VECTORES

Efectúa las siguientes operaciones:

a) $(5, -3) + (2, -4)$ c) $5(3, -1) + (-1, 4)$ e) $\frac{1}{2}(7, 4) + (1, 2)$ g) $-(3, 6) + \frac{3}{2}(-2, -1)$

b) $(6, 4) - (7, -2)$ d) $-3(0, 1) + \frac{1}{3}(0, 3)$ f) $-4(2, -1) + 6(4, -1)$ h) $-(5, 3) - (-2, -2)$

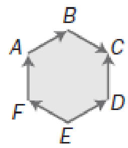
a) $(7, -7)$ c) $(15, -5) + (-1, 4) = (14, -1)$ e) $\left(\frac{7}{2}, 2\right) + (1, 2) = \left(\frac{9}{2}, 4\right)$ g) $(-3, -6) + \left(-3, -\frac{3}{2}\right) = \left(-6, -\frac{15}{2}\right)$

b) $(-1, 6)$ d) $(0, -3) + (0, 1) = (0, -2)$ f) $(-8, 4) + (24, -6) = (16, -2)$ h) $(-5, -3) + (2, 2) = (-3, -1)$

En el hexágono regular de la figura, indica qué vectores son equipolentes.

Son equipolentes $\vec{AB} \sim \vec{ED}$ y $\vec{FA} \sim \vec{DC}$.

En cambio, los vectores BC y EF son opuestos.



Contesta verdadero o falso y razona la contestación:

a) Si dos vectores fijos tienen el mismo módulo y dirección, determinan el mismo vector libre.

b) Dos vectores fijos son equipolentes si tienen el mismo módulo, sentido y sus rectas soportes son paralelas.

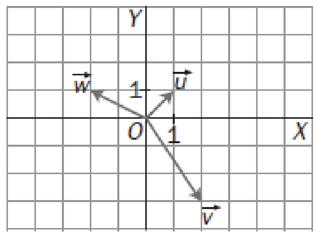
a) Falso, tienen que tener también el mismo sentido.

b) Cierto, ya que las rectas paralelas indican la misma dirección.

A partir de los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ representados en la figura, calcula:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $-\vec{u} + 2\,\vec{w}$

b) $3\,\vec{v}$ d) $2\,[\vec{u} + \vec{v}] - 3\,\vec{w}$



De la figura: $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (2, -3)$ y $\vec{w} = (-2, 1)$; por tanto:

a) $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1) + (2, -3) = (3, -2)$

b) $3\,\vec{v} = (6, -9)$

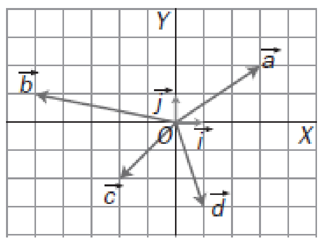
c) $-\vec{u} + 2\,\vec{w} = (-1, -1) + (-4, 2) = (-5, 1)$

d) $2\,[\vec{u} + \vec{v}] - 3\,\vec{w} = (6, -4) + (6, -3) = (12, -7)$

Expresa los vectores de la figura como combinación lineal de los vectores de la base canónica.

$\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ $\vec{c} = -2\vec{i} - 2\vec{j}$

$\vec{b} = -5\vec{i} + \vec{j}$ $\vec{d} = \vec{i} - 3\vec{j}$



. Un vector libre tiene por coordenadas $\vec{u} = (-4, 1)$. Un representante suyo tiene el punto $A(2, 5)$ como origen. Halla las coordenadas del extremo.

Si $\vec{a} = (2, 5)$ y $\vec{b} = (x, y)$ son los vectores que unen el origen de coordenadas con los extremos A y B del representante del vector $\vec{u}$, se cumple que $\vec{a} + \vec{u} = \vec{b}$. Por tanto, $(2, 5) + (-4, 1) = (-2, 6) = (x, y)$, es decir, las coordenadas del extremo B son $B(-2, 6)$.

. Un vector tiene por extremos los puntos $A(-7, 5)$ y $B(3, -2)$. Calcula las coordenadas del vector $\vec{AB}$.

Sea $\vec{a} = (-7, 5)$ y $\vec{b} = (3, -2)$. Se tiene que $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = (3, -2) - (-7, 5) = (10, -7)$.

Dados los vectores: $\vec{u} = (-4, 2)$, $\vec{v} = (0, -3)$ y $\vec{w} = (-3, 3)$. Halla:

a) $\vec{u} + \vec{v}$ c) $5\vec{u} - 3\vec{v}$ e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ g) $|\vec{u}|, |\vec{v}|, |\vec{u} + \vec{v}|$

b) $4\vec{u}$ d) $-2\vec{v}$ f) $3\vec{u} - (5\vec{v} + \vec{w})$ h) $\vec{u} + (2\vec{v} + 3\vec{w})$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (-4, 2) + (0, -3) = (-4, -1)$

