

Números complejos

Conjugado, opuesto, representaciones gráficas. Tipos de complejos

1. Clasificar los siguientes números complejos en reales e imaginarios. Para cada uno, cuál es la parte real y cuál la imaginaria. a) $(3i)$; b) $1/3-5/2 i$; c) $6/5$; d) $-3i$; e) $5i$; f) 0 ; g) i ; h) $(1/3)-i$.
2. Escribir tres números complejos imaginarios puros, tres números imaginarios y tres números reales.
3. Representar gráficamente los números complejos:
a) $(3+4i)$; b) -4 ; c) $-2i$; d) $(-2+3i)$; e) $(1+3i)$; f) $(6-i)$; g) -2 ; h) $3i$; g) $(-1+i)$.
4. Representar gráficamente el opuesto y el conjugado de:
a) $-3+5i$; b) $3-2i$; c) $1-2i$; d) $-2+i$; e) 6 ; f) $5i$; g) 3 ; h) $-4i$.
5. Indicar cuáles de los siguientes números son reales, imaginarios o complejos:
a) -9 ; b) $-3i$; c) $-3i+1$; d) $\sqrt{3}+(1/2)i$; e) $(1/3)i$; f) $\sqrt{2}$; g) $-2i$; h) $(1+3i)$. Sol: R, I, C, C, I, R, I, C
6. Representar gráficamente los afijos de todos los números complejos z tales que al sumarlos con su respectivo conjugado, se obtenga dos; es decir: $z + \bar{z} = 2$. Sol: recta $x=1$
7. Representar gráficamente los números complejos z tales que $z - \bar{z} = 2$. ¿Qué debe verificar z ? Sol: es imposible
8. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de a) $-2-i$; b) $1+i$; c) $3i$.
9. Escribir en forma trigonométrica y polar los complejos: a) $4+3i$; b) $-1+i$; c) $5-12i$.
Sol: a) $5_{36,87^\circ}$; b) $\sqrt{2}_{135^\circ}$; c) $13_{292,6^\circ}$
10. Escribir en las formas binómica y trigonométrica los números complejos: a) $3_{\pi/3}$; b) 3_{135° ; c) 1_{270° .
Sol: a) $3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 3/2 + 3\sqrt{3}/2 i$; b) $3(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) = -3\sqrt{2}/2 + 3\sqrt{2}/2 i$; c) $\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ = -i$
11. Calcular tres argumentos del número complejo $1-i$. Sol: a) 315° ; 675° ; 1035°
12. ¿Cuáles son el módulo y el argumento del conjugado de un número complejo cualquiera r_α ? Sol: $r_{360-\alpha}$.
13. Expresar en forma binómica y en forma polar el conjugado y el opuesto del número complejo: 6_{30° .
Sol: a) 6_{330° , $(3\sqrt{3} - 3i)$; b) 6_{210° , $(-3\sqrt{3} - 3i)$
14. Escribir en forma polar los números complejos: a) $6-8i$; b) $2 + \sqrt{14} i$; c) $-3+4i$. Sol: a) $10_{306,9^\circ}$; b) $4_{69,3^\circ}$; c) $5_{126,9^\circ}$
15. Escribir en forma binómica el complejo $R=2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$. Representarlo gráficamente. Sol: a) $\sqrt{2} + \sqrt{2} i$
16. El módulo de un número complejo es 5 y su argumento 600° . Escribir el número en forma trigonométrica. Sol: $5(\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$
17. ¿Qué argumento tiene el siguiente número complejo?: $4(3-2i)+5(-2+i)$. Sol: $303,7^\circ$

18. Averiguar cómo debe ser un complejo r_α para que sea:

a) un número real,

Sol: $\alpha=0+k\pi$

b) un número imaginario puro.

Sol: $\alpha=\pi/2+k\pi$

19. Escribir en forma polar: a) $1+\sqrt{3}i$; b) $-1+\sqrt{3}i$; c) $1-\sqrt{3}i$; d) $-1-\sqrt{3}i$; e) $3\sqrt{3}+3i$; f) $-3\sqrt{3}-3i$.

Sol: a) 2_{60° ; b) 2_{120° ; c) 2_{300° ; d) 2_{240° ; e) $\sqrt{6}_{30^\circ}$; f) $\sqrt{6}_{210^\circ}$

20. Escribir en forma binómica: a) 2_{60° ; b) $1_{(3\pi/2)}$; c) 5_{450° ; d) 2_{180° ; e) 4_{750° ; f) $6_{(\pi/3)}$.

Sol: a) $(1+\sqrt{3}i)$; b) $-i$; c) $5i$; d) -2 ; e) $(2\sqrt{3}+2i)$; f) $(3+3\sqrt{3}i)$

21. Escribir todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro (1,2) y radio 5.

Sol: $(5\cos\alpha+1, (5\sin\alpha+2)i)$

22. Escribir en forma polar y trigonométrica los números complejos:

a) $\sqrt{3}+3i$

Sol: a) $\sqrt{12}_{60^\circ}$, $\sqrt{12}(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)$

b) $1-i$

Sol: $\sqrt{2}_{225^\circ}$, $\sqrt{2}(\cos225^\circ+i\sin225^\circ)$

c) $2-2i$.

