6 NÚMEROS COMPLEJOS

Los algebristas de los siglos XV y XVI, al resolver ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2 - 4x + 13 = 0$ y llegar a la expresión $x = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$, decían: *No es posible* extraer la raíz cuadrada de un número negativo. Por tanto, la ecuación no tiene solución.

Pero en algún momento los algebristas se decidieron a operar con estas expresiones como si se tratara de números reales:

$$\frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}\,\sqrt{-1}}{2} = \frac{4 \pm 6 \cdot \sqrt{-1}}{2} = 2 \pm 3 \cdot \sqrt{-1}$$

Y seguían operando con $\sqrt{-1}$ como si se tratara de un número real.

Leibnitz, en el siglo XVII, decía que $\sqrt{-1}$ es una especie de *anfibio entre el ser y la nada.*

Fue en el año 1777 cuando Euler le dio a $\sqrt{-1}$ el nombre de i (por *imaginario*).

El número imaginario i, operado elementalmente con los reales, dio lugar a los números complejos. Su representación gráfica, pasando de la *recta real* al *plano complejo* (Gauss, finales del siglo XVIII), acabó de darles la entidad necesaria para que fueran plenamente aceptados.

Leonhard Euler (1707-1783)

REFLEXIONA Y RESUELVE

¿Cómo se maneja $\sqrt{-1}$?

En la página anterior decimos que "los algebristas del siglo XVI decidieron operar con $\sqrt{-1}$ como si se tratara de un número real".

Vamos a hacer como ellos: operar este "extraño personaje" consigo mismo y con los números reales siguiendo las reglas de las operaciones entre números reales.

Extraer fuera de la raíz

Observa cómo se extraen números de la raíz:

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9 \cdot (-1)} = \sqrt{9}\,\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$$

- Saca fuera de la raíz: a) $\sqrt{-16}$ b) $\sqrt{-100}$

Potencias de $\sqrt{-1}$

Por la definición de raíz cuadrada, es lógico que:

$$(\sqrt{-1})^2 = -1$$

- Calcula las sucesivas potencias de $\sqrt{-1}$:

  a) $(\sqrt{-1})^3 = (\sqrt{-1})^2(\sqrt{-1}) = \ldots$

  b) $(\sqrt{-1})^4$

  c) $(\sqrt{-1})^5$

¿Cómo se maneja $k \cdot \sqrt{-1}$?

La expresión $3 \cdot \sqrt{-1}$ no se puede simplificar. Sin embargo, sí se puede simplificar esta suma:

$$3 \cdot \sqrt{-1} + 5 \cdot \sqrt{-1} - 6 \cdot \sqrt{-1} + \sqrt{-1}$$

Parece razonable proceder así:

$$3\sqrt{-1} + 5\sqrt{-1} - 6\sqrt{-1} + \sqrt{-1} =$$
$$= (3 + 5 - 6 + 1)\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$$

- Simplifica.

  a) $-2\sqrt{-1} + 11\sqrt{-1} - 8\sqrt{-1} - \sqrt{-1}$

  b) $5\sqrt{-1} + 2\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} + 3\sqrt{-1}$

  c) $8\sqrt{-1} + \frac{2}{5}\sqrt{-1} - \frac{3}{10}\sqrt{-1} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}$

Expresiones del tipo $a + b \cdot \sqrt{-1}$

Las expresiones del tipo $5 - 2\sqrt{-1}$ no se pueden simplificar. Pero sí se pueden operar entre sí:

$$(5 - 2\sqrt{-1}) + (4 + 7\sqrt{-1}) - 3\sqrt{-1} =$$
$$= (5 + 4) + (-2 + 7 - 3)\sqrt{-1} = 9 + 2\sqrt{-1}$$

- Simplifica las siguientes sumas:

  a) $(-3 + 5\sqrt{-1}) + (2 - 4\sqrt{-1}) - (6\sqrt{-1})$

  b) $\sqrt{-1} - (3 + 4\sqrt{-1}) + 2\sqrt{-1}$

- Efectúa las siguientes operaciones combinadas:

  a) $3(2 - 4\sqrt{-1}) - 6(4 + 7\sqrt{-1})$

  b) $8(5 - 3\sqrt{-1}) + 4(-3 + 2\sqrt{-1})$

Multiplicaciones

Observa cómo se realiza la siguiente multiplicación:

$$(3 - 2\sqrt{-1}) \cdot (5 + 6\sqrt{-1}) =$$
$$= 3 \cdot 5 + 3 \cdot 6\sqrt{-1} - 2\sqrt{-1} \cdot 5 - 2\sqrt{-1} \cdot 6\sqrt{-1} =$$
$$= 15 + 18\sqrt{-1} - 10\sqrt{-1} - 12(\sqrt{-1})^2 =$$
$$= 15 + 8\sqrt{-1} - 12 \cdot (-1) = 15 + 8\sqrt{-1} + 12 =$$
$$= 27 + 8\sqrt{-1}$$

