Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato

1. **[2 puntos]** Resuelve la siguiente integral: $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}\,dx$.

2. **[2 puntos]** Averiguar para qué valores del parámetro *k*, la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & k & 3 \\ 4 & 1 & -k \end{pmatrix}$ no tiene inversa.

   Calcula, si es posible, la inversa de la matriz *A* para $k=2$.

3. **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz $M=\begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro *k*.

   Supongamos que *k* se sustituye por el valor para el que el rango de *M* no es tres, ¿cuál es el sistema de ecuaciones asociado a la matriz *M*? ¿Crees que tiene solución?

4. **[2,5 puntos]** Despeja la matriz X en la ecuación $XA^2-B=X$. Halla la matriz *X* sabiendo que:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

5. **[2 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=7$, <u>usa las propiedades de los determinantes</u> para calcular el valor de los dos siguientes: $\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix}$.

Soluciones

1. $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx$. La factorización del polinomio x^3+x^2 es $x^2(x+1)$. Descompongamos pues la fracción $\frac{x+2}{x^3+x^2}=\frac{x+2}{x^2(x+1)}$ en fracciones simples. $\frac{x+2}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}=\frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$

   Igualando los numeradores: $x+2=Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2$.

   Si $x=0$, tenemos que $B=2$. Si $x=-1$, tenemos que $C=1$. Si $x=1$ tenemos que $3=2A+4+1\Rightarrow A=-1$

   Entonces $\frac{x+2}{x^2(x+1)}=\frac{-1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x+1}$, es decir: $\int \frac{x+2}{x^3+x^2}dx=-\ln x-\frac{2}{x}+\ln(x+1)+C=\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{2}{x}+C$

2. A no tiene inversa si, y sólo si, $|A|=0$. Pero $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & k & 3\\ 4 & 1 & -k\end{vmatrix}=-k^2-(-4k+3)=-k^2+4k-3$. Las soluciones de $-k^2+4k-3=0$ son $k=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2\cdot(-1)}=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{-2}=\frac{-4\pm 2}{-2}=\begin{cases}x_1=1\\ x_2=3\end{cases}$. Por tanto, para los dos valores anteriores la matriz A no tiene inversa.

   Si $k=2$ la matriz es $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & -2\end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A|=1$. Calculemos la matriz adjunta de A:

   $A^d=\begin{pmatrix}-7 & 12 & -8\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}$. Entonces $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-7 & -1 & 2\\ 12 & 2 & -3\\ -8 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

3. Aplicando el método de Gauss tenemos: $\begin{pmatrix}1 & -k & 3 & -2\\ -3 & 6 & -9 & 6\\ k & -4 & 6 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ f_2+3f_1\\ f_3-kf_1\end{matrix}\begin{pmatrix}1 & -k & 3 & -2\\ 0 & 6-3k & 0 & 0\\ 0 & -4+k^2 & 6-3k & -4+2k\end{pmatrix}$

   Es fácil darse cuenta ahora que si $k=2$ la segunda y la tercera fila se anulan y que si $k\neq 2$ las tres filas son distintas de cero. Por tanto tenemos que $\begin{cases}r(M)=1\Leftrightarrow k=2\\ r(M)=3\Leftrightarrow k\neq 2\end{cases}$

   Si $k=2$ la matriz toma la siguiente forma $M=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -2\\ -3 & 6 & -9 & 6\\ 2 & -4 & 6 & -4\end{pmatrix}$, matriz que, al aplicar el método de Gauss como hemos hecho antes se convierte en $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, cuyo sistema asociado tiene solamente una ecuación: $x-2y+3z=-2$ (un plano). Este sistema tiene infinitas soluciones (los infinitos puntos del plano), pues si damos valores cualesquiera tanto a y como a z, por ejemplo, $y=a$, $z=b$ tenemos que $x=2a-3b-2$ y las infinitas soluciones son el conjunto $\{(2a-3b-2,\ a,\ b):a,\ b\in\mathbb{R}\}$.

4. $XA^2 - B = X \Rightarrow XA^2 - X = B \Rightarrow X\left(A^2 - I\right) = B \Rightarrow X\left(A^2 - I\right)\left(A^2 - I\right)^{-1} = B\left(A^2 - I\right)^{-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow X \cdot I = B\left(A^2 - I\right)^{-1} \Rightarrow X = B\left(A^2 - I\right)^{-1}$

Si ahora llamamos $C = A^2 - I$ tenemos que $X = BC^{-1}$. Para hallar X tenemos que calcular previamente la inversa de la matriz C.

$$C = A^2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

El determinante de C es $|C| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (8-1) - (-2-2) = 11$

$$C^d = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix} \; ; \; C^{-1} = \frac{1}{|C|}\left(C^d\right)^t = \frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = BC^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} & -\frac{5}{11} \\ \frac{5}{11} & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} \\ -\frac{1}{11} & -\frac{4}{11} & -\frac{2}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5. $$\begin{vmatrix} a+2x & b+2y & c+2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \\ 2x+p & 2y+q & 2z+r \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ p & q & r \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ p & q & r \\ p & q & r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2 \cdot 7 = 14$$

$$\begin{vmatrix} -b & c+b & 5a \\ -q & r+q & 5p \\ -y & z+y & 5x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b & c & 5a \\ -q & r & 5p \\ -y & z & 5x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -b & b & 5a \\ -q & q & 5p \\ -y & y & 5x \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} b & c & a \\ q & r & p \\ y & z & x \end{vmatrix} + 0 = \text{[dos cambios en las columnas]}$$

$$= -5 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5 \cdot 7 = -35$$