EXAMEN TEMA GEOMETRÍA ANALÍTICA

Conocidas las rectas $r: y = 3x - 5$, $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2}$, $t: \left.\begin{array}{l} x = 7 - t \\ y = 5 - 3t \end{array}\right\}$ y los puntos $P(-4, 3)$ y $Q(2, 5)$.

1.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ y tiene la misma pendiente que la recta s.

2.- Calcula el punto simétrico de P respecto de Q.

3.- Calcula el ángulo entre las rectas r y s .

4.- Estudia la posición relativa de las rectas r y t.

5.- Da la ecuación de la recta que pasa por Q y por el punto de intersección de r y s.

6.- Di cuál debe ser el valor del parámetro "m" para que la recta $q: mx - 5y - 2 = 0$ sea perpendicular a la recta s.

7.- Calcula la distancia entre las rectas r y t.

8.- Estudia si el punto R(5,0) está alineado con P y Q.

SOLUCIÓN

Conocidas las rectas $r: y = 3x - 5$, $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-2}$, $t: \left.\begin{array}{c} x = 7 - t \\ y = 5 - 3t \end{array}\right\}$ y los puntos $P(-4,3)$ y $Q(2,5)$.

1.- Halla todas las ecuaciones de la recta que pasa por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$ y tiene la misma pendiente que la recta s.

Calculamos el punto medio de $\overline{PQ}$: $M_{\overline{PQ}}\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right) \Rightarrow M_{\overline{PQ}}(-1,4)$

y como nuestra recta tiene la misma pendiente que s, tiene su misma dirección y por tanto nos vale un vector director de s para ella.

Como se trata de la ecuación continua el vector está en el denominador: $\vec{v_s}(4,-2)$

Y con el punto y el vector damos la ecuaciones de la recta:

Ecuación Vectorial: $(x,y) = (-1,4) + t \cdot (4,-2)$; $t \in \mathbb{R}$ Operamos: $(x,y) = (-1+4t, 4-2t)$

Ecuación Paramétrica: $\left\{\begin{array}{l} x = -1+4t \\ y = 4-2t \end{array}\right.$; $t \in \mathbb{R}$ Despejamos la t: $t = \frac{x+1}{4}$ $t = \frac{y-4}{-2}$

Ecuación Continua: $\frac{x+1}{4} = \frac{y-4}{-2}$ Operamos: $-2x - 2 = 4y - 16$

Ecuación Implícita o General: $2x + 4y - 14 = 0$ Despejamos: $4y = -2x + 14 \Rightarrow y = \frac{-2x+14}{4}$

Ecuación Explícita: $y = -\frac{x}{2} + \frac{7}{2}$

2.- Calcula el punto simétrico de P respecto de Q.

Si llamamos $S(x,y)$ al punto simétrico de P respecto de Q, tendremos que Q es el punto medio del segmento $\overline{PS}$.

Calculamos el punto medio: $M_{\overline{PS}}\left(\frac{-4+x}{2}, \frac{3+y}{2}\right)$ que debe coincidir con $Q(2,5)$ por tanto:

$$\frac{-4+x}{2} = 2 \Rightarrow -4 + x = 4 \Rightarrow x = 4 + 4 = 8 \quad \text{y} \quad \frac{3+y}{2} = 5 \Rightarrow 3 + y = 10 \Rightarrow y = 10 - 3 = 7$$

Así, el simétrico a P respecto de Q es: $S(8,7)$

3.- Calcula el ángulo entre las rectas r y s .

Utilizamos el vector director de s obtenido en el ejercicio 1: $\vec{v_s}(4,-2)$

y extraemos uno de la recta r: $y = 3x - 5$ $m = 3 \Rightarrow \vec{v_r}(1,3)$

y realizamos los cálculos necesarios para utilizar la fórmula que nos permite calcular en ángulo entre dos vectores:

$$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = (1,3) \cdot (4,-2) = 1 \cdot 4 + 3 \cdot (-2) = 4 - 6 = -2$$

$$\left|\vec{v_r}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \qquad \left|\vec{v_s}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$$

Así:

$$\cos\left(\widehat{\vec{v_r}, \vec{v_s}}\right) = \frac{\vec{v_r} \cdot \vec{v_s}}{\left|\vec{v_r}\right| \cdot \left|\vec{v_s}\right|} = \frac{-2}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{20}} = \frac{-2}{\sqrt{200}} = \frac{-1}{5\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{10} = -0{,}14 \Rightarrow \left(\widehat{\vec{v_r}, \vec{v_s}}\right) = \arccos(-0'14) \simeq 98^\circ$$

$$180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$$

Por tanto el ángulo que forman las rectas r y s es de 82°.