Sol: $2\sqrt{2}_{315^\circ}$, $2\sqrt{2}(\cos315^\circ+i\sin315^\circ)$

23. Escribir en forma binómica y trigonométrica los números complejos: a) $6_{\pi/3}$, b) 2_{45° , c) 2_{300° .

Sol: a) $6(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)=(3, 3\sqrt{3}i)$; b) $2(\cos45^\circ+i\sin45^\circ)=(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$; c) $2(\cos300^\circ+i\sin300^\circ)=1-\sqrt{3}i$

24. Representar gráficamente los opuestos y los conjugados de: a) $-3-i$; b) $1+i$; c) $+3i$.

25. Escribir en forma binómica: $6(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$.

Sol: $3\sqrt{3}-3i$

26. Hallar el módulo y el argumento de: a) $(1+i)/(1-i)$. b) $(1+i)(2i)$.

Sol: a) 1_{90° ; b) $\sqrt{8}_{135^\circ}$

27. ¿Qué figura representan en el plano los puntos que tienen de coordenadas polares 3_α , α variable? ¿y los que tienen ρ_{90° , ρ variable?.

Sol: a) circunferencia de centro (0,0) y radio 3; b) semieje OY positivo

28. Dado $z = \rho_\alpha$. Expresar en forma polar: a) $-z$, b) z^{-1} , c) el conjugado de z , d) z^3 .

Sol: a) $\rho_{180^\circ+\alpha}$; b) $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{-\alpha}$; c) $\rho_{-\alpha}$; d) $\rho^3_{3\alpha}$

Sumas, restas, productos, divisiones, mixtos

1. Efectuar las siguientes operaciones entre números complejos:

a) $(2+3i)+(4-i)$; b) $(3+3i) - (6+2i)$; c) $(3-2i) + (2+i) - 2(-2+i)$; d) $(2-i)-(5+3i) + (1/2)(4-4i)$.

Sol: a) $(6+2i)$; b) $(-3+i)$; c) $(9-3i)$; d) $-1-6i$

2. Multiplicar los siguientes números complejos:

a) $(1+2i)(3-2i)$; b) $(2+i)(5-2i)$; c) $(i+1)(3-2i)(2+2i)$; d) $3(2-i)(2+3i)i$. Sol: a) $7+4i$; b) $12+i$; c) $8+12i$; d) $-12+21i$

3. Efectuar las siguientes divisiones de números complejos:

a) $(2+i)/(1-2i)$; b) $(7-i)/(3+i)$; c) $(5+5i)/(3-i)$; d) $(3-i)/(2+i)$; e) $(18-i)/(3+4i)$. Sol: a) i ; b) $2-i$; c) $1+2i$; d) $1-i$; e) $2-3i$

4. Efectuar las siguientes operaciones y simplificar:

a) $5-3[3+(2/3)i]$; b) $[2i(-i+2)] / (1+i)$; c) $[(-2i)^2(1+3i)]/(4+4i)$; d) $[(1+3i)(1+2i)]/(1+i)$.

Sol: a) $-4-2i$; b) $3+i$; c) $-2-i$; d) $5i$

5. Dado el número complejo $z=2+2i$, calcular y representar: a) su conjugado (\bar{z}); b) la suma $z + \bar{z}$; c) el producto $z \cdot \bar{z}$.

Sol: a) $2-2i$; b) 4 ; c) 8

6. Calcular: a) $(3+i)(2+i)-(1-i)(2-2i)$; b) $(3-2i)+(1+2i)(6-2i)-(2-i)$; c) $(3+2i)+(2-4i)6$.

Sol: a) $(5+9i)$; b) $11+9i$; c) $15-22i$

7. Efectuar los siguientes productos y expresa el resultado en forma polar y binómica:

a) $(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)[2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)]$ b) $[2(\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ)] [3(\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ)]$
c) $[5(\cos 33^\circ + i \sin 33^\circ)]2_{57^\circ}$ d) $(2+2i)(1-i)$; e) $(3+4i)1_{180^\circ}$.

Sol: a) $2_{45^\circ} = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$; b) $6_{60^\circ} = 3\sqrt{3} + 3i$; c) $10_{90^\circ} = 10i$; d) $4_{90^\circ} = 4i$; e) $5_{233^\circ} = -3-4i$

8. Efectuar las operaciones: a) $1_{150^\circ}3_{30^\circ}$; b) $6_{60^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$; c) $2_{20^\circ}1_{30^\circ}2_{70^\circ}$; d) $6_{(2\pi/3)} \cdot 3_{90^\circ}$; e) $(5_{\pi/9})^9$; f) $(2+2i)^4$.

Sol: a) 3_{180° ; b) 3_{45° ; c) 4_{120° ; d) 2_{30° ; e) 59_{180° ; f) 64_{180°

9. Efectuar las operaciones: a) $2_{105^\circ}3_{85^\circ}$; b) $4_{65^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$; c) $5_{22^\circ}2_{28^\circ}1_{30^\circ}$; d) $4_{150^\circ} \cdot 2_{(\pi/2)}$; e) $(2_{20^\circ})^3$; f) $(3_{60^\circ})^4$

Sol: a) 6_{190° ; b) 2_{50° ; c) 10_{80° ; d) 2_{60° ; e) 8_{60° ; f) 81_{240°

10. Calcular el inverso de los números complejos siguientes y representar gráficamente el resultado:

a) $2_{(\pi/2)}$ b) $4i$ c) $-3+i$.

