EXAMEN ANÁLISIS

NOMBRE Y APELLIDOS:____**FECHA:**_________

1º) Calcula los límites siguientes:

$a)\ \lim_{x\to 0}(cosx)^{\frac{1}{senx}}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{tanx}-\frac{1}{x}\right)$

2º) Elige 3 de las integrales siguientes:

a) $\int \frac{5.senx}{1+cos^2x}\ dx$ b) $\int (x^2-1).lnx\,.dx$ c) $\int \frac{7.dx}{8+25x^2}$

d) $\int \left(\frac{2.lnx}{x}+lnx\right).dx$ e) $\int 3.\sqrt{2x+1}\,.dx$

3º) a) Enuncia el teorema de Bolzano.

b) Comprobar que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x + ln(1+x^2)$ y de $g(x) = e^x + 1$ se cortan el algún punto.

4º) Estudia la monotonía la curvatura y los extremos de la función: $f(x) = \frac{lnx}{x}$.

5º) Hallar los valores de los parámetros a, b y c para que la función :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - bx + c & x \le 0 \\ a.e^x & x > 0 \end{cases}$$

Sea continua y derivable en R y además, la recta tangente en x=-2 tenga pendiente 2.

6º) Elegir una de las dos cuestiones:

a) Calcular el área de la región limitada por la función $f(x) = ln(1+x^2)$ su recta tangente en x=1 y el eje de ordenadas (eje 0Y).
b) Calcula el área de la región limitada por las funciones:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad , \quad g(x) = x^2 \quad , h(x) = x+2\,, \quad siendo\ \ x \ge 0$$

SOLUCIONES

1º

a) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 1^{\infty} \Rightarrow A = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot(\cos x - 1) =$

$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{\Rightarrow} e^{A} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}} = e^{0} = \underline{\underline{1}}.$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x\cdot \tan x} = \frac{0}{0} \overset{L'H}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\cos^2 x}}{\tan x + \frac{x}{\cos^2 x}} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos^2 x - 1}{\cancel{\cos^2 x}}}{\frac{\cos^2 x \tan x + x}{\cancel{\cos^2 x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x\cdot \tan x + x} = \frac{0}{0} \Rightarrow L'H:$

$\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x\cdot(-\operatorname{sen} x)}{2\cos x(-\operatorname{sen} x)\tan x + \cos^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x} + 1} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0}}$

2º

a) $\int \frac{5\operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,dx \Rightarrow t = \cos x \Rightarrow dt = -\operatorname{sen} x\,dx \Rightarrow dx = \frac{-dt}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{5\,\cancel{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{-dt}{\cancel{\operatorname{sen} x}}}{1+t^2} = -5\int\frac{dt}{1+t^2} = -5\arctan t = \underline{-5\arctan(\cos x) + C}$

b) $\int (x^2-1)\ln x\,dx$: $u = \ln x$, $dv = (x^2-1)\,dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx$, $v = \frac{x^3}{3} - x$

$\int (x^2-1)\ln x\,dx = \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \int\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx = \ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \int\left(\frac{x^2}{3} - 1\right)dx$

$= \underline{\ln x\cdot\left(\frac{x^3}{3} - x\right) - \left(\frac{x^3}{9} - x\right) + C}$

c) $\int \frac{7\cdot dx}{8+25x^2} = \int \frac{7}{8\left(1+\frac{25}{8}x^2\right)}\,dx = \frac{7}{8}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{5}{\sqrt{8}}x\right)^2} = \underline{\frac{7}{8}\cdot\frac{\sqrt{8}}{5}\arctan\left(\frac{5x}{\sqrt{8}}\right) + C}$

d) $I=\int\left(\frac{2\ln x}{x}+\ln x\right)dx=\int\frac{2\ln x}{x}\,dx+\int \ln x\,dx \Rightarrow$

$\int\frac{2\ln x}{x}dx$: $\ln x = t \Rightarrow \frac{1}{x}dx = dt \Rightarrow dx = x\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{2t}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,dt = \int 2t\,dt = t^2 = (\ln x)^2$

$\int \ln x\,dx$: $u=\ln x,\ dv = dx \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx,\ v = x \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \ln x\,dx = \ln x\cdot x - \int x\cdot\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x$

En conclusión $I = (\ln x)^2 + x\cdot\ln x - x + C$

e) $\int 3\sqrt{2x+1}\,dx$: $2x+1 = t^2 \Rightarrow 2\,dx = 2t\,dt \Rightarrow dx = t\,dt \Rightarrow$