4.- Estudia la posición relativa de las rectas r y t.

Utilizamos el vector director de r obtenido en el ejercicio 3: $\vec{v_r}(1,3)$

y extraemos uno de la recta t: $t:\left.\begin{matrix} x=7-t \\ y=5-3t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{v_t}(-1,-3)$

Comprobamos si sus coordenadas son proporcionales para ver si tienen la misma dirección:

$\frac{1}{-1}=\frac{3}{-3}$ por tanto los vectores directores tienen la misma dirección, con lo que las rectas pueden ser paralelas o coincidentes.

Sacamos un punto de t: $P_t(7,5)$ y lo sustituimos en r: $5=3\cdot 7-5 \Rightarrow 5\neq 16 \Rightarrow P_t \notin r$

Si fueran coincidentes cualquier punto de t estaría en r, como sabemos que P_t está en t pero no en r, tenemos que r y t son rectas paralelas.

5.- Da la ecuación de la recta que pasa por Q y por el punto de intersección de r y s.

Sabemos que r y s son rectas que se cortan dado que anteriormente hemos calculado que forman un ángulo de 45º.

Así pues podemos ahora calcular el punto de corte, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} y=3x-5 \\ \frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{-2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x-y-5=0 \\ 2x+4y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 12x-4y-20=0 \\ 2x+4y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 14x-20=0 \Rightarrow x=\frac{10}{7} \Rightarrow y=\frac{30}{7}-5=-\frac{5}{7}$$

Así pues el punto de intersección de r y s es: $I(\frac{10}{7},-\frac{5}{7})$

La recta que nos piden pasa por $Q(2,5)$ e $I(2,1)$ tiene por vector director:

$\overrightarrow{QI}(\frac{10}{7}-2,\frac{-5}{7}-5)$, o sea: $\overrightarrow{QI}(\frac{-4}{7},\frac{-40}{7})$, o también $\vec{v}(1,10)$ con lo que una de sus ecuaciones puede ser:

Ecuación Vectorial: $(x,y)=(2,5)+t\cdot(1,10)\in\mathbb{R}$

Ecuación Paramétrica: $\left\{\begin{matrix} x=2+t \\ y=5+10t \end{matrix}\right. ;\ t\in\mathbb{R}$

Ecuación Continua: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-5}{10}$

Ecuación Implícita o General: $10x-y-15=0$

Ecuación Explícita: $y=10x-15$

6.- Di cuál debe ser el valor del parámetro "m" para que la recta $q: mx-5y-2=0$ sea perpendicular a la recta s.

Utilizamos el vector director de s obtenido en el ejercicio 1: $\vec{v_s}(4,-2)$

y extraemos el vector director de la recta q: $\vec{v_q}(5,m)$.

Las recta q será perpendicular a la recta s si el producto escalar de sus vectores directores es nulo, esto es:

$$\vec{v_s}\cdot\vec{v_q}=0 \Rightarrow (4,-2)\cdot(5,m)=0 \Rightarrow 20-2m=0 \Rightarrow 20=2m \Rightarrow m=\frac{20}{2}=10$$

Con lo que tenemos que el valor de m que hace que q sea perpendicular a s es 10, y por tanto la ecuación de la recta q queda:

$$q: 10x-5y-2=0$$

7.- Calcula la distancia entre las rectas r y t.

Como ya vimos en el ejercicio 4, las rectas r y t son paralelas, por tanto sólo tenemos que utilizar un punto de la recta t, nos vale el $P_t(7,5)$ que calculamos en ese mismo ejercicio, y calcular su distancia a la recta
$r\colon y = 3x - 5$.

Primero la pasamos a la forma implícita: $r : 3x - y - 5 = 0$ y aplicamos la fórmula de la distancia punto-recta.

$$d(P_t, r) = \frac{|3\cdot 7 - 5 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|21-5-5|}{\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{10}} = 3'48 \text{ u}$$

8.- Estudia si el punto R(5,0) está alineado con P y Q.

Recordamos que los puntos P y Q son: $P(-4,3)$ y $Q(2,5)$.

Si P, Q y R están alineados los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ son proporcionales:

Calculamos el vector $\overrightarrow{PQ}(2-(-4), 5-3) \Rightarrow \overrightarrow{PQ}(6,2)$

Calculamos el vector $\overrightarrow{PR}(5-(-4), 0-3) \Rightarrow \overrightarrow{PR}(9,-3)$

$\frac{6}{9} \neq \frac{2}{-3}$ por tanto los vectores no son proporcionales luego los puntos no están alineados.