- Efectúa las siguientes multiplicaciones:

  a) $(4 - 3\sqrt{-1}) \cdot \sqrt{-1}$

  b) $(5 + 2\sqrt{-1}) \cdot 8\sqrt{-1}$

  c) $(5 + 2\sqrt{-1})(7 - 3\sqrt{-1})$

  d) $(5 + 2\sqrt{-1})(5 - 2\sqrt{-1})$

Ecuaciones de segundo grado

Observa cómo se ha resuelto en la página anterior la ecuación $x^2 - 4x + 13 = 0$. Se llega a la conclusión de que sus soluciones son:

$$2 + 3\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad 2 - 3\sqrt{-1}$$

- Resuelve:

  a) $x^2 + 10x + 29 = 0$

  b) $x^2 + 9 = 0$

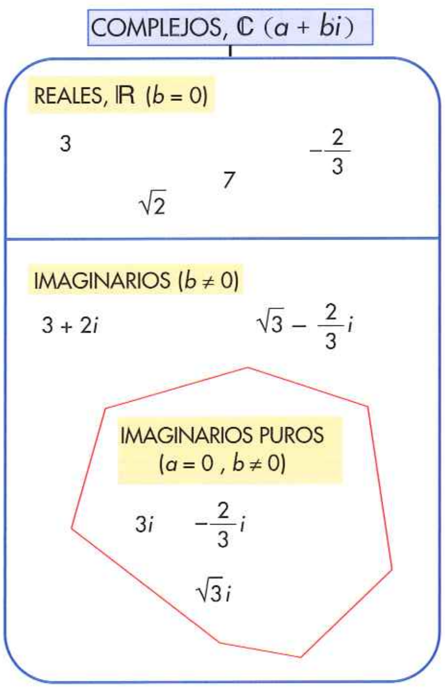
6.1 EN QUÉ CONSISTEN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Necesidad de una ampliación del campo numérico

Al resolver $x^2 - 6x + 13 = 0$, obtenemos $3 + 2\sqrt{-1}$ y $3 - 2\sqrt{-1}$, soluciones que carecen de sentido porque $\sqrt{-1}$ no es un número real.

Los números complejos nacen del deseo de dar validez a estas expresiones. Para ello es necesario admitir como números válidos a $\sqrt{-1}$ y a todos los que se obtengan al operar con él como si se tratara de un número más.

EL CONJUNTO $\mathbb{C}$



- **Unidad imaginaria**. Se llama así al nuevo número $\sqrt{-1}$. Se designa por la letra i.
  $i = \sqrt{-1}$; $i^2 = -1$ (El nombre i viene de *imaginario*).
- **Números complejos**. Son las expresiones $a + bi$, donde a y b son números reales.
- **Componentes**. La expresión $a + bi$ se llama **forma binómica** de un número complejo porque tiene dos componentes:
  $a \rightarrow$ **componente real** $b \rightarrow$ **componente imaginaria**
  También se llaman **parte real** y **parte imaginaria**.
- **Igualdad**. Dos números complejos son iguales cuando tienen la misma componente real y la misma componente imaginaria.
- El **conjunto de** todos **los números complejos** se designa por $\mathbb{C}$:
  $$\mathbb{C} = \{a + bi \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$$
- **Los números reales son complejos**, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Los reales son números complejos cuya componente imaginaria es cero: $a + 0i = a$
- **Números imaginarios** son los números complejos cuya componente imaginaria no es cero.
  Por tanto, un número complejo o es real o es imaginario.
- **Números imaginarios puros** son los imaginarios cuya componente real es cero.
- Los números complejos $a + bi$ y $-a - bi$ se llaman **opuestos**.
- Los complejos $z = a + bi$ y $\bar{z} = a - bi$ se llaman **conjugados**.

Por ejemplo, $3 + 2i$, $-\sqrt{3} + 5i$, $0 + 2i = 2i$, $7 + 0i = 7$ son números complejos. Sus componentes son:

	$3 + 2i$	$-\sqrt{3} + 5i$	$2i$	7
COMPONENTE REAL	3	$-\sqrt{3}$	0	7
COMPONENTE IMAGINARIA	2	5	2	0

Los complejos: $3 + 0i$, $\sqrt{5} + 0i$, $\frac{2}{3} + 0i$ son reales.

