

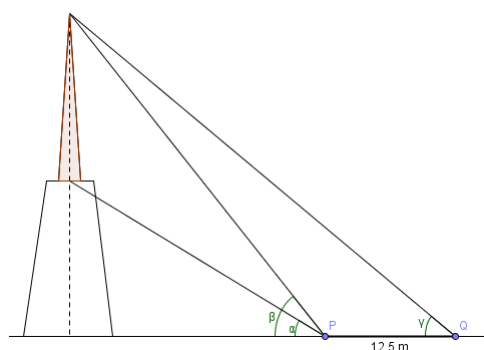
Nombre:

Duración: 55 minutos.

Los ejercicios deberán resolverse en folios aparte de la presente hoja, en la que únicamente se debe escribir el nombre y apellidos en el lugar habilitado para ello.

No está permitido el uso de fluido corrector o análogo. Igualmente no está permitido el uso de lápiz, goma ni bolígrafo con tinta deletable.

Está permitido el uso de calculadora. Sin embargo en todos los ejercicios se deben indicar y explicar los razonamientos usados para su resolución.



Ejercicio 1. (2 puntos)

Un repetidor de televisión se encuentra sobre una montaña y un observador se sitúa en los puntos P y Q de la figura de la izquierda.

Se conoce que la distancia $\overline{PQ} = 12,5$ metros, y que los ángulos indicados son, medidos en radianes, $\alpha = \frac{11\pi}{30}$,

$\beta = \frac{70\pi}{180}$ y $\gamma = \frac{67\pi}{180}$. Halle la altura del repetidor.

Ejercicio 2. (2 puntos)

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = 3$

b) $6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

Ejercicio 3. (2 puntos)

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

a)
$$\begin{cases} \tan(x+y) = \sqrt{3} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 4. (2 puntos)

Demuestre las siguientes igualdades:

a)
$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2\sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \sin \alpha - \tan \alpha$$

b)
$$\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

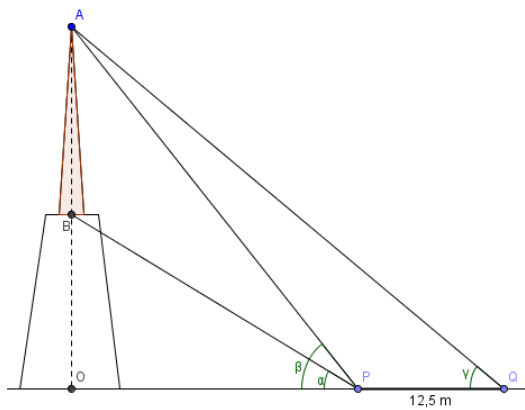
Ejercicio 5. (2 puntos)

Expresión de la diferencia de los cosenos de dos ángulos como producto. Demuéstrelo a partir de las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Ejercicio 1.

Un repetidor de televisión se encuentra sobre una montaña y un observador se sitúa en los puntos P y Q de la figura de la izquierda.

Se conoce que la distancia $\overline{PQ} = 12,5$ metros, y que los ángulos indicados son, medidos en radianes, $\alpha = \frac{11\pi}{30}$, $\beta = \frac{70\pi}{180}$ y $\gamma = \frac{67\pi}{180}$. Halle la altura del repetidor.



Resolución.

Llamemos A al punto más alto del repetidor. Entonces en el triángulo APQ podemos conocer todos los ángulos, ya que el ángulo en P es el suplementario de β , es decir, $\hat{P} = \pi - \frac{70\pi}{180} = \frac{11\pi}{18}$ radianes.

El ángulo en A será entonces $\hat{A} = \pi - \hat{P} - \gamma = \pi - \frac{11\pi}{18} - \frac{67\pi}{180} = \frac{180\pi}{180} - \frac{110\pi}{180} - \frac{67\pi}{180} = \frac{\pi}{60}$ rad.

Al conocer los tres ángulos y un lado, podemos aplicar el Teorema del Seno para hallar el lado AP :

$$\frac{PQ}{\sin \hat{A}} = \frac{AP}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{12,5}{\sin \hat{A}} = \frac{AP}{\sin \gamma} \Rightarrow AP = \frac{12,5 \cdot \sin \frac{67\pi}{180}}{\sin \frac{\pi}{60}}$$

Llamemos ahora B al punto más bajo del repetidor y O al punto más bajo de la montaña. En el triángulo ABP también podemos conocer los tres ángulos. Concretamente en el triángulo rectángulo OPB , el ángulo en B es el complementario de α , por lo que el ángulo en el mismo punto B dentro del triángulo ABP es igual a $\hat{B} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{11\pi}{30} = \frac{13\pi}{15}$ radianes.

En este mismo triángulo, el ángulo en el vértice P es el ángulo $\hat{P} = \beta - \alpha = \frac{70\pi}{180} - \frac{11\pi}{30} = \frac{\pi}{45}$ radianes. En el triángulo ABP conocemos entonces el ángulo $\hat{P}$, que es el opuesto a la altura AB del repetidor, y el ángulo $\hat{B}$, que es el opuesto al lado conocido AP .

