Problema 1 Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$

Problema 2 Calcular el valor positivo de a para que $\displaystyle\int_0^{a-1} (x+1)\, dx = \frac{9}{2}$.

Obtener razonadamente el valor de la integral que da el área de la superficie comprendida entre el eje OX, la curva $y = x + 1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Problema 3 Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{x + \sqrt{x}}{x^2}\, dx$

Problema 4 Sea la función $f(x) = \dfrac{6x}{x^2 + 1}$ se pide:

1. encontrar una función primitiva de f.
2. Calcular el área encerada entre f y el eje de abcisas para $x \in [2, 5]$.

Problema 5 Sea la integral $\displaystyle\int e^{2x} \sin e^x\, dx$

1. Intégrala mediante el cambio $t = e^x$
2. Calcula la constante de integración para que la función pase por el origen de coordenadas.

Problema 1 Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,dx = \frac{-1}{2\sin^2 x} + C$$

Problema 2 Calcular el valor positivo de a para que $\displaystyle\int_0^{a-1} (x+1)\,dx = \frac{9}{2}$.

Obtener razonadamente el valor de la integral que da el área de la superficie comprendida entre el eje OX, la curva $y = x+1$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

$$\int_0^{a-1} (x+1)\,dx = \frac{a^2-1}{2} = \frac{9}{2} \Longrightarrow a = \pm\sqrt{10}$$

$$A = \int_0^2 (x+1)\,dx = \left.\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = 4$$

Problema 3 Calcula la integral $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$

Solución:

$$\int \frac{x+\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \ln|x| - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

Problema 4 Sea la función $f(x) = \dfrac{6x}{x^2+1}$ se pide:

1. encontrar una función primitiva de f.
2. Calcular el área encerada entre f y el eje de abcisas para $x \in [2,5]$.

Solución:

1. $\displaystyle\int \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\ln|x^2+1| + C$
2. $\displaystyle\int_2^5 \frac{6x}{x^2+1}\,dx = 3\ln|x^2+1|\Big]_2^5 = 4,946$

Problema 5 Sea la integral $\int e^{2x} \sin e^x \, dx$

1. Intégrala mediante el cambio $t = e^x$
2. Calcula la constante de integración para que la función pase por el origen de coordenadas.

Solución:

1. $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t} \Longrightarrow \int e^{2x} \sin e^x \, dx = \int t \sin t \, dt$, integral que resolvemos por partes, $u = t \Longrightarrow du = dt$ y $dv = \int \sin t \, dt \Longrightarrow v = -\cos t$

$$\int t \sin t \, dt = -t \cos t + \int \cos t \, dt = -t \cos t + \sin t + C$$

$$\int e^{2x} \sin e^x \, dx = -e^x \cos e^x + \sin e^x + C$$

2. $-cos 1 + \sin 1 + C = 0 \Longrightarrow C = \cos 1 - \sin 1$