 - 5x - 5y = 0$$

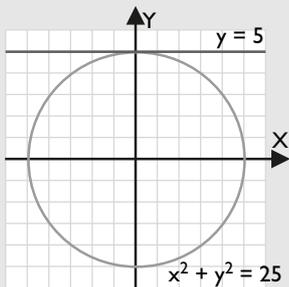
73. Dibuja la recta y circunferencia siguientes:

$$r \equiv y = 5$$

$$c \equiv x^2 + y^2 = 25$$

y estudia su posición relativa.

**Solución:**



La recta es tangente a la circunferencia.

74. Halla los puntos de corte de la recta y la circunferencia siguientes y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

$$r \equiv 2x - y = -4$$

$$c \equiv x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

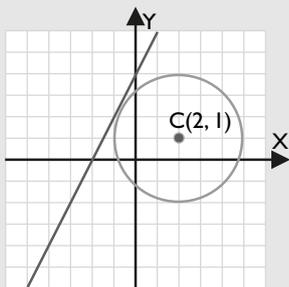
**Solución:**

Resolviendo el sistema, se obtiene:

$$5x^2 + 8x + 4 = 0$$

que no tiene solución real.

La recta es exterior a la circunferencia.



75. Halla los puntos de corte de las siguientes circunferencias y estudia su posición relativa. Haz el dibujo.

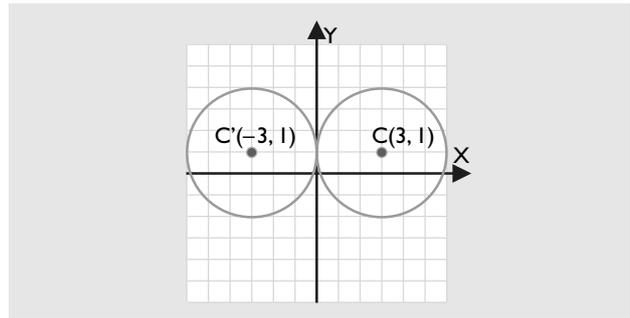
$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$$

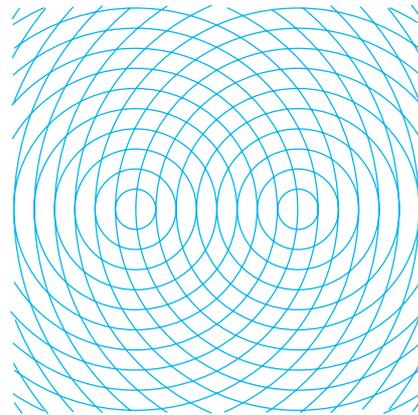
**Solución:**

Resolviendo el sistema, se obtiene:  $A(0, 1)$

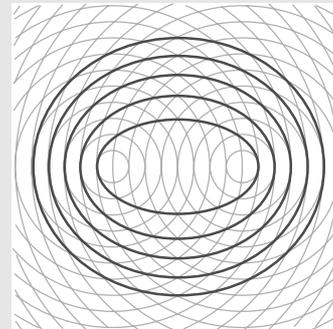
Son tangentes exteriores.



76. Utilizando la siguiente trama y la definición de elipse, dibuja cinco elipses distintas.



**Solución:**



Siguiendo los puntos diagonales de la trama, la distancia a un foco aumenta una unidad y la distancia al otro foco disminuye una unidad; por tanto, la suma de las distancias a los focos permanece constante.

77. La ecuación reducida de una elipse es:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la elipse.

**Solución:**

$$a = 3, b = 5$$

$$c = \sqrt{25 - 9} = 4$$

# Ejercicios y problemas

## Puntos

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(3, 0), A'(-3, 0), B(0, 5)$  y  $B'(0, -5)$

Focos:  $F(0, 3), F'(0, -3)$

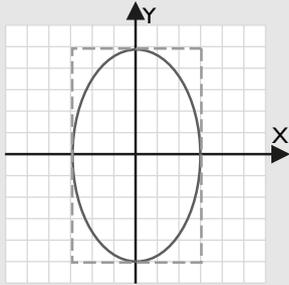
## Segmentos

Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 6$

Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 10$

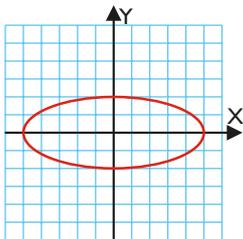
Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 8$

**Excentricidad:** es  $e = c/b = 4/5$

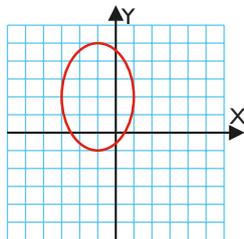


78. Halla las ecuaciones de las siguientes elipses:

a)



b)

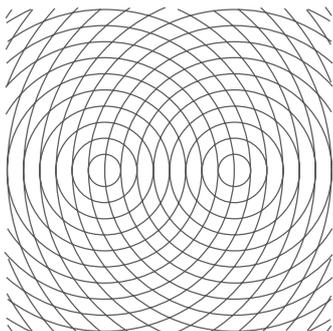


## Solución:

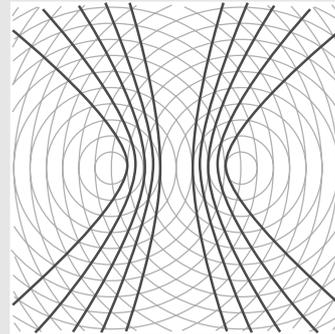
a)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

79. Utilizando la siguiente trama y la definición de hipérbola, dibuja cinco hipérbolas distintas.



## Solución:



Siguiendo los puntos diagonales de la trama, la distancia a un foco aumenta una unidad y la distancia al otro foco aumenta una unidad; por tanto, la diferencia de las distancias a los focos permanece constante.