b) $4\vec{u} = 4(-4, 2) = (-16, 8)$

c) $5\vec{u} - 3\vec{v} = 5(-4, 2) - 3(0, -3) = (-20, 10) + (0, 9) = (-20, 19)$

d) $-2\vec{v} = -2(0, -3) = (0, 6)$

e) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (-4, 2) + (0, -3) + (-3, 3) = (-7, 2)$

f) $3\vec{u} - (5\vec{v} + \vec{w}) = 3(-4, 2) - [5(0, -3) + (-3, 3)] = (-12, 6) - (-3, -12) = (-9, 18)$

g) $|\vec{u}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; $|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$; $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u} + \vec{v}| = |(-4, -1)| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$

h) $\vec{u} + (-\vec{v} + 3\vec{w}) = (-4, 2) + [-(0, -3) + 3(-3, 3)] = (-4, 2) + (-9, 12) = (-13, 14)$

. Un vector fijo tiene su origen en el punto $A(6, -2)$, y sus coordenadas son $(4, 5)$. Halla las coordenadas de su extremo B.

Sea $\vec{a} = (6, -2)$ y $\vec{b} = (x, y)$. Como $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \Rightarrow (x, y) - (6, -2) = (4, 5)$, se tiene que $(x, y) = (4, 5) + (6, -2) = (10, 3)$.
Por tanto, las coordenadas del extremo son $B(10, 3)$.

. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 1)$ y $\vec{v} = (3, 5)$ referidos a la base canónica, calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$

c) Ángulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d) Un vector ortogonal a $\vec{v}$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2, 1) \cdot (3, 5) = -6 + 5 = -1$

b) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{34}} = -\dfrac{\sqrt{34}}{34}$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{34}} = \dfrac{-1}{\sqrt{170}} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\dfrac{-1}{\sqrt{170}}\right) = 94° \ 23' \ 55{,}3''$

d) Por ejemplo, el vector $\vec{w} = (-5, 3)$ es ortogonal a $\vec{v}$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{w} = (3, 5) \cdot (-5, 3) = 3(-5) + 5 \cdot 3 = 0$.

. Determina el valor de m para que el producto escalar de $\vec{v}$ por $\vec{w}$ sea:

a) Igual a 4, siendo $\vec{v} = (m, 1)$ y $\vec{w} = (2, -3)$.

b) Igual a -2, siendo $\vec{v} = (m, 2)$ y $\vec{w} = (3, m)$.

c) Igual a -3, siendo $\vec{v} = (m, -3)$ y $\vec{w} = (m, 4)$.

d) Igual a 0, siendo $\vec{v} = (3, m)$ y $\vec{w} = (-m, m)$.

a) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (m, 1) \cdot (2, -3) = 2m - 3 = 4 \Rightarrow 2m = 7 \Rightarrow m = \dfrac{7}{2}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (m, 2) \cdot (3, m) = 3m + 2m = -2 \Rightarrow 5m = -2 \Rightarrow m = -\dfrac{2}{5}$

c) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (m, -3) \cdot (m, 4) = m^2 - 12 = -3 \Rightarrow m^2 = 9 \Rightarrow m = \pm 3$

d) $\vec{v} \cdot \vec{w} = (3, m) \cdot (-m, m) = -3m + m^2 = 0 \Rightarrow m(m - 3) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 3$

. Expresa el vector $\vec{u} = (-5, 3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (-1, 0)$ y $\vec{w} = (3, 4)$.

Se trata de encontrar a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

Por tanto, ha de ser $(-5, 3) = a(-1, 0) + b(3, 4) \Rightarrow (-5, 3) = (-a + 3b, 4b) \Rightarrow \begin{cases} -a + 3b = -5 \\ 4b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = \dfrac{29}{4} \end{cases}$

Por tanto, $\vec{u} = \dfrac{29}{4}\vec{v} + \dfrac{3}{4}\vec{w}$

Halla los valores de a y b para que $\vec{u} = (-3, 5)$ se pueda expresar como la siguiente combinación lineal de los vectores $\vec{v} = (2, 0)$ y $\vec{w} = (-7, 3)$:

$\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$

Se trata de encontrar a y b tales que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w} \Rightarrow (-3, 5) = a(2, 0) + b(-7, 3) = (2a - 7b, 3b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2a - 7b = -3 \\ 3b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{3} \\ b = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

a) Comprueba si el vector $\vec{u} = (-\cos a, \text{sen } a)$ es unitario.

b) Elige un vector unitario y ortogonal al vector $\vec{u}$. ¿Es único?

a) $|\vec{u}| = \sqrt{(-\cos a)^2 + (\text{sen } a)^2} = \sqrt{\cos^2 a + \text{sen}^2 a} = 1$. Por tanto, el vector $\vec{u}$ es unitario.

b) Un posible vector unitario y ortogonal a $\vec{u}$ es el vector $\vec{v} = (\text{sen } a, \cos a)$, ya que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y además $|\vec{v}| = 1$.

No es el único vector que cumple las condiciones anteriores, también las cumple el vector $\vec{w} = (-\text{sen } a, -\cos a)$.