Podemos por tanto, con estos datos, usar nuevamente el Teorema del Seno para este triángulo ABP :

$$\frac{AB}{\sin \hat{P}} = \frac{AP}{\sin \hat{B}} \Rightarrow AB = \frac{AP \cdot \sin \hat{P}}{\sin \hat{B}} = \frac{\frac{12,5 \cdot \sin \frac{67\pi}{180}}{\sin \frac{\pi}{60}} \cdot \sin \frac{\pi}{45}}{\sin \frac{13\pi}{15}} = \frac{12,5 \cdot \sin \frac{67\pi}{180} \cdot \sin \frac{\pi}{45}}{\sin \frac{\pi}{60} \cdot \sin \frac{13\pi}{15}}$$

Por tanto, $AB \cong 37,7057$ metros.

Ejercicio 2.

Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $3\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 3$

b) $6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

Resolución.

a) $3\operatorname{sen} x + \sqrt{3}\cos x = 3$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por $\frac{\sqrt{3}}{6}$, obtenemos:

$$\frac{3\sqrt{3}}{6}\operatorname{sen} x + \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{6}\cos x = \frac{3\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{6}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{o bien} \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}.$$

Nota: en el caso de no darnos cuenta de la transformación realizada en la ecuación, siempre se puede resolver como un sistema con incógnitas $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, añadiendo la ecuación $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$. Resolviendo dicho sistema obtenemos dos soluciones:

$$\left\{ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \text{ y } \left\{ \operatorname{sen} x = 1, \cos x = 0 \right\}$$

que, obviamente, conducen a las mismas soluciones de x dadas anteriormente.

b) $6\cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

Usando la fórmula del coseno del ángulo mitad, obtenemos que la ecuación la podemos escribir del siguiente modo:

$$6\left(\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2 + \cos x = 1 \Rightarrow 3(1+\cos x) + \cos x = 1 \Rightarrow 4\cos x = -2 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}.$$

Como el ángulo en el primer cuadrante con coseno igual a $\frac{1}{2}$ es $\frac{\pi}{3}$, los ángulos que verifican

la ecuación son $x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ y $x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 3.

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones en el intervalo $[0, 2\pi]$:

a) $\begin{cases} \tan(x+y) = \sqrt{3} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$

Resolución.

a) $\begin{cases} \tan(x+y) = \sqrt{3} \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Vamos a resolverlo en general y luego veremos cuáles son las soluciones en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Como $\tan(x+y) = \sqrt{3}$ y los ángulos en la primera vuelta con dicha tangente son $\frac{\pi}{3}$ y

$\frac{\pi}{3} + \pi$, entonces tenemos que, en general, $x+y = \frac{\pi}{3} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Además, $x+2y = \frac{\pi}{2}$, por lo que tenemos el sistema

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x+2y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Restando la primera ecuación a la segunda, obtenemos $y = \frac{\pi}{6} - k\pi$, y sustituyendo en la

primera ecuación, obtenemos $x + \frac{\pi}{6} - k\pi = \frac{\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

Por tanto, las soluciones son $\left\{ x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, y = \frac{\pi}{6} - k\pi \right\}$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Para que ambos valores estén en el intervalo $[0, 2\pi]$ debe ser, obviamente, $k = 0$, por lo que

la solución que nos solicitan es $\left\{ x = \frac{\pi}{6}, y = \frac{\pi}{6} \right\}$

$$\text{b) } \begin{cases} \sin x - \sin y = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases}$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos $2 \sin x = \sqrt{3} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ o $x = \frac{2\pi}{3}$ (dentro del intervalo $[0, 2\pi]$).

Sustituyendo en la segunda ecuación $\sin x$ por $\frac{\sqrt{3}}{2}$, obtenemos $\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2}$. Por tanto, en el intervalo $[0, 2\pi]$ los posibles valores de y son: $y = \frac{\pi}{6}$ o $y = \frac{5\pi}{6}$.

Las soluciones por tanto son:

$$\left(x = \frac{\pi}{3} \text{ o } x = \frac{2\pi}{3} \right) \text{ y } \left(y = \frac{\pi}{6} \text{ o } y = \frac{5\pi}{6} \right)$$

Ejercicio 4.

Demuestre las siguientes igualdades:

$$\text{a) } \frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \sin \alpha - \tan \alpha$$

$$\text{b) } \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

Resolución.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1 - \cos 2\alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} &= \frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{2 \sin^2 \alpha}{2 \sin \alpha} - \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} = \sin \alpha - \tan \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) &= (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)(\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha) = \\ &= (\sin \alpha \cos \beta)^2 - (\sin \beta \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \beta) - \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) = \\ &= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \beta + \sin^2 \beta \sin^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta \end{aligned}$$

Ejercicio 5.

Expresión de la diferencia de los cosenos de dos ángulos como producto. Demuéstrelo a partir de las fórmulas de las razones trigonométricas de la suma de dos ángulos.

Resolución.

$$\text{Dados dos ángulos } A \text{ y } B, \text{ se tiene que } \cos A - \cos B = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Demostración:

Sean A y B dos números reales. Tomemos los valores $\alpha = \frac{A+B}{2}$ y $\beta = \frac{A-B}{2}$.

Entonces $\alpha + \beta = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = \frac{2A}{2} = A$ y $\alpha - \beta = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = \frac{2B}{2} = B$.

Tenemos por tanto que:

$$\cos A = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos B = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Restando las dos igualdades obtenemos:

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \alpha \sin \beta = -2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right), \text{ como queríamos demostrar.}$$