80. La ecuación de una hipérbola es:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad. Dibuja la hipérbola.

## Solución:

$a = 3, b = 5$

$$c = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

## Puntos

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(3, 0), A'(-3, 0), B(0, 5)$  y  $B'(0, -5)$

Focos:  $F(\sqrt{34}, 0), F'(-\sqrt{34}, 0)$

## Segmentos

Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 6$

Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 10$

Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 2\sqrt{34}$

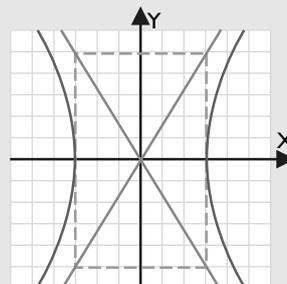
**Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{34}/3$

## Rectas

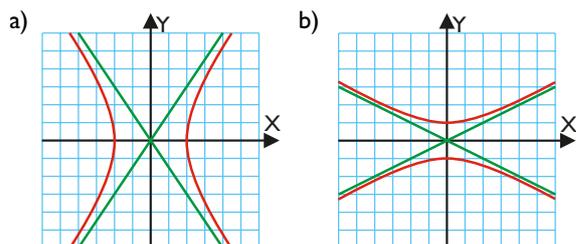
Asíntotas:

$$y = 5x/3$$

$$y = -5x/3$$



81. Halla las ecuaciones de las hipérbolas y de sus asíntotas:



**Solución:**

a)  $a = 2, b = 3$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Asíntotas:

$$y = 3x/2$$

$$y = -3x/2$$

b)  $a = 2, b = 1$

$$-\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

Asíntotas:

$$y = x/2$$

$$y = -x/2$$

82. Se tiene una parábola en la que el foco está en el eje X y  $p = 1$ . Halla la ecuación reducida, el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje. Dibuja la parábola.

**Solución:**

$$x = \frac{y^2}{2}$$

**Puntos**

Vértice:  $V(0, 0)$

Foco:  $F(1/2, 0)$

**Segmentos**

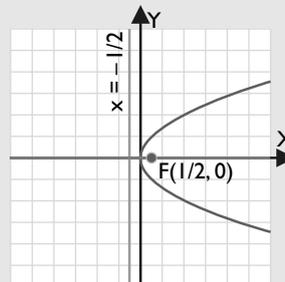
Distancia focal:  $d(F, d) = 1$

**Excentricidad:**  $e = 1$

**Rectas**

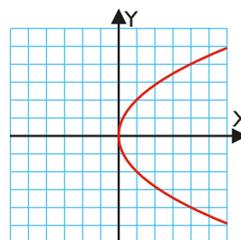
Directriz:  $x = -1/2$

Eje:  $y = 0$

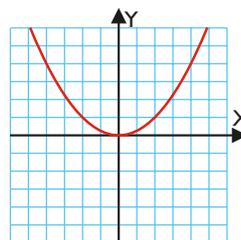


83. Halla las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a)



b)



**Solución:**

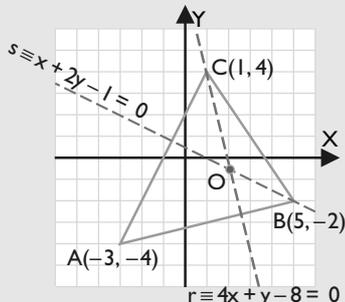
a)  $x = y^2/4$

b)  $y = x^2/4$

## Problemas

84. Halla y dibuja el ortocentro del triángulo que tiene como vértices los puntos:  $A(-3, -4)$ ,  $B(5, -2)$  y  $C(1, 4)$

**Solución:**



Recta que contiene a la altura relativa al lado AB:

$C(1, 4)$

$$m_{AB} = 1/4 \Rightarrow m = -4$$

$$y - 4 = -4(x - 1)$$

$$r \equiv 4x + y - 8 = 0$$

Recta que contiene a la altura relativa al lado AC:

$B(5, -2)$

$$m_{AC} = 2 \Rightarrow m = -1/2$$

$$y + 2 = -1/2(x - 5)$$

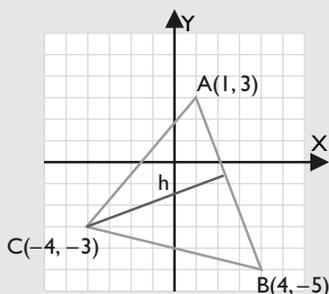
$$s \equiv x + 2y - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por  $r$  y  $s$ , se obtiene el ortocentro:

$$O(15/7, -4/7)$$

85. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los siguientes puntos, y halla su área:  $A(1, 3)$ ,  $B(4, -5)$  y  $C(-4, -3)$

**Solución:**



Longitud de la base:

$$d(A, B) = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-5 - 3)^2} = \sqrt{73}$$