Calcula las coordenadas del vector $\vec{u}$, sabiendo que se verifica: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ y $\vec{u} \cdot \vec{w} = 2$, siendo $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{w} = (2, -3)$.

Sea $\vec{u} = (x, y)$. Del enunciado se deduce:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (x, y) \cdot (3, -4) = 3x - 4y = 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = 2 \Rightarrow (x, y)\,(2, -3) = 2x - 3y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -8,\ y = -6.$$

Por tanto, el vector es $\vec{u} = (-8, -6)$.

Dados los vectores $\vec{u} = (3, 4)$ y $\vec{v} = (4, 3)$, halla:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $|\vec{u}|$ y $|\vec{v}|$

c) El ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

d) La proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

e) Un vector unitario en la dirección de $\vec{v}$ sentido opuesto.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (3, 4) \cdot (4, 3) = 12 + 12 = 24$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ y $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} = \dfrac{24}{25} \Rightarrow (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \arccos\left(\dfrac{24}{25}\right) = 16°\ 15'\ 36{,}74''$

d) Proyección de $\vec{u}$ sobre $\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \dfrac{24}{5}$

e) El vector $-\dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ es unitario y tiene la dirección de $\vec{v}$ y el sentido opuesto.

Calcula el valor de k para que el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (3, k)$ y $\vec{w} = (2, -1)$ sea:

a) 90° b) 0° c) 45° d) 60°

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (3, k) \cdot (2, -1) = 6 - k$; $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + k^2} = \sqrt{9 + k^2}$; $|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

a) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 90°$, se tiene que $0 = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}|\,|\vec{w}|} = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 6 - k = 0 \Rightarrow k = 6$

b) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 0°$, se tiene que $1 = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 4k^2 - 2k - 9 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{2}}{2}$

c) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 45°$, se tiene que $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow 6k^2 + 48k - 54 = 0 \Rightarrow k = 1$ o $k = -9$

d) Como $(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = 60°$, se tiene que $\dfrac{1}{2} = \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \dfrac{6 - k}{\sqrt{9 + k^2}\sqrt{5}} \Rightarrow k^2 - 99 = 0 \Rightarrow k = \pm 3\sqrt{11}$

. a) Halla el valor de k para que el vector $\vec{u} = (3, k)$ sea ortogonal al vector $\vec{v} = (-1, 4)$.

b) Halla el módulo de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Halla el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Por tanto, se tiene que $(3, k) \cdot (-1, 4) = -3 + 4k = 0 \Rightarrow k = \dfrac{3}{4}$.

b) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{3 + \sqrt{17}}{4}$; $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

c) Como son ortogonales, $(\vec{u}, \vec{v}) = 90°$.

Halla el valor de k para que el vector $\vec{u} = (k, 2)$ sea:

a) Unitario

b) Perpendicular al vector de coordenadas (2, 3)

a) El vector es unitario si su módulo es igual a 1. Luego:
$|\vec{u}| = \sqrt{k^2 + 4} = 1 \Rightarrow 4 + k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = -3 \Rightarrow$ no existe k real que haga el vector unitario.

b) Dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es 0. Luego:
$(k, 2) \cdot (2, 3) = 0 \Rightarrow 6 + 2k = 0 \Rightarrow k = -3$

Pon un contraejemplo para probar que de la igualdad $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ no se deduce que $\vec{v} = \vec{w}$.

Respuesta abierta, por ejemplo:
Sean $\vec{u} = (4, -1)$, $\vec{v} = (1, -2)$ y $\vec{w} = (2, 2)$. Se cumple que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 6$, pero $\vec{v} \neq \vec{w}$.

. Dado el triángulo de vértices $A(2, 3)$, $B(5, 2)$ y $C(7, 9)$:

a) Halla la medida de los lados.

b) Halla la medida de los ángulos.

a) Medida de los lados:

Lado $AB = |\overrightarrow{AB}| = |(5, 2) - (2, 3)| = |(3, -1)| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

Lado $BC = |\overrightarrow{BC}| = |(7, 9) - (5, 2)| = |(2, 7)| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$

Lado $CA = |\overrightarrow{CA}| = |(2, 3) - (7, 9)| = |(-5, -6)| = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{61}$

b) Medida de los ángulos:

$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = (-3, 1)$; $\overrightarrow{BC} = (7, 9) - (5, 2) = (2, 7)$

$$\cos\alpha = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\,|\overrightarrow{BC}|} = \frac{-6+7}{\sqrt{10}\sqrt{53}} = -\frac{1}{\sqrt{530}} \Rightarrow \alpha = 87^\circ\ 30'\ 37{,}61''$$

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$; $\overrightarrow{AC} = (7, 9) - (2, 3) = (5, 6)$

$$\cos\beta = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{15-6}{\sqrt{10}\sqrt{61}} = \frac{9}{\sqrt{610}} \Rightarrow \beta = 68^\circ\ 37'\ 45{,}76''$$

$\gamma = 180^\circ - 87^\circ\ 30'\ 37{,}61'' - 68^\circ\ 37'\ 45{,}76'' = 23^\circ\ 51'\ 36{,}63''$