Sol: a) $(1/2)_{(\pi/2)}$; b) $-0,25i$; c) $(-3/10)_{-(1/10)i}$

11. ¿Cómo es gráficamente el inverso de un número complejo?. ¿Cuál es su módulo? ¿Y su argumento?

Sol: a) perpendicular; b) módulo $= (1/r)$, argumento $= -\alpha$

12. Simplificar las expresiones: a) $\frac{3_{45^\circ}2_{15^\circ}}{6_{30^\circ}}$, b) $\frac{2_{30^\circ}3_{60^\circ}}{3_{120^\circ}1_{300^\circ}}$, c) $\frac{2_{45^\circ}2_{15^\circ}}{4_{90^\circ}}$

Sol: a) 1_{30° ; b) 2_{30° ; c) 1_{330°

13. Efectuar algebraica y gráficamente las operaciones con números complejos:

a) $(3+2i)+(2-3i)$; b) $(-3+2i)+(-2-i)$; c) $(2-i)i$; d) $(-2+i)i$. Sol: a) $(5-i)$; b) $(-5+i)$; c) $(1+2i)$; d) $(-1-2i)$

14. Calcular los siguientes productos: a) $2(\cos 23^\circ + i \sin 23^\circ) \cdot 5(\cos 12^\circ + i \sin 12^\circ)$.

Sol: $10(\cos 35^\circ + i \sin 35^\circ)$

b) $(1+i)(2_{30^\circ})$. c) $2(\cos 18^\circ + i \sin 18^\circ)(3_{22^\circ})$. Sol: $(-1+\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})i$; c) 6_{40°

15. Resolver las ecuaciones: a) $x^3-27=0$

b) $x^5+32=0$. Sol: a) $x=3$; $x=3_{120^\circ}$; $x=3_{240^\circ}$; b) $2_{36^\circ+72^\circ k}$ $k=0,1,2,3,4$

16. Dados $z=(1,3)$, $w=(2,1)$ Hallar $z-w$; zw ; z^{-1} .

Sol: a) $-1+2i$; b) $-1+7i$; c) $(1/10)_{-(3/10)i}$

17. Dados $z=-1+3i$, $w=-2+i$. Calcular y representar

a) $z+w$; b) zw ; c) z^2 ; d) $z+\bar{w}$; e) z/w . Sol: a) $-3+4i$; b) $-1-7i$; c) $-8-6i$; d) $-3+2i$; e) $1-i$

18. Efectuar las siguientes operaciones: a) $6_{90^\circ} \sqrt{2}_{15^\circ}$. b) $8_{120^\circ}/4_{\pi/2}$.

Sol: a) $6\sqrt{2}_{105^\circ}$; b) 2_{30°

19. Hallar $\frac{i^{32} \cdot i^{17}}{i^{2} \cdot i^3}$

Sol: 1

20. Hallar el módulo de los complejos: a) $z=-2i(1+i)(-2-2i)(3)$; y b) $w = \frac{(2-i) \cdot (-1+2i)}{(1-i) \cdot (1+i)}$

Sol: a) 24; b) $5/2$

21. Representar gráficamente las sumas: a) $(-i)+(3-i)$; b) $(-2+i)+(3-2i)$.

- 22.** Representar gráficamente el número complejo $3-2i$. Aplicarle un giro de 90° alrededor del origen. ¿Cuál es el nuevo número complejo?. Multiplica ahora $3-2i$ por i . Sol: $2+3i$; $12+5i$
- 23.** Hallar el módulo de $z = \frac{2-4i}{4+2i}$. Sol: $|z|=1$