Altura:

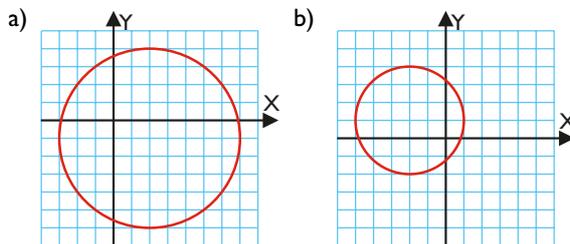
Ecuación de la recta que contiene al lado AB:

$$r \equiv 8x + 3y - 17 = 0$$

$$h = d(C, r) = \frac{|-32 - 9 - 17|}{\sqrt{73}} = \frac{58}{\sqrt{73}} \text{ unidades}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{73} \cdot \frac{58}{\sqrt{73}} = 29 \text{ u}^2$$

86. Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias:



**Solución:**

a)  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5^2$

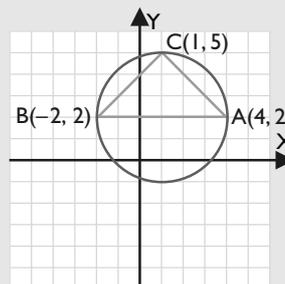
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$$

b)  $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 3^2$

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

87. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:  $A(4, 2)$ ,  $B(-2, 2)$  y  $C(1, 5)$

**Solución:**



Cálculo del circuncentro

Mediatriz relativa al lado AB:

$$r \equiv x = 1$$

Mediatriz relativa al lado AC:

$$N(5/2, 7/2)$$

$$m_{AC} = -1 \Rightarrow m = 1$$

$$s \equiv x - y + 1 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por  $r$  y  $s$ , se obtiene el circuncentro:

$O(1, 2)$ , que es el punto medio del lado AB

El radio es  $R = 3$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

88. Estudia la posición relativa de la recta y la circunferencia siguientes. Haz el dibujo.

$$r \equiv 3x - y = -6$$

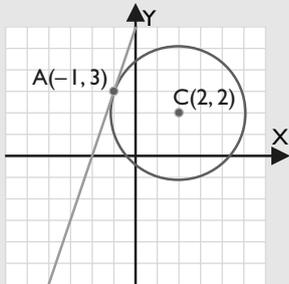
$$c \equiv x^2 + y^2 - 4x - 4y - 2 = 0$$

**Solución:**

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$A(-1, 3)$$

La recta es tangente a la circunferencia.

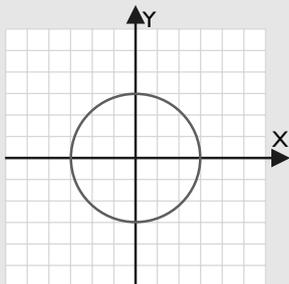


89. Se tiene una elipse en la que  $a = 3$  y  $b = 3$ . Halla la ecuación reducida y dibújala. Interpreta el resultado.

**Solución:**

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9$$

Es una circunferencia de centro el origen y radio 3



90. De una elipse sabemos que la distancia entre los focos es de 8 unidades, y entre los vértices A y A' es de 10 unidades. Halla su ecuación y dibújala.

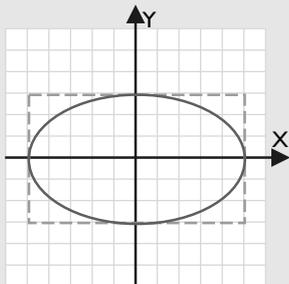
**Solución:**

$$2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$b = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



91. La primera ley de Kepler dice: "La órbita que describe la Tierra en su movimiento de traslación alrededor del Sol es una elipse, en uno de cuyos focos está el Sol". La distancia máxima de la Tierra al Sol es de  $15,2 \cdot 10^7$  km, y la distancia mínima es de  $14,7 \cdot 10^7$  km. Calcula la excentricidad e interpreta el resultado.

**Solución:**

$$2a = 15,2 \cdot 10^7 + 14,7 \cdot 10^7 = 299\,000\,000$$

$$a = 149\,500\,000$$

$$c = a - 14,7 \cdot 10^7 = 2\,500\,000$$

$$e = c/a = 0,017$$

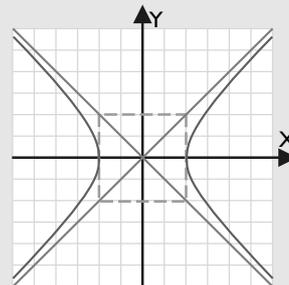
Como la excentricidad es muy pequeña, es casi una circunferencia.

92. Se tiene una hipérbola en la que  $a = 2$  y  $b = 2$  y los focos están en el eje X. Halla la ecuación reducida y dibújala. Interpreta el resultado.

**Solución:**

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4$$

Es una hipérbola equilátera.



93. De una hipérbola se sabe que la distancia entre los focos es de 10 unidades, y entre los vértices A y A' es de 6 unidades. Halla su ecuación y dibújala.