$3 + 5i$, $-2 + \frac{2}{3}i$, $\sqrt{3}i$, i son imaginarios.

$5i$, $\frac{2}{3}i$, i, $-i$ son imaginarios puros.

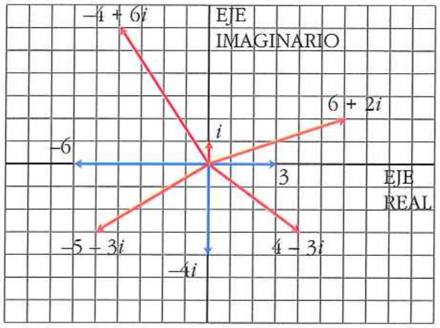
El opuesto de $z = 2 - 5i$ es $-z = -2 + 5i$. Su conjugado es $\bar{z} = 2 + 5i$.

NOMENCLATURA

Observa que estamos utilizando la letra z para designar un número complejo.
Es costumbre de los matemáticos darles este nombre.

Representación gráfica de los números complejos

Las sucesivas categorías de números (naturales, enteros, racionales...) se pueden representar sobre la recta. Los reales la llenan por completo, de modo que a cada número real le corresponde un punto en la recta y a cada punto, un número real. Por eso hablamos de recta real.



Para representar los números complejos tenemos que salir de la recta y llenar el plano, pasando así de la **recta real** al **plano complejo**.

Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos. El eje X se llama **eje real**, y el Y, **eje imaginario**. El número complejo $a + bi$ se representa mediante el punto (a, b), que se llama su **afijo**, o mediante un vector (flecha) de origen $(0, 0)$ y extremo (a, b).

Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real, y los imaginarios puros, sobre el eje imaginario.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar el valor que han de tener x e y para que se cumpla:*

$$3 + xi = y - 4i$$

Para que dos complejos sean iguales, sus componentes han de ser respectivamente iguales:

$$\left.\begin{array}{l} 3 = y \\ x = -4 \end{array}\right\} \quad \text{Es decir, } x = -4, \; y = 3$$

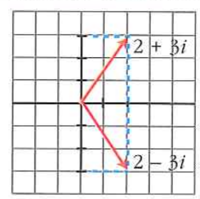
2. *Obtener la solución de la siguiente ecuación y representarla en el plano complejo:*

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2}$$

La ecuación tiene dos raíces imaginarias:

$$2 + 3i, \; 2 - 3i$$



Al igual que en este último ejercicio, se cumple, en general, que:

Cualquier ecuación de segundo grado con coeficientes reales que no tenga solución real tiene dos soluciones imaginarias que son números complejos conjugados.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Representa gráficamente los siguientes números complejos y di cuáles son reales, cuáles imaginarios y, de estos, cuáles son imaginarios puros:

$5 - 3i$; $\frac{1}{2} + \frac{5}{4}i$; $-5i$; 7; $\sqrt{3}i$; 0; $-1 - i$; -7; $4i$

2. Obtén las soluciones de las siguientes ecuaciones y represéntalas:

a) $z^2 + 4 = 0$ b) $z^2 + 6z + 10 = 0$

c) $3z^2 + 27 = 0$ d) $3z^2 - 27 = 0$

3. Representa gráficamente el opuesto y el conjugado de:

a) $3 - 5i$ b) $5 + 2i$

c) $-1 - 2i$ d) $-2 + 3i$

e) 5 f) 0

g) $2i$ h) $-5i$

4. Sabemos que $i^2 = -1$. Calcula i^3, i^4, i^5, i^6, i^{20}, i^{21}, i^{22}, i^{23}. Da un criterio para simplificar potencias de i de exponente natural.

6.2 OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

La suma, la resta y la multiplicación de números complejos se realizan siguiendo las reglas de las operaciones de los números reales y teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

Por ejemplo:

- $(3 + 2i) + (5 + 6i) = 3 + 5 + 2i + 6i = 8 + 8i$
- $(6 - 5i) - (4 - 7i) = 6 - 4 - 5i + 7i = 2 + 2i$
- $(3 + 4i) \cdot (2 - 5i) = 3 \cdot (2 - 5i) + 4i \cdot (2 - 5i) = 6 - 15i + 8i - 20i^2 =$
  $= 6 - 15i + 8i + 20 = 6 + 20 - 15i + 8i = 26 - 7i$
- $\left(4 - \sqrt{3}i\right) \cdot \left(\sqrt{2} - i\right) = 4\sqrt{2} - 4i - \sqrt{3}\sqrt{2}i + \sqrt{3}i^2 =$
  $= 4\sqrt{2} - 4i - \sqrt{6}i - \sqrt{3} =$
  $= \left(4\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) + \left(-4 - \sqrt{6}\right)i$
- $(5 + 3i) \cdot (5 - 3i) = 25 - 15i + 15i - 9i^2 = 25 + 9 = 34$