$\Rightarrow \int 3\cdot t\cdot t\cdot dt = 3\int t^2\cdot dt = 3\cdot\frac{t^3}{3} = t^3 = \left(\sqrt{2x+1}\right)^3 + C$

3º a) Teoría

b) $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en un punto si $f(x)=g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow H(x) = f(x) - g(x) = 0$ tiene alguna solución:

$H(x)$ es continua y derivable por ser suma de funciones continuas y derivables. $H(x) = \ln(1+x^2) - 1$

$H(0) = -1 < 0$
$H(2) = \ln 5 - 1 > 0$

Aplicando el teorema de Bolzano a la función $H(x)$ en el intervalo $[0,2]$:

$\exists\, c\in(0,2) : H(c) = 0 \Leftrightarrow \exists\, c \in (0,2) : f(c) = g(c).$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en $c\in(0,2)$.

(4°) Dominio $f(x)$: $\mathbb{R}^+$. $\qquad f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e.$$

Signo $f'(x)$:

$f'>0$ $\quad$ $f'<0$

$0 \quad \nearrow \quad e \quad \searrow \quad \infty$

Crece $(0,e)$; decrece (e,∞) $\qquad$ En $x=e$ se alcanza un máximo $\left(e, \frac{1}{e}\right)$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4} = \frac{x\left[-1-2(1-\ln x)\right]}{x^{\cancel{4}}}$$

$$f''(x) = \frac{-1-2+2\ln x}{x^{3}} = \frac{-3+2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow -3+2\ln x = 0$$

$$\Rightarrow 2\ln x = 3 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = e^{3/2} = \sqrt{e^3} = e\cdot\sqrt{e}.$$

Concavidad:

$f''<0$ $\quad$ $f''>0$

$0 \quad (-) \quad \sqrt{e^3} \quad (+) \quad \infty$

Convexa: $(0, \sqrt{e^3})$ $\qquad$ Cóncava $(\sqrt{e^3}, \infty)$ $\qquad$ P.I en $x = \sqrt{e^3}$

(5°) $f(x) = \begin{cases} x^2-bx+c & x\leq 0 \\ ae^x & x>0 \end{cases}$ $\qquad$ Para $x\neq 0$ es continua y derivable.

Para $x=0$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) \Leftrightarrow$

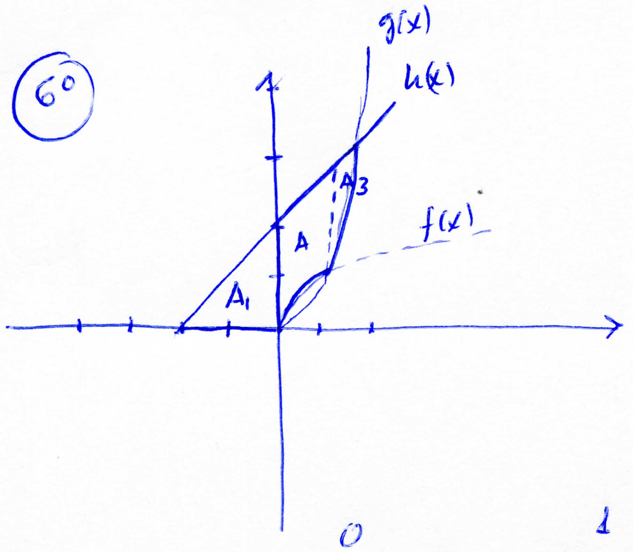
$\Leftrightarrow$ $\boxed{c=a}$ $\qquad$ Para este caso: $f'(0)^- = (2x-b)_{x=0} = -b$

$f'(0)^+ = (ae^x)_{x=0} = a \quad \Rightarrow \quad \boxed{-b=a}$

como la recta tangente en $x=-2$ debe tener pendiente 2:

$$f'(-2)=2 \iff f'(-2)=(2x-b)_{x=-2}=\boxed{-4-b=2} \Rightarrow \boxed{b=-6,\ a=6,\ c=6}$$

60



$f(x)=g(x) \Rightarrow x=1$

$g(x)=h(x) \Rightarrow x=2$

$h(x)=$ eje $X \Rightarrow x=-2$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{0}(x+2)\,dx + \int_{0}^{1}\left[(x+2)-\sqrt{x}\right]dx + \int_{1}^{2}\left[(x+2)-x^2\right]dx =$$

$$= 2 + \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

es un triángulo

$$= 2+\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=\frac{12+11+7}{6}=\frac{30}{6}=5\ u^2$$