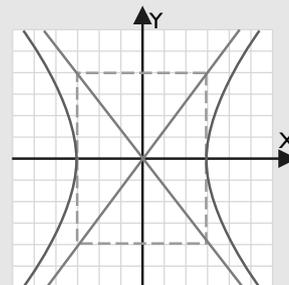
**Solución:**

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



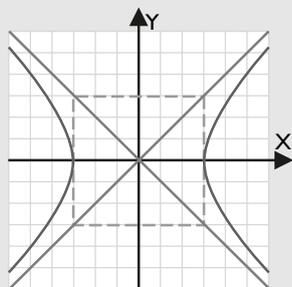
# Ejercicios y problemas

94. Los vértices de una hipérbola equilátera son los puntos  $A(3, 0)$  y  $A'(-3, 0)$ . Halla su ecuación y dibújala.

**Solución:**

$$a = b = 3$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 9$$

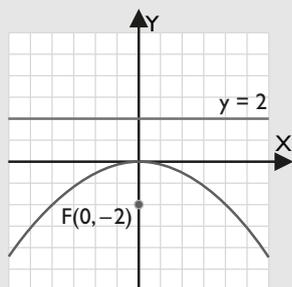


95. El foco de una parábola es el punto  $F(0, -2)$ , y la directriz es la recta  $y = 2$ . Halla la ecuación de la parábola y dibújala.

**Solución:**

$$p = -4$$

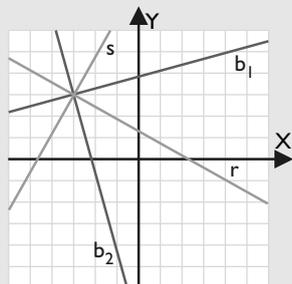
$$y = -\frac{x^2}{8}$$



## Para profundizar

96. Halla las bisectrices de los ángulos que forman las rectas:  
 $r \equiv 4x + 7y - 9 = 0$        $s \equiv 7x - 4y + 33 = 0$

**Solución:**



$$d(P, r) = d(P, s)$$

$$\frac{|4x + 7y - 9|}{\sqrt{16 + 49}} = \frac{|7x - 4y + 33|}{\sqrt{49 + 16}}$$

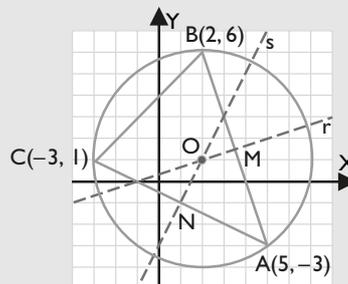
$$b_1 \equiv 3x - 11y + 42 = 0$$

$$b_2 \equiv 11x + 3y + 24 = 0$$

97. Halla el centro de la circunferencia que pasa por los siguientes puntos, y dibújala:  
 $A(5, -3)$ ,  $B(2, 6)$  y  $C(-3, 1)$

$$A(5, -3), B(2, 6) \text{ y } C(-3, 1)$$

**Solución:**



Cálculo del centro de la circunferencia, que es el circuncentro.

Mediatriz del lado AB:

$$M(7/2, 3/2)$$

$$m_{AB} = -3 \Rightarrow m = 1/3$$

$$r \equiv x - 3y + 1 = 0$$

Mediatriz del lado AC:

$$N(1, -1)$$

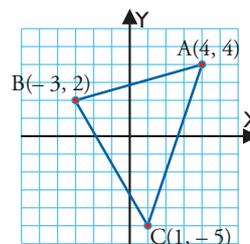
$$m_{AC} = -1/2 \Rightarrow m = 2$$

$$s \equiv 2x - y - 3 = 0$$

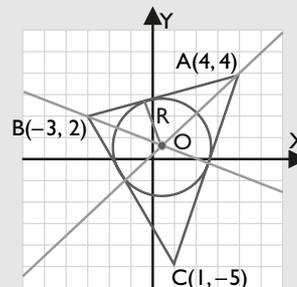
Resolviendo el sistema formado por  $r$  y  $s$ , se obtiene el circuncentro:

$$O(2, 1)$$

98. Halla la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo del siguiente dibujo:



**Solución:**



- a) Cálculo del centro de la circunferencia inscrita, que es el incentro.

$$\text{Bisectriz del ángulo A: } 45x - 47y + 8 = 0$$

Bisectriz del ángulo B:  $4,07x + 10y - 7,78 = 0$

Incentro:  $O(0,45; 0,6)$

b) Cálculo del radio, que es la distancia del incentro a una de las rectas que pasa por dos vértices.

$R = d(O, r)$ , siendo  $r$  la recta que pasa por AB

$$r \equiv 2x - 7y + 20 = 0$$

$$d(O, r) = \frac{|0,9 - 4,2 + 20|}{\sqrt{53}} = 2,29 \text{ unidades.}$$

La ecuación es:

$$(x - 0,45)^2 + (y - 0,6)^2 = 2,29^2$$

99. La excentricidad de una cónica es 0,6, y la distancia focal, 6 unidades. ¿De qué cónica se trata? Halla su ecuación.

**Solución:**

$$e = c/a = 0,6 < 1$$

Se trata de una elipse.

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$3/a = 0,6 \Rightarrow a = 3/0,6 = 5$$

$$b = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

100. Dados los puntos  $A(3, 0)$  y  $B(-3, 0)$ , halla el lugar geométrico de los puntos  $C$ , de forma que  $ABC$  sea un triángulo de perímetro 16 unidades.