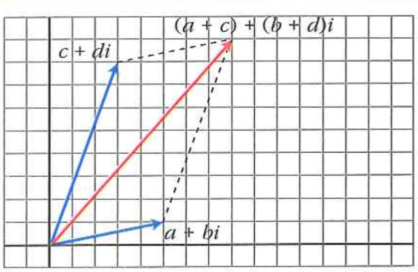
En el último ejemplo podemos ver cómo **multiplicando un número complejo por su conjugado se obtiene un número real**. Este resultado va a ser muy útil para dividir complejos: multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado de este último, consiguiendo así que en el denominador quede un número real.

Por ejemplo:

$$\frac{5 - 3i}{4 + 2i} = \frac{(5 - 3i)\,(4 - 2i)}{(4 + 2i)\,(4 - 2i)} = \frac{20 - 10i - 12i + 6i^2}{16 - 8i + 8i - 4i^2} =$$

$$= \frac{20 - 6 - 10i - 12i}{16 + 4} = \frac{14}{20} - \frac{22}{20}i = 0{,}7 - 1{,}1i$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



El número complejo resultante de sumar otros dos es la diagonal del paralelogramo formado por los sumandos.

La diferencia de dos complejos es la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo.

Más adelante se aprenderá a interpretar gráficamente el producto y el cociente de complejos.

El resultado de sumar, restar, multiplicar o dividir dos números complejos es otro número complejo, que se obtiene del siguiente modo:

Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Resta: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Multiplicación: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

El producto de un número complejo, $c + di$, por su conjugado, $c - di$, es siempre un número real:

$$(c + di) \cdot (c - di) = c^2 - cdi + cdi + d^2 = c^2 + d^2$$

División: $\dfrac{a + bi}{c + di} \overset{(*)}{=} \dfrac{(a + bi)\,(c - di)}{(c + di)\,(c - di)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

(*) Se multiplica y se divide por el conjugado del denominador y se opera.

No se puede dividir por 0.

Propiedades de las operaciones con números complejos

- El 0 es el **elemento neutro** de la **suma**.
- Todo número complejo, $a + bi$, tiene un **opuesto**. $-a - bi$.
- El 1 es el **elemento neutro** del **producto**.
- Todos los números complejos, $a + bi$, salvo el 0, tienen un **inverso**:

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

En la práctica, las propiedades de estas operaciones permiten operar con los complejos de la misma forma que con los reales.

INVERSO DE UN COMPLEJO

$$\frac{1}{3+4i} = \frac{1\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i}{9+16} =$$

$$= \frac{3-4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Obtener un polinomio de segundo grado cuyas raíces sean $5-2i$ y $5+2i$.*

Procedemos así:

$$[x-(5-2i)]\,[x-(5+2i)] = [(x-5)+2i]\,[(x-5)-2i] =$$

$$= (x-5)^2 - (2i)^2 = x^2 - 10x + 25 + 4 = x^2 - 10x + 29$$

Una solución es, por tanto, $x^2 - 10x + 29$.

2. *¿Cuánto ha de valer x, real, para que $(2+xi)^2$ sea imaginario puro?*

Empezamos desarrollando la expresión dada:

$$(2+xi)^2 = 4 + 4xi - x^2 = (4-x^2) + 4xi$$

Para que este complejo sea imaginario puro, su parte real debe ser cero:

$$4 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \;\rightarrow\; x = \pm 2$$

Ha de ser $x = 2$ o $x = -2$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Efectúa las siguientes operaciones y simplifica el resultado:

a) $(6-5i) + (2-i) - 2(-5+6i)$

b) $(2-3i) - (5+4i) + \frac{1}{2}(6-4i)$

c) $(3+2i)\,(4-2i)$

d) $(2+3i)\,(5-6i)$

e) $(-i+1)\,(3-2i)\,(1+3i)$

f) $\frac{2+4i}{4-2i}$ g) $\frac{1-4i}{3+i}$ h) $\frac{4+4i}{-3+5i}$

i) $\frac{5+i}{-2-i}$ j) $\frac{1+5i}{3+4i}$ k) $\frac{4-2i}{i}$

l) $6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)$