

1.-Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

(2 puntos)

a) $9^{2x-1} + 5 = 8 \cdot 3^{2x-1}$

b) $4^{3x} = 5^{x-1}$

c) $e^{\ln 2x} = -\log_{\frac{1}{5}} 25$

2.- Resolver la ecuación logarítmica:

$$(x^2 - 4x + 7)\log 5 + \log 16 = 4$$

(1 punto)

3.-Hallar el **dominio** de definición de las siguientes funciones:

(2,5 puntos)

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 + x^2 - 2}{2 - x}}$

b) $f(x) = \frac{2x - 1}{\sqrt{x^5 + 2x^3}}$

c) $f(x) = \frac{2\ln(x^2 - 1) + x}{x - 3}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x + 4}}$

4.- Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$. Se pide:

(2 puntos)

a) Determinar $f^{-1}(x)$, comprobándola por un lado b) $(f \circ g)(x)$ y su dominio

5.- Resolver:

a) $|3 - 5x| \leq 2$

b) $|2 - 3x| = |5 - 2x|$

(1 punto)

6.- Resolver utilizando el método de Gauss, indicando el tipo de sistema del que se trate, e interpretándolo geométricamente:

(1.5 puntos)

a)
$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + z = -2 \\ x + 6y - z = -1 \end{cases}$$

b) Resolver el sistema, dando la interpretación geométrica que corresponda, haz un dibujo

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ 2x - y = -2 \\ -4x + 2y = 4 \end{array} \right\}$$

1.- Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales:

(2 puntos)

a) $9^{2x-1} + 5 = 8 \cdot 3^{2x-1}$

b) $4^{3x} = 5^{x-1}$

c) $e^{\ln 2x} = -\log_{\frac{1}{5}} 25$

(a) $9^{2x} \cdot 9^{-1} + 5 = 8 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} \Rightarrow \frac{3^{4x}}{9} + 5 - \frac{8}{3} \cdot 3^{2x} = 0$ $t = 3^{2x}$

$\frac{1}{9}t^2 - \frac{8}{3}t + 5 = 0 \Rightarrow t^2 - 24t + 45 = 0$

$t = \frac{24 \pm 20}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 22 \Rightarrow 3^{2x} = 22 \Rightarrow 2x \cdot \log 3 = \log 22 \Rightarrow x = \frac{\log 22}{2 \log 3} = \frac{\log 22}{\log 9} // \\ t = 2 \Rightarrow 3^{2x} = 2 \Rightarrow 2x \cdot \log 3 = \log 2 \Rightarrow x = \frac{\log 2}{2 \log 3} = \frac{\log 2}{\log 9} // \end{cases}$

(b) $\log 4^{3x} = \log 5^{x-1} \Rightarrow 3x \log 4 = (x-1) \log 5 \Rightarrow 3x \log 4 = x \log 5 - \log 5 \Rightarrow 3x \log 4 - x \log 5 = -\log 5 \Rightarrow x(3 \log 4 - \log 5) = -\log 5 \Rightarrow x = \frac{-\log 5}{3 \log 4 - \log 5} //$

(c) $\log_{\frac{1}{5}} 25 = x \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 \Rightarrow 5^{-x} = 5^2 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2.$
 $e^{\ln 2x} = -\log_{\frac{1}{5}} 25 \Rightarrow e^{\ln 2x} = +2 \Rightarrow \ln e^{\ln 2x} = \ln 2 \Rightarrow \ln 2x \cdot \overset{1}{\ln e} = \ln 2$
 $\Rightarrow \ln 2x = \ln 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 //$

2.- Resolver la ecuación logarítmica:

$(x^2 - 4x + 7) \log 5 + \log 16 = 4$

(1 punto)

$\log 5^{x^2-4x+7} + \log 16 = \log 10^4$

$\log 5^{x^2-4x+7} \cdot 16 = \log 10^4$

$5^{x^2-4x+7} \cdot 16 = 10^4$

$5^{x^2-4x+7} = \frac{2 \cdot 5^4}{2^4}$

$x^2 - 4x + 7 = 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$

$x_1 = 3 //$ válida

$x_2 = 1 //$ válida

3. -Hallar el **dominio** de definición de las siguientes funciones:

(2,5 puntos)

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 + x^2 - 2}{2-x}}$

b) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^5 + 2x^3}}$

c) $f(x) = \frac{2\ln(x^2-1)+x}{x-3}$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x+4}}$

(a) $\frac{x^4 + x^2 - 2}{2-x} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\text{sgn} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+2)}{(2-x)}}$

$x^4 + x^2 - 2 = 0 \Rightarrow t = x^2 \Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$
 $t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
 $t = -2 \Rightarrow x^2 = -2 \Rightarrow \text{no sol}$

$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -1] \cup [1, 2)$

(b) $x^5 + 2x^3 > 0 \Rightarrow x^3(x^2+2) > 0$ $\boxed{\text{sgn } x^3(x^2+2)}$

$\text{Dom } f(x) = [0, +\infty)$ ($x^2+2=0 \Rightarrow x^2=-2 \Rightarrow \text{no sol}$)