**Solución:**

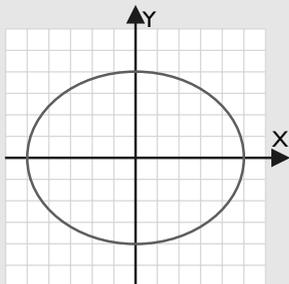
Es una elipse de:

$$\text{Distancia focal } 2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

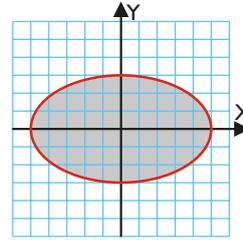
$$\text{Luego } 2a = 16 - 6 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$



101. Halla el área de la elipse de la siguiente figura, sabiendo que la fórmula es  $A = \pi ab$ , siendo  $a$  y  $b$  los semiejes.



**Solución:**

$$A = \pi ab = \pi \cdot 5 \cdot 3 = 15\pi \text{ u}^2$$

102. La excentricidad de una cónica es 1,25, y la distancia focal, 10 unidades. ¿De qué cónica se trata? Halla su ecuación.

**Solución:**

$$e = c/a = 1,25 > 1$$

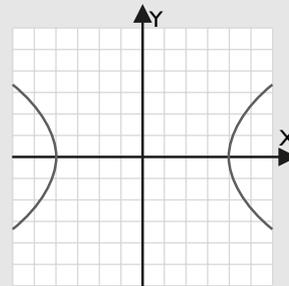
Se trata de una hipérbola.

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$a = \frac{c}{e} = \frac{5}{1,25} = 4$$

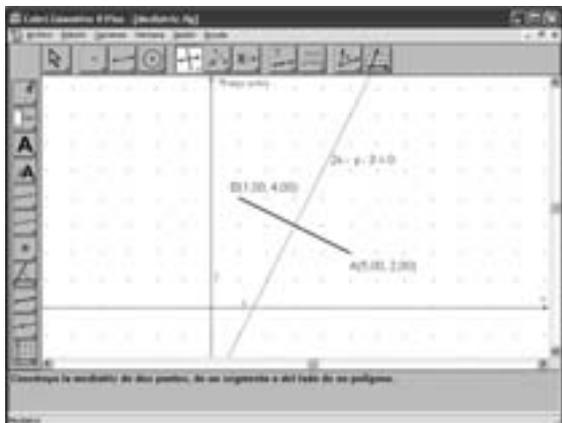
$$b = \sqrt{25 - 16} = 3$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$



## Paso a paso

103. Traza el segmento que tiene por extremos los puntos A(5, 2) y B(1, 4). Dibuja y halla la mediatriz.



**Solución:**

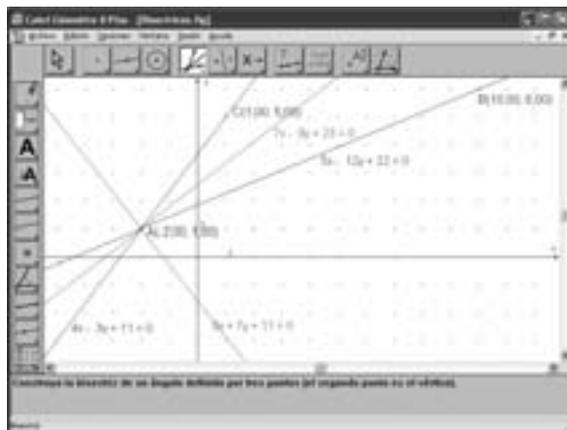
Resuelto en el libro del alumnado.

104. Dibuja las rectas:

$$r \equiv 5x - 12y + 22 = 0$$

$$s \equiv 4x - 3y + 11 = 0$$

Dibuja y halla las bisectrices de los ángulos que forman.



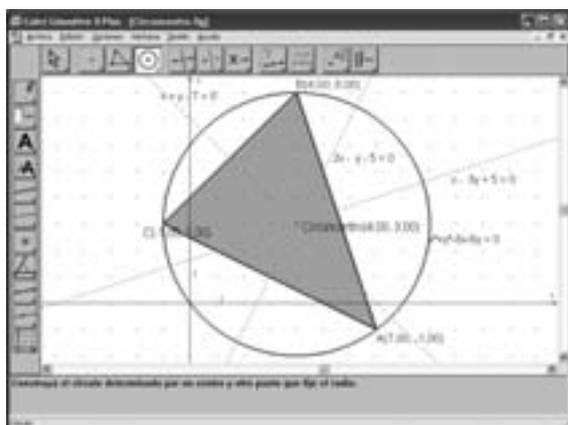
**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

105. Internet. Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es), elige Matemáticas, curso y tema.

## Practica

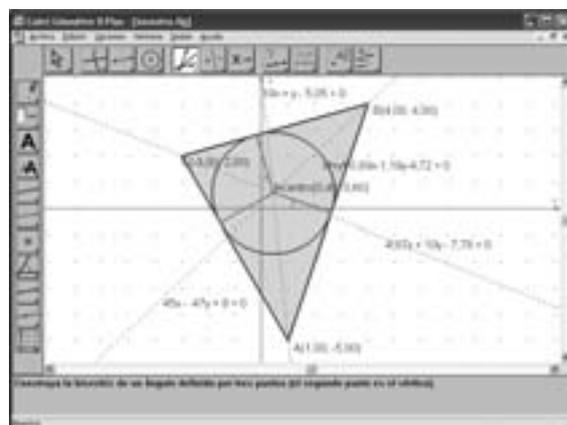
106. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los puntos A(7, -1), B(4, 8) y C(-1, 3). Halla las mediatrices de sus lados, sus ecuaciones, el circuncentro, la circunferencia circunscrita y su ecuación.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