Ecuaciones

- 1.** Resolver las siguientes ecuaciones y determinar en qué campo numérico tienen solución:
a) $x^2+4=0$; b) $x^2-9=0$; c) $x^2+1=0$. Sol: a) $\pm 2i$; b) ± 3 ; c) $\pm i$
- 2.** Resolver las ecuaciones: a) $x^2-2x+5=0$; b) $x^2-6x+13=0$; c) $x^2-4x+5=0$. Sol: a) $1 \pm 2i$; b) $3 \pm 2i$; c) $2 \pm i$
- 3.** Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=2$ y la recta $y=x$. ¿Son soluciones reales o imaginarias?. Sol: reales: $(1,1)$, $(-1,-1)$
- 4.** Encontrar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y la recta $y=x-3$. ¿Son soluciones reales o imaginarias?. Sol: imaginarias $x=3/2 \pm (\sqrt{7}/2)i$
- 5.** ¿A qué campo numérico pertenecen las soluciones de estas ecuaciones?
a) $x^2-3x+2=0$ b) $x^2-2x+2=0$ c) $2x^2-7x+3=0$ d) $(x^2/2)+8=0$.
Sol: a) Real, $x=2$, $x=1$; b) Imaginaria $x=1 \pm i$; c) Real, $x=1/2$, $x=3$; d) Imaginaria, $x= \pm 4i$
- 6.** Calcular los puntos de intersección de la elipse $(x^2/4)+(y^2/9)=1$ con la recta $x=5$. Sol: $\pm 9/4 i$
- 7.** Resolver las ecuaciones siguientes indicando el campo numérico al que pertenecen las soluciones: a) $x^2-4=0$ b) $x^2-5=0$; c) $x^2+1=0$. Sol: a) ± 2 ; b) $\pm \sqrt{5}$; c) $\pm i$
- 8.** Resolver las ecuaciones: a) $x^2-10x+29=0$ b) $x^2-6x+10=0$ c) $x^2-4x+13=0$.
Sol: a) $5 \pm 2i$; b) $3 \pm i$; c) $2 \pm 3i$
- 9.** Representar gráficamente las raíces de las ecuaciones:
a) $x^2+4=0$ b) $x^2+1=0$ c) $x^2-9=0$ d) $x^2+9=0$. Sol: a) $\pm 2i$; b) $\pm i$; c) ± 3 ; d) $\pm 3i$
- 10.** Escribir una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $2+2i$ y $2-2i$.
(Recuerda: $x_1+x_2=(-b/a)$; $x_1 \cdot x_2=(c/a)$. Sol: $x^2-4x+8=0$
- 11.** Resolver la ecuación $x^3+27=0$. Representa gráficamente todas sus soluciones.
Sol: $x=3_{180^\circ}$, $x=3_{300^\circ}$, $x=3_{60^\circ}$
- 12.** Resolver la ecuación de segundo grado $x^2-2x+17=0$. Tiene dos raíces complejas. ¿Cómo son entre sí?. ¿Se puede generalizar el resultado?. Sol: a) $1 \pm 4i$; b) conjugadas; c) sí
- 13.** Resolver las ecuaciones: a) $x^3-8=0$; b) $x^5-32=0$; c) $x^4-81=0$; d) $x^3-1=0$.
Sol: a) $x=2_{120^\circ k}$ $k=0,1,2$; b) $x=2_{72^\circ k}$ $k=0,1,2,3,4$; c) $x= \pm 3$; $x= \pm 3i$; d) $x=1$, $x=1_{120^\circ}$, $x=1_{240^\circ}$

- 14.** Resolver la ecuación $x^2-4x+5=0$ y comprueba que, en efecto, las raíces obtenidas verifican dicha ecuación. Sol: a) $2 \pm i$
- 15.** Resolver las ecuaciones $x^6+64=0$ y $x^4+81=0$. Sol: a) $x=2_{90^\circ+60^\circ k}$ $k=0,1,2,3,4,5$; b) $x=3_{45^\circ+90^\circ k}$ $k=0,1,2,3$
- 16.** Escribir una ecuación de raíces $1+3i$, $1-3i$. Sol: $x^2-2x+10=0$
- 17.** Probar que $3+i$ y $3-i$ son raíces de la ecuación $x^2-6x+10$. Sol: $[x-(3+i)][x-(3-i)]=x^2-6x+10$
- 18.** Resolver la ecuación: a) $x^4+1=-35$. Sol: $x= \sqrt{3} \pm \sqrt{3} i$; $x=-\sqrt{3} \pm \sqrt{3} i$