(c) $f(x) = \frac{2\ln(x^2-1)+x}{x-3}$ $\begin{cases} \ln & x^2-1 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{sgn} (x-1)(x+1)} \\ D & x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \end{cases}$

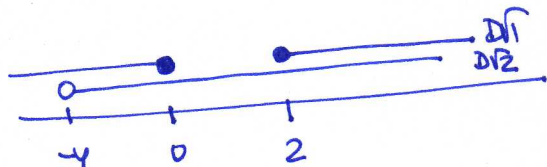
$D_{\ln} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$\text{Dom } f(x) = (-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x+4}}$ $\begin{cases} x(x-2) \geq 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$ $\boxed{\text{sgn } x(x-2)}$

$D_2 = [-4, +\infty)$

$\text{Dom } f(x) = [-4, 0] \cup [2, +\infty)$



4.- Dada la función $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$ y $g(x) = \frac{2}{x+1}$. Se pide:

(2 puntos)

a) Determinar $f^{-1}(x)$, comprobándola por un lado b) $(f \circ g)(x)$ y su dominio

$$(a) \quad y = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}} \Rightarrow y^2 = \frac{2-x}{x+1} \Rightarrow y^2(x+1) = 2-x \Rightarrow y^2x + y^2 = 2-x \Rightarrow y^2x + x = 2 - y^2 \Rightarrow x(y^2+1) = 2-y^2 \Rightarrow x = \frac{2-y^2}{y^2+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2-x^2}{x^2+1}$$

Comprobación: $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt{\frac{2-x}{x+1}}\right) = \frac{2 - \frac{2-x}{x+1}}{\frac{2-x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{2x+2-2+x}{x+1}}{\frac{2-x+x+1}{x+1}} = \frac{2x}{2} = x$$

$$(b) \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{2}{x+1}\right) = \sqrt{\frac{2 - \frac{2}{x+1}}{\frac{2}{x+1} + 1}} = \sqrt{\frac{\frac{2x+2-2}{x+1}}{\frac{2+x+1}{x+1}}} = \sqrt{\frac{2x}{3+x}}$$

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{2x}{3+x}}$$

Dom $(f \circ g)(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} Dg = \mathbb{R} - \{-1\} \\ Df \text{ real: } \frac{2x}{3+x} \geq 0 \Rightarrow \left[\frac{2x}{3+x} \right]_{-3}^{+\infty} = \frac{+}{-} = + \end{array} \right\}$ el $\rightarrow$ ya estaba pidiendo

$$D(f \circ g)(x) = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$$

5.- Resolver: a) $|3-5x| \leq 2$

b) $|2-3x| = |5-2x|$

(1 punto)

$$(a) \quad |3-5x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 3-5x \leq 2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3-5x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 5x \Rightarrow x \geq 1/5 \\ 3-5x \geq -2 \Rightarrow 5 \geq 5x \Rightarrow x \leq 1 \end{array} \right.$$

sol.: $x \in [1/5, 1]$

$$(b) \quad |2-3x| = |5-2x| \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{++} \\ \text{--} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 2-3x = 5-2x \Rightarrow x = -3 \\ 2-3x = -5+2x \Rightarrow 5x = 7 \Rightarrow x = 7/5 \end{array}$$

6.- Resolver utilizando el método de Gauss, indicando el tipo de sistema del que se trate, e interpretándolo geométricamente: (1.5 puntos)

a)
$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x + z = -2 \\ x + 6y - z = -1 \end{cases}$$

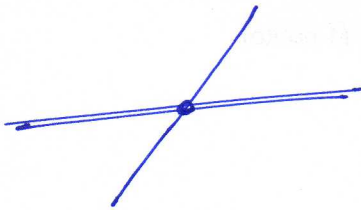
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{F}_3 + \text{F}_1]{\text{F}_2 + 2\text{F}_1} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{F}_3 - 2\text{F}_2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* Sistema Compatible Indeterminado, tiene infinitas soluciones, observando los coeficientes se no son proporcionales, son tres planos que se cortan en una recta. 

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 4y - z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{\lambda}{4} - \lambda - 1 = -1 - \frac{\lambda}{2} \\ y = \frac{\lambda}{4} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 - \lambda/2 \\ y = \lambda/4 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

(1) $\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} = \frac{-2}{4} \Rightarrow$ son las dos últimas rectas coincidentes.

* Luego las tres rectas se cortan en el punto $(-1, 0)$, siendo dos de ellas coincidentes



b) Resolver el sistema, dando la interpretación geométrica que corresponda, haz un dibujo

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = -2 \\ -4x + 2y = 4 \end{cases} \quad \text{Son tres rectas.}$$

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \quad \text{Resolvamos dos de ellas} \quad \begin{array}{r} -2x + 4y = 2 \\ 2x - y = -2 \\ \hline 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = -1 \end{array}$$

Punto de corte de las dos primeras rectas es $(-1, 0)$

Sustituimos en la otra: $+4 + 2 \cdot 0 = 4 \Rightarrow 4 = 4$ el punto pertenece también a la otra recta.

Al ver los coeficientes observamos que las dos últimas son proporcionales.

(1)