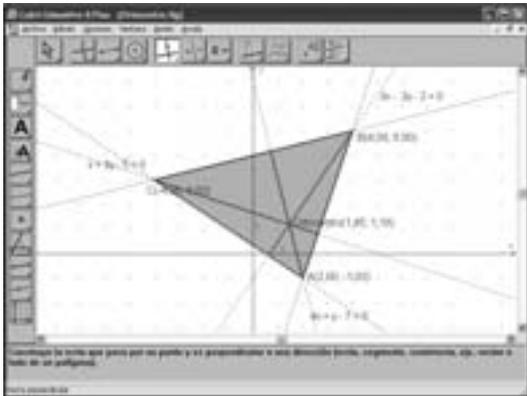
107. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los puntos A(1, -5), B(4, 4) y C(-3, 2). Halla las bisectrices de sus ángulos, sus ecuaciones, el incentro, la circunferencia inscrita y su ecuación.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

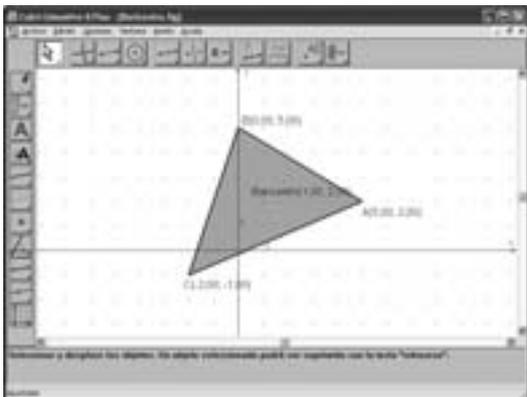
108. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los puntos  $A(2, -1)$ ,  $B(4, 5)$  y  $C(-4, 3)$ . Halla las alturas, sus ecuaciones y el ortocentro.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

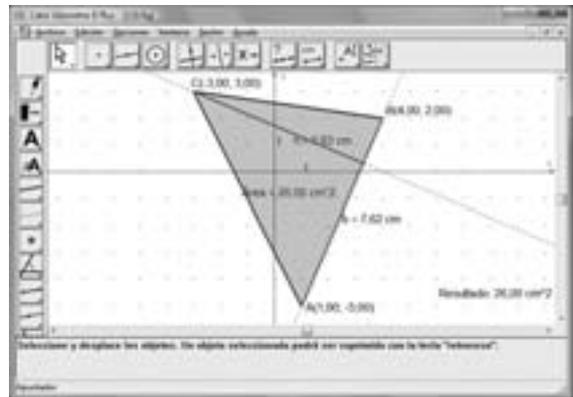
109. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los puntos  $A(5, 2)$ ,  $B(0, 5)$  y  $C(-2, -1)$ . Halla las medianas y el baricentro.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

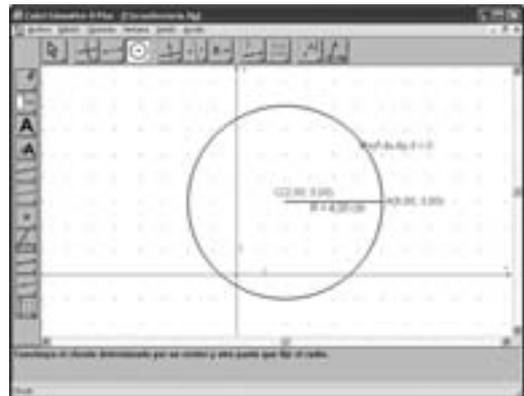
110. Dibuja el triángulo que tiene como vértices los puntos  $A(1, -5)$ ,  $B(4, 2)$  y  $C(-3, 3)$ . Halla el área del triángulo. Dibuja la altura y mídela; mide también la base.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

111. Dibuja la circunferencia que tiene el centro en el punto  $C(2, 3)$  y radio  $R = 4$ . Halla su ecuación.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

## Paso a paso

112. Dibuja la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 32 = 0$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

113. Resuelve el sistema formado por la recta y circunferencia siguientes:

$$x - y = 4$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$$

Representa gráficamente la recta y la circunferencia y comprueba que los puntos de corte son las raíces del sistema.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

## Practica

114. Resuelve el sistema formado por las dos circunferencias siguientes:

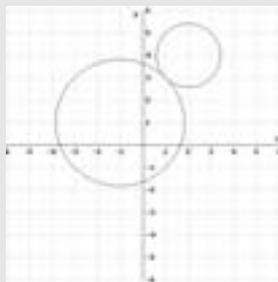
$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 18 = 0$$

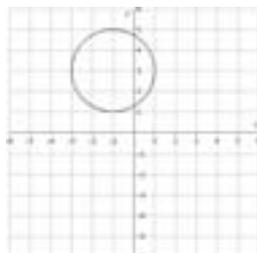
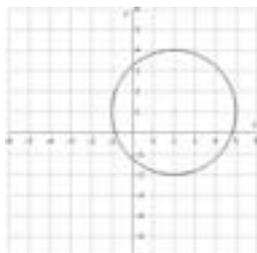
Representa gráficamente las circunferencias y comprueba que son tangentes.