Potencias, raíces, mixtos

- 1.** Calcular las potencias: a) $(2-3i)^3$; b) $(3+i)^2$; c) i^{23} ; d) $(2+2i)^4$. Sol: a) $-46-9i$; b) $8+6i$; c) $-i$; d) -64
- 2.** Calcular: a) i^{27} ; b) i^{48} ; c) i^7 ; d) i^{12} ; e) i^{33} ; f) i^{35} . Sol: a) $-i$; b) 1 ; c) $-i$; d) 1 ; e) i ; f) $-i$
- 3.** Sabemos que $z_1=3-2i$, que $z_2=4-3i$ y que $z_3=-3i$. Calcular:
a) $z_1+2z_2-z_3$ b) $z_1(z_2+z_3)$ c) z_2^2 d) $2z_1-z_2+z_3$. Sol: a) $11-5i$; b) $-26i$; c) $7-24i$; d) $2-4i$
- 4.** Calcular: a) $(1+2i)^3$ b) $(-3-i)^4$ c) $(1-3i)^2$. Sol: a) $-11-2i$; b) $28+96i$; c) $-8-6i$
- 5.** Calcular: a) i^{210} b) i^{312} c) i^{326} d) i^{1121} . Sol: a) -1 ; b) 1 ; c) -1 ; d) i
- 6.** Calcular: a) $(1+i)^3$ b) $(1-i)^3$ c) $(-1+i)^3$ d) $(-1-i)^3$. Sol: a) $-2+2i$; b) $-2-2i$; c) $2+2i$; d) $2-2i$
- 7.** Calcular: a) $1/i^3$ b) $1/i^4$ c) i^{-1} d) i^{-2} . Sol: a) i ; b) 1 ; c) $-i$; d) -1
- 8.** Dados los complejos: $z_1=3_{45^\circ}$; $z_2=2_{30^\circ}$ y $z_3=-2i$. Calcular:
a) z_1z_3 b) $z_1 / (z_2)^2$ c) $(z_1)^2/[z_2(z_3)^3]$. Sol: a) 6_{315° ; b) $(3/4)_{-15^\circ}$; c) $(9/16)_{330^\circ}$
- 9.** Calcular, expresando el resultado en forma polar:
a) $(1+i)^6$ b) $[(-1/2)+(\sqrt{2}/2)i]^8$ c) $(1-i)^4$. Sol: a) 8_{270° ; b) 1_{240° ; c) 4_{180°
- 10.** Calcular las potencias: a) $[2(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)]^4$ b) $(\sqrt{2})_{30^\circ}^6$ c) $[\sqrt[4]{3} (\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)]^8$. Sol: a) 16_{180° ; b) $8_{180^\circ}=-8$; c) 9_{80°
- 11.** Calcular las raíces quintas de la unidad. Hacerlo expresando 1 como complejo en forma polar. Sol: 1° ; 172° ; 1144° ; 1216° ; 1288°
- 12.** Calcular: a) $\sqrt{-i}$; b) $\sqrt[3]{1+i}$; c) $\sqrt{-16}$ Sol: a) 1_{135° ; 1_{315° ; b) $\sqrt[3]{2}_{15^\circ}$; $\sqrt[3]{2}_{135^\circ}$; $\sqrt[3]{2}_{255^\circ}$; c) 4_{90} , 4_{270}
- 13.** Calcular $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1-\sqrt{3}i}}$ Sol: $1/\sqrt[3]{2}_{5^\circ+120^\circ k}$ $k=0,1,2$
- 14.** Calcular las raíces siguientes y representar gráficamente las soluciones:
a) $\sqrt{-4}$; b) $\sqrt[3]{-27}$; c) $\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}}$; d) $\sqrt[3]{\frac{-27}{i}}$ Sol: a) 2_{90° , 2_{270° ; b) 3_{60° , 3_{180° , 3_{300° ; c) 1_{30° , 1_{150° , 1_{270° ; d) 3_{30° , 3_{150° , 3_{270°

- 15.** Calcular las raíces: a) $\sqrt{4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$; b) $\sqrt[3]{27(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ)}$;
 c) $\sqrt[4]{81(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)}$; d) $\sqrt[6]{i}$ Sol: a) $2_{30^\circ}, 2_{210^\circ}$; b) $3_{60^\circ}, 3_{180^\circ}, 3_{300^\circ}$; c) $3_{40^\circ+90^\circ k}$ $k=0,1,2,3$; d) $1_{15^\circ+60^\circ k}$ $k=0,1,2,3,4,5$
- 16.** ¿De qué número es $(2+3i)$ raíz cúbica? Sol: $-46+9i$
- 17.** a) Operar la expresión $(1+3i)^2(3-4i)$ Sol: a) $50i$
 b) calcular las raíces cúbicas del resultado. Sol. b) $\sqrt[3]{50}_{30^\circ+120^\circ k}$ $k=0,1,2$
- 18.** Calcular el valor de $(i^4 - i^3)/8i$ y encontrar sus raíces cúbicas. Sol: $(1/2)_{105^\circ+120^\circ k}$ $k=0,1,2$
- 19.** Calcular: a) $(1+i)^8$; b) $(-1+i)^6$; c) $(1 + \sqrt{3}i)^2$; d) $(-2-2i)^4$. Sol: a) 16_0 ; b) 8_{90} ; c) 10_{120} ; d) 64_{180}
- 20.** Calcular $(i^4 + i^5)/\sqrt{2}i$. Escribir el resultado en forma polar. Sol: 1_{315°
- 21.** a) Si una raíz cúbica de un número es $2i$, calcular las otras dos raíces y ese número.
 b) Calcular $(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)^8$ Sol: a) $2_{210^\circ}, 2_{330^\circ}, -8i=8_{270^\circ}$; b) 1_{80°
- 22.** Hallar las raíces cúbicas de los complejos: a) $2+2i$ b) $1 + \sqrt{3}i$ c) $-2+2\sqrt{3}i$.
 Sol: a) $\sqrt{2}_{15^\circ}, \sqrt{2}_{135^\circ}, \sqrt{2}_{255^\circ}$; b) $\sqrt[3]{2}_{20^\circ+120^\circ k}$ $k=0,1,2,3,4,5$; c) $\sqrt[3]{2}_{40^\circ+120^\circ k}$ $k=0,1,2$
- 23.** Calcular: $z = \sqrt[3]{\frac{8}{2-2i}}$ Sol: $\sqrt{2}_{15^\circ+120^\circ k}$ $k=0,1,2$
- 24.** Hallar las raíces cúbicas de a) -1 y b) $-i$. Sol: a) $1_{60^\circ}, 1_{180^\circ}, 1_{300^\circ}$; b) $1_{90^\circ}, 1_{210^\circ}, 1_{330^\circ}$
- 25.** Calcular las tres raíces de $\sqrt[3]{\frac{3+3i}{-3+3i}}$ en forma polar: Sol: $1_{90^\circ}, 1_{210^\circ}, 1_{330^\circ}$
- 26.** a) Calcular: i^{14}, i^{18}, i^{33}
 b) Si $z_1 = 2-2i$; $z_2 = 1+3i$; y $z_3 = 2i$. Hallar: $2z_1 - z_2 + 2z_3$; $z_1 \cdot (z_2 - z_3)$; $(z_1)^2$.
 c) Hallar: $(1+2i)^3$
 d) Hallar x para que se verifique que $(x-i)/(2+i) = 1-i$ Sol: a) $-1, -1, i$; b) $3-3i, 4, -8i$; c) $-11-2i$; d) $x=3$
- 27.** Calcular $\sqrt[3]{-27i}$. Sol: $3_{90^\circ}, 3_{210^\circ}, 3_{330^\circ}$
- 28.** Calcular las siguientes potencias: a) $[2(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)]^4$. b) $(\sqrt{3}^{30^\circ})^8$. Sol: a) 16_{100° ; b) 81_{240°
- 29.** Hallar el módulo de: $5 \cdot (i^2 + i^{-3}) / (i^2 - 3i)$. Sol: $z = -1-2i$; $|z| = \sqrt{5}$
- 30.** Calcular $(-2+2i)^{64}$ Sol: $8^{32}_{8640^\circ} = 8^{32}$
- 31.** Calcular el valor de $(i^3 - i^{-3}) / (2i)$ y hallar sus raíces cúbicas. Sol: a) -1 ; b) $1_{60^\circ}, 1_{180^\circ}, 1_{300^\circ}$
- 32.** a) Calcular el valor de la fracción $(z^3 + z) / (z^2 + 2)$ para $z = 1+i$
 b) Dar el valor de la misma fracción para $\bar{z} = 1-i$. Sol: a) $1/2+i$; b) $1/2-i$

33. Calcular sin desarrollar los binomios y expresar el resultado en forma binómica:

a) $(1+i)^4$ b) $(1+\sqrt{3}i)^6$ Sol: a) $4_{180^\circ}=-4$; b) $64_{0^\circ}=64$

34. Hallar el conjugado del opuesto de a) $(1-2i)^3$; b) $25/(3+4i)$; c) $((2+i)/(1-2i))^2$. Sol: a) $11+2i$; b) $-3-4i$; c) 1

35. Calcular el valor de $(z^2+z-1)/(z^2-2z)$ para $z=1+i$. Sol: $-3/2 i$

36. Hallar: a) $(1+i)^{20}$, b) $(2\sqrt{3}-2i)^{30}$, c) $(-\sqrt{3}-i)^{12}$ y expresar el resultado en forma polar y binómica. Sol: a) $2^{10}_{180^\circ} = -2^{10}$; b) $4^{30}_{180^\circ} = -4^{30}$; c) $2^{12}_{0^\circ} = 4096$

37. Hallar $z=(\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ)^{10}$, $w=(\cos 50^\circ-i\sin 50^\circ)^{30}$ y expresar el resultado en forma binómica.

Hallar z^{-1} y el conjugado de w . Sol: $z=(\cos 200^\circ+i\sin 200^\circ)$; $w=(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=1/2-\sqrt{3}/2 i$; $z^{-1}=1_{160^\circ}$; $\overline{w}=1/2+\sqrt{3}/2 i$

38. Hallar el módulo y el argumento de $\left(\frac{2+2i}{2-2i}\right)^4$ Sol: $1_{360^\circ} = 1$

39. Hallar las raíces quintas de: a) 1, b) -1, c) $1/32$, d) $243i$, e) $-32i$, f) $\sqrt{3}+i$.

Sol: a) $1_{0^\circ+72^\circ k}$; b) $1_{36^\circ+72^\circ k}$; c) $(1/2)_{0^\circ+72^\circ k}$; d) $3_{18^\circ+72^\circ k}$; e) $2_{36^\circ+72^\circ k}$; f) $\sqrt[5]{2}_{6^\circ+72^\circ k} \dots k=0,1,2,3,4$

40. Hallar la raíz cuadrada de los complejos: a) $5+12i$ y b) $1/(3+4i)$. Sol: a) $3+2i$; $-3-2i$; b) $2/5-1/5i$; $-2/5+1/5i$

41. Calcular y representar los afijos de las raíces cúbicas de $\frac{2i^9+i^{-7}}{3i}$. Expresar el resultado en forma binómica.

Sol: $1, -1/2+\sqrt{3}/2 i, -1/2-\sqrt{3}/2 i$

Incógnitas reales o complejas

1. ¿Cuánto debe valer x para que el número $(1+xi)^2$ sea imaginario puro? Sol: $x=\pm 1$

2. Calcular los números x e y para que se verifique la igualdad: $(3+xi)+(y+3i)=5+2i$. Sol: $x=-1$; $y=2$

3. Determinar el valor de x para que se verifique la igualdad: $(x-i)/(1-i)=(2+i)$. Sol: $x=3$

4. Calcular los números reales x e y para que se verifique $(-4+xi)/(2-3i)=(y-2i)$. Sol: $x=-7$; $y=1$

5. Determinar x para que el producto $(3+2i)(6+xi)$ sea: a) un número real. Sol: a) $x=-4$

b) un número imaginario puro. Sol: $x=9$

6. Determinar los números reales x e y para que se cumpla: $\frac{x+2i}{1-i}+yi=1$. Sol: $x=4$; $y=3$

7. Calcular a para que el complejo $z=(4+ai)/(1-i)$ sea: a) Imaginario puro. b) Real. Sol: a) $a=4$; b) $a=-4$

8. Hallar el módulo y el argumento del número complejo: $z=(x+i)/(x-i)$, $x \in \mathbb{R}$. Sol: $|z|=1$

9. Determinar x para que el módulo del complejo $z=(x+i)/(1+i)$ sea $\sqrt{5}$. Sol: $x=\pm 3$

10. Resolver: $(4+xi)/(2+i)=y+2i$. Sol: $x=7$, $y=3$

11. Hallar el valor de x para que la operación $(2-xi)/(1-3i)$ tenga sólo parte real, sólo parte imaginaria y para que su representación esté en la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir, la parte real e imaginaria sean iguales. Sol: $x=6, x=-2/3, x=1$

12. Hallar x para que el número $(3-xi)(2+i)$ esté representado en la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Sol: $x=-1$

13. Hallar x e y para que se cumpla: a) $(x-i).(y+2i)=4x+i$ Sol: a) $x=2, y=3$

b) $\frac{-4+xi}{+2i} = y+3$ Sol: b) $x=8, y=1$

14. Hallar x , para que la expresión $z = \frac{4+xi}{2+i}$ sea: a) real, b) imaginario puro. Sol: a) $x=2$; b) $x=-8$

15. Hallar k , para que $|z-2| = 3$, siendo $z=k+3i$. Sol: $k=2$

16. Determinar el valor real de x de modo que el afijo del producto de los números complejos $3+xi$ y $4+2i$ sea un punto de la bisectriz del primer cuadrante. Sol: $x=1$

17. Resolver el siguiente sistema:
$$\begin{cases} (1-i)x + iy = 0 \\ (2+i)x + 2y = 1+7i \end{cases}$$
 Sol: $x=1+i; y=2i$

18. Resolver las ecuaciones siguientes en el campo complejo. En todos los casos z es un número complejo; despejar y calcular su valor:

a) $(2-2i)z=10-2i;$ Sol: $z=3+2i$ b) $\frac{z}{3+i}=2-i;$ Sol: $z=7-i$

c) $\frac{z}{3+4i} + \frac{2z+5i}{1-2i} = 2+2i$ Sol: $z=4-3i$ d) $\frac{z}{-z} + \frac{2z-2i}{1-i} = 3-2i$ Sol: $z=1-2i$

19. Despejar z y calcular su valor en las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{z}{1+i} + (2-3i) = (4-4i)$ b) $\frac{3+z}{z} = 1+i$

c) $(2+2i)z=(10+2i).$ Sol: a) $3+i$; b) $1-i$; c) $3-2i$

20. Resolver los sistemas de ecuaciones siguientes, en los que α y β son números complejos:

a)
$$\begin{cases} \alpha i + (2+i)\beta = -3+7i \\ (2-i)\alpha + (2+i)\beta = 5+3i \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} \alpha(1+i) + (1+i)\beta = 5+5i \\ (2+i)\alpha + i\beta = 2+2i \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} (1+i)\alpha + (2+i)\beta = 9+2i \\ 2\alpha - i\beta = 5-4i \end{cases}$$
 Sol: a) $\alpha=3+i; \beta=2i$; b) $\alpha=1-i; \beta=3+i$; c) $\alpha=3-i; \beta=2-i$

21. Calcular z en las ecuaciones siguientes: a) $\frac{z}{1-2i} + 1-i = 2+i$ Sol: $z=5$

b) $\frac{z}{2+i} + \frac{z-i}{2-i} = 3-2i$ Sol: $z=7/2-2i$

- 22.** Resolver el sistema (x e y son números complejos):
$$\begin{cases} (2+i)x + (1+i)y = 2+3i \\ (2-i)x - iy = 0 \end{cases}$$
 Sol: $x=i; y=2-i$
- 23.** Hallar el número complejo z que cumpla: $[z/(2-i)] + [(2z-5)/(2-i)] = 1+2i$. Sol: $z=3+i$
- 24.** Hallar z tal que z^3 sea igual al conjugado de z. Sol: $z=i, z=1, z=-1, z=0$
- 25.** Resolver la ecuación $(1-i)z^2 - 7=i$. Sol: $z=2+i$ y $z=-2-i$

