

## GLOBAL ANÁLISIS

1) Halla el valor de  $a$  para que la función  $f$  sea continua en todo  $\mathbb{R}$ . (1,5 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x \end{cases}$$

Representa gráficamente la función (para ese valor de  $a$ )

2) Calcula las siguientes derivadas:

(3 puntos)

a)  $y = (x^2 + 2) \cdot 2^{1-3x}$

b)  $y = \ln\left(\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}\right)$

c)  $y = \sqrt{\cos x - \operatorname{sen} x}$

d)  $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$

3) Haz un estudio lo más completo posible de la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$  y represéntala gráficamente. (2 puntos)

4) Halla razonadamente un punto de la función  $y = x^2 + x + 1$  en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación  $y = 3x + 7$ . Halla también la ecuación de dicha recta tangente. (1,5 puntos)

5) Halla las asíntotas de la función  $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$  y estudia su continuidad. (2 puntos)

## SOLUCIONES

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & \text{si } x \leq -1 \rightarrow \text{CONTINUA en } (-\infty, -1) \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x \rightarrow \text{CONTINUA en } (-1, +\infty) \end{cases}$$

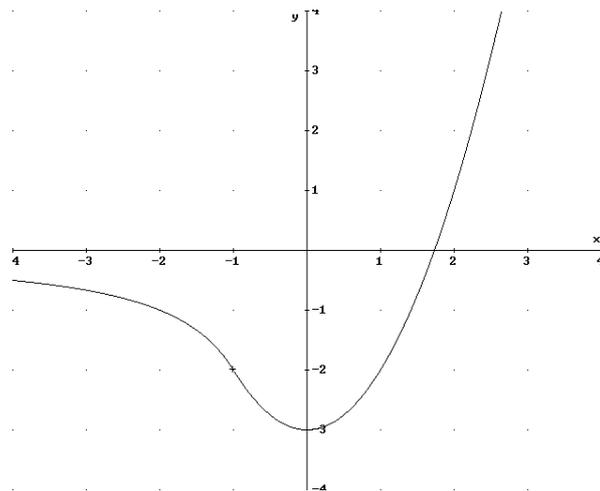
Sólo nos falta que sea continua en  $x = -1$ , para lo cual, tienen que coincidir:

- $f(-1) = \frac{a}{-1} = -a$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{a}{x} = -a \quad -a = -2 \Rightarrow a = 2$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 3) = -2$

$$\text{Gráfica de } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x \leq -1 \rightarrow \text{trozo de hipérbola} \\ x^2 - 3 & \text{si } -1 < x \rightarrow \text{trozo de parábola} \end{cases}$$

Parábola con vértice en  $(0, -3)$  y cortando al eje OX en  $\sqrt{3}$

Hipérbola con asíntotas los ejes de coordenadas



$$2) a) y = (x^2 + 2) \cdot 2^{1-3x}$$

$$y' = 2x \cdot 2^{1-3x} + (x^2 + 2) \cdot 2^{1-3x} \cdot \ln 2 \cdot (-3) \rightarrow y' = [2x - 3(x^2 + 2) \ln 2] 2^{1-3x}$$

$$b) y = \ln \left( \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} \right) \rightarrow y' = \frac{1}{\frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}} \cdot \frac{e^{-x}(1 + e^{-x}) - (1 - e^{-x})(-e^{-x})}{(1 + e^{-x})^2} = \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-2x}}$$

$$c) y = \sqrt{\cos x - \sin x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x - \sin x}} \cdot (-\sin x - \cos x) = \frac{-\sin x - \cos x}{2\sqrt{\cos x - \sin x}}$$

$$d) y = \arctg \sqrt{x+1} \rightarrow y' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x+1})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(2+x)\sqrt{x+1}}$$

$$3) f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} \quad \text{Asíntotas: Verticales: } x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad x = 2 \text{ A.V. de ramas divergentes}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases} \quad x = -2 \text{ A.V. de ramas divergentes}$$

Horizontales:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$  y también  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$

Asíntota horizontal  $y = 1$ , veamos si la gráfica está por encima o por debajo:

Para  $x = 1000 \rightarrow \frac{1000^2}{1000^2 - 4} > 1$       para  $x = -1000 \rightarrow \frac{(-1000)^2}{(-1000)^2 - 4} > 1$

Luego en ambos lados está por encima

**Puntos de corte con los ejes:**

Para  $y = 0$

$$\frac{x^2}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x = 0$$

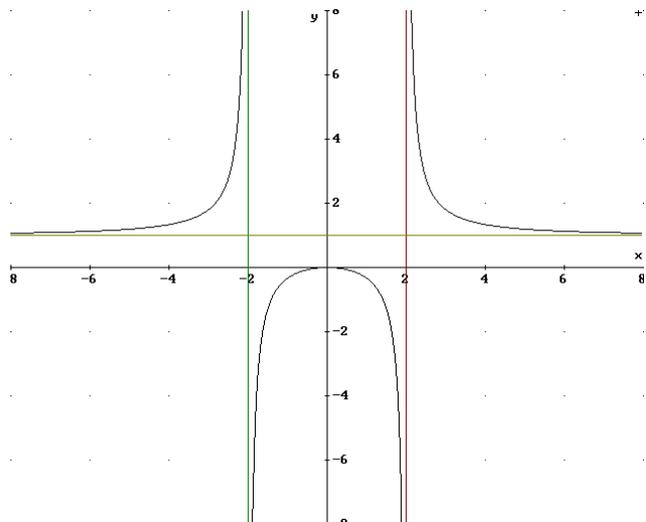
Para  $x = 0 \rightarrow y = 0$

**Puntos singulares:**

$$y' = \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y' = \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} = 0 \Rightarrow -8x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\rightarrow (0,0)$ , vemos que es un máximo.



4) Halla razonadamente un punto de la función  $y = x^2 + x + 1$  en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación  $y = 3x + 7$ . Halla también la ecuación de dicha recta tangente.

$y' = 2x + 1 = m = 3$  (paralela, misma pendiente)

$2x + 1 = 3 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$  el punto es el (1,3)

Recta tangente en el punto (1,3):  $y = 3(x - 1) + 3 \rightarrow y = 3x$

5)  $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$ , esta función es una función racional, continua en su dominio que es  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ , veamos que tipo de discontinuidad hay en esos dos puntos:

En  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^2 - 5x + 6)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

En  $x = 2$  tiene, por lo tanto, una discontinuidad evitable, ya que existe el límite en el punto, aunque la función no está definida en el mismo.

En  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} = \frac{-8 - 20 - 12}{0} = \frac{-40}{0} = \pm\infty$$

luego, en  $x = -2$ , tiene una discontinuidad de salto infinito, o más claro, una asíntota vertical de ramas divergentes.

También tiene una asíntota oblicua  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^3 - 4x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^3 - 5x^2 + 6x - x^3 + 4x}{x^2 - 4} \right] = -5$$

La asíntota oblicua es:  $y = x - 5$