**Solución:**

Resolviendo el sistema se obtiene la solución  $x = 1, y = 3$



115. Halla las ecuaciones de las siguientes circunferencias mediante *ensayo-acierto*:



**Solución:**

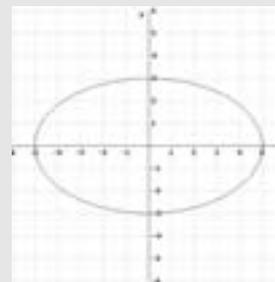
a)  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$

b)  $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

116. Representa la elipse de ecuación:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad.

**Solución:**



$a = 5, b = 3, c = 4$

**Puntos**

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(5, 0), A'(-5, 0), B(0, 3)$  y  $B'(0, -3)$

Focos:  $F(4, 0), F'(-4, 0)$

**Segmentos**

Eje principal: es  $AA', d(A, A') = 2a = 10$

Eje secundario: es  $BB', d(B, B') = 2b = 6$

Distancia focal: es  $FF', d(F, F') = 2c = 8$

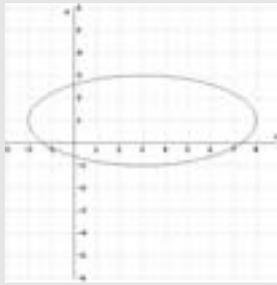
**Excentricidad:** es  $e = c/a = 4/5$

117. Representa la elipse de ecuación:

$$\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal y la excentricidad.

**Solución:**



$$a = 5, b = 2, c = \sqrt{21}$$

**Puntos**

Centro:  $O(3, 1)$

Vértices:  $A(8, 1), A'(-2, 1), B(3, 3)$  y  $B'(3, -1)$

Focos:  $F(3 + \sqrt{21}, 1), F'(3 - \sqrt{21}, 1)$

**Segmentos**

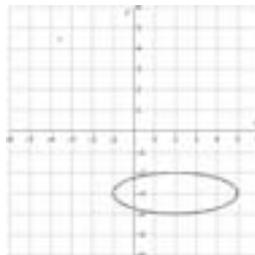
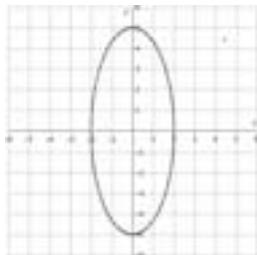
Eje principal: es  $AA'$ ,  $d(A, A') = 2a = 10$

Eje secundario: es  $BB'$ ,  $d(B, B') = 2b = 4$

Distancia focal: es  $FF'$ ,  $d(F, F') = 2c = 2\sqrt{21}$

**Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{21}/5$

118. Halla las ecuaciones de las siguientes elipses mediante *ensayo-acierto*:



**Solución:**

a)  $O(0, 0)$

$$a = 2, b = 5,$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

b)  $O(2, -3)$

$$a = 3, b = 1$$

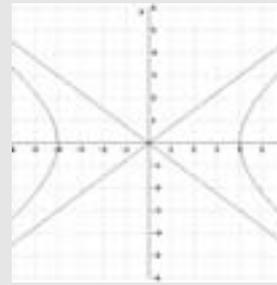
$$\frac{(x-2)^2}{9} + (y+3)^2 = 1$$

119. Representa la hipérbola y sus asíntotas:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas.

**Solución:**



$$a = 4, b = 3, c = 5$$

**Puntos**

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(4, 0), A'(-4, 0), B(0, 3)$  y  $B'(0, -3)$

Focos:  $F(5, 0), F'(-5, 0)$

**Segmentos**

Eje principal: es  $AA'$ ,  $d(A, A') = 2a = 8$

Eje secundario: es  $BB'$ ,  $d(B, B') = 2b = 6$

Distancia focal: es  $FF'$ ,  $d(F, F') = 2c = 10$

**Excentricidad:** es  $e = c/a = 5/4$

**Rectas**

Asíntotas:

$$y = 3x/4$$

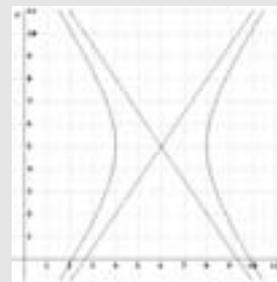
$$y = -3x/4$$

120. Representa la hipérbola y sus asíntotas:

$$\frac{(x-6)^2}{4} - \frac{(y-5)^2}{9} = 1$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas.