Problemas y método de Moivre

Problemas

- 1.** Si el producto de dos números complejos es -18 y dividiendo uno de ellos entre el otro, obtenemos de resultado 2i. ¿Cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?. Sol: 3_{45° y 6_{135°
- 2.** El cociente de dos números complejos es 1/2 y el dividendo es el cuadrado del divisor. Calcular sus módulos y sus argumentos. Sol: $(1/2)_{0^\circ}; (1/4)_{0^\circ}$
- 3.** Aplicar un giro de 90° sobre el punto A(3,1). Determinar, utilizando el cálculo de números complejos, las coordenadas del punto que obtienes. Sol: a) (-1,3)
- 4.** La suma de dos números complejos conjugados es 6 y la suma de sus módulos 10. ¿De qué números complejos se trata?. Sol: $(3+4i), (3-4i)$
- 5.** La resta de dos números complejos es $2+6i$, y el cuadrado del segundo dividido por el primero es 2. Hallarlos. Sol: $4+2i, 6+8i; 4i, -2-2i$
- 6.** Hallar dos números complejos sabiendo que: su diferencia es real, su suma tiene de parte real 8 y su producto vale $11-16i$. Sol: $(3-2i); 2i$
- 7.** El producto de dos números complejos es -27. Hallarlos sabiendo que uno de ellos es el cuadrado del otro. Sol: $3_{60^\circ}, 9_{120^\circ}$.
- 8.** La suma de dos números complejos es $-5+5i$; la parte real de uno de ellos es 1. Determinar dichos números sabiendo que su cociente es imaginario puro. Sol: $(1+3i)$ y $(-6+2i)$ ó $(1+2i)$ y $(-6+3i)$
- 9.** La suma de dos complejos es $5-i$ y su producto es $8+i$. Hallar los números. Sol: $3-2i, 2+i$
- 10.** La suma de dos complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos 10 ¿Cuáles son los números complejos? Sol: $(4+3i), (4-3i)$
- 11.** El producto de dos números complejos es -2 y el cubo de unos de ellos dividido por el otro es 1/2. Calcular módulos y argumentos. Sol: $1_{45^\circ}, 2_{135^\circ}; 1_{135^\circ}, 2_{45^\circ}; 1_{225^\circ}, 2_{315^\circ}; 1_{315^\circ}, 2_{225^\circ}$

12. Hallar z tal que: a) el conjugado de z sea igual a $-z$. b) el conjugado de z sea igual a z^{-1} . c) la suma del conjugado de z más z sea igual a 2. d) z menos el conjugado de z sea igual a $2i$.

Sol: a) $z=ki$; b) $a+bi/a^2+b^2=1$; c) $1+ki$; d) $k+i$

13. El complejo de argumento 70° y módulo 8 es el producto de dos complejos, uno de ellos tiene de argumento 40° y módulo 2. Escribir en forma binómica el otro complejo.

Sol: $8_{30^\circ} = 4\sqrt{3} + 4i$

14. Determinar el número complejo sabiendo que si después de multiplicarlo por $(1-i)$ se le suma al resultado $(-3+5i)$ y se divide lo obtenido por $2+3i$ se vuelve al complejo de partida.

Sol: $1+i$

Figuras geométricas

15. Sabiendo que los puntos P, Q y R son los afijos de las raíces cúbicas de un número complejo, siendo las coordenadas polares de P 3_{30° . Hallar las coordenadas polares y cartesianas de Q y R y el número complejo.

Sol: $Q=3_{150^\circ}=-3\sqrt{3}/2+3/2i$; $R=3_{270^\circ}=-3i$; $27i$

16. Hallar las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro el origen sabiendo que uno de los vértices es el afijo del número complejo $2_{\pi/2}$.

Sol: 2_{150° , 2_{210° , 2_{270° , 2_{330° , 2_{30°

17. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado (de centro el origen de coordenadas) sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo 1_{120° .

Sol: 1_{30° , 1_{210° , 1_{300°

18. Hallar las coordenadas polares y cartesianas de los vértices de un hexágono regular de radio 3 u, sabiendo que un vértice está situado en el eje OX.

Sol: 3_{0° , 3_{60° , 3_{120° , 3_{180° , 3_{240° , 3_{300°

19. Los afijos de las raíces de un complejo son vértices de un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio 2 u; el argumento de una de las raíces es 45° . Hallar el número complejo y las restantes raíces.

Sol: 2_{56° ; 2_{45° , 2_{90° , 2_{135° , 2_{180° , 2_{225° , 2_{270° , 2_{315° , 2_{0°

20. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia de centro el origen de coordenadas, sabiendo que uno de los vértices es el afijo del complejo $1+2i$.

Sol: $2+i$, $-2+i$, $-1-2i$

Método de Moivre

21. Expresa en función de $\cos \alpha$ y $\sin \alpha$ y utilizando la fórmula de Moivre:

a) $\cos 2\alpha$ y $\sin 2\alpha$

Sol: $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$; $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

b) $\cos 3\alpha$ y $\sin 3\alpha$.

Sol: $\sin 3\alpha = 3\cos^2 \alpha \sin \alpha - \sin^3 \alpha$; $\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3\cos \alpha \sin^2 \alpha$

22. Encuentra las fórmulas para calcular $\sin 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$ en función de $\sin \alpha$ y $\cos \alpha$.

Sol: $\sin 4\alpha = 4\sin \alpha \cos^3 \alpha - 4\cos \alpha \sin^3 \alpha$; $\cos 4\alpha = \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha - 6\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$

23. Hallar $\sin^3 5a$ y $\cos^2 5a$ sabiendo que $\sin a = 1/2$ y a pertenece al primer cuadrante.

Sol: $\sin^3 5a = 1/8$; $\cos^2 5a = 3/4$

24. Si $\sin x = 1/3$ y $0 < x < \pi/2$. Hallar $\sin 6x$ y $\cos 6x$.

Sol: $\sin 6x = 460\sqrt{2}/729$; $\cos 6x = -329/729$