**Solución:**



$$a = 2, b = 3, c = \sqrt{13}$$

**Puntos**

Centro:  $O(6, 5)$

Vértices:  $A(8, 5), A'(4, 5), B(6, 8)$  y  $B'(6, 2)$

Focos:  $F(6 + \sqrt{13}, 5), F'(6 - \sqrt{13}, 5)$

## Segmentos

Eje principal: es  $AA'$ ,  $d(A, A') = 2a = 4$

Eje secundario: es  $BB'$ ,  $d(B, B') = 2b = 6$

Distancia focal: es  $FF'$ ,  $d(F, F') = 2c = 2\sqrt{13}$

**Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{13}/2$

## Rectas

Asíntotas:

$$y = 3x/2 - 4$$

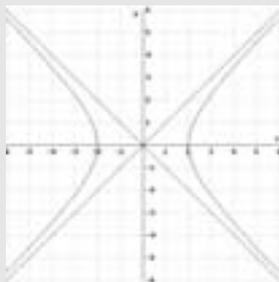
$$y = -3x/2 + 14$$

121. Representa la hipérbola y sus asíntotas:

$$x^2 - y^2 = 4$$

Halla el centro, los vértices, los focos, el eje principal, el eje secundario, la distancia focal, la excentricidad y las asíntotas.

## Solución:



$$a = 2, b = 2, c = 2\sqrt{2}$$

## Puntos

Centro:  $O(0, 0)$

Vértices:  $A(2, 0)$ ,  $A'(-2, 0)$ ,  $B(0, 2)$  y  $B'(0, -2)$

Focos:  $F(2\sqrt{2}, 0)$ ,  $F'(-2\sqrt{2}, 0)$

## Segmentos

Eje principal: es  $AA'$ ,  $d(A, A') = 2a = 4$

Eje secundario: es  $BB'$ ,  $d(B, B') = 2b = 4$

Distancia focal: es  $FF'$ ,  $d(F, F') = 2c = 4\sqrt{2}$

**Excentricidad:** es  $e = c/a = \sqrt{2}$

## Rectas

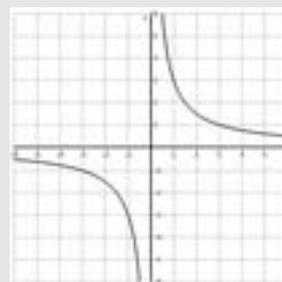
Asíntotas:  $y = x$ ,  $y = -x$

122. Representa la hipérbola de ecuación:

$$xy = 3$$

Halla el centro y las asíntotas.

## Solución:



$xy = k$ , donde  $k = a^2/2$

$$a = b = \sqrt{6}$$

$$c = 2\sqrt{3}$$

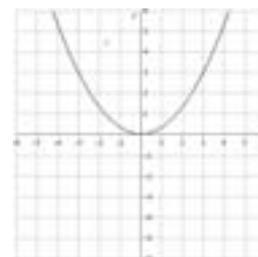
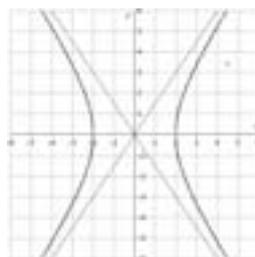
Centro:  $O(0, 0)$

Asíntotas:

$$y = 0$$

$$x = 0$$

123. Halla las ecuaciones de la siguiente hipérbola y parábola mediante *ensayo-acierto*:



## Solución:

a)  $a = 2$ ,  $b = 3$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

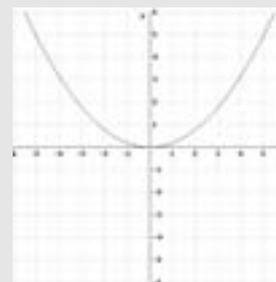
b)  $y = x^2/3$

124. Representa la parábola de ecuación:

$$y = x^2/5$$

Halla el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje.

## Solución:



$$2p = 5 \Rightarrow p = 5/2$$

**Puntos**

Vértice:  $V(0, 0)$

Foco:  $C(0, 5/4)$

**Segmentos**

Distancia focal:  $d(F, d) = 5/2$

**Excentricidad:**  $e = 1$

**Rectas**

Directriz:  $y = -5/4$

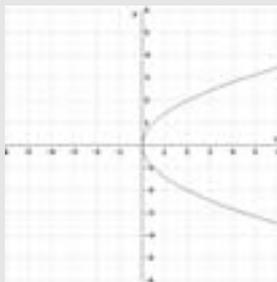
Eje:  $x = 0$

125. Representa la parábola de ecuación:

$$x = y^2/2$$

Halla el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje.

**Solución:**



$$2p = 2 \Rightarrow p = 1$$

**Puntos**

Vértice:  $V(0, 0)$

Foco:  $C(1/2, 0)$

**Segmentos**

Distancia focal:  $d(F, d) = 1$

**Excentricidad:**  $e = 1$

**Rectas**

Directriz:  $x = -1/2$

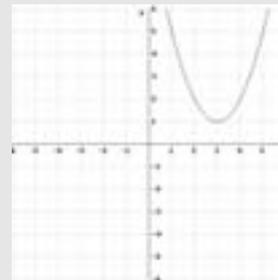
Eje:  $y = 0$

126. Representa la parábola de ecuación:

$$y = x^2 - 6x + 10$$

Halla el vértice, el foco, la distancia focal, la excentricidad, la directriz y el eje.

**Solución:**



Vértice:  $V(3, 1)$

$$\text{Ecuación: } y = \frac{(x-3)^2}{2p} + 1$$

$p = 1/2$

Foco:  $C(3, 5/4)$

**Segmentos**

Distancia focal:  $d(F, d) = 1/2$

Excentricidad:  $e = 1$

**Rectas**

Directriz:  $y = 3/4$

Eje:  $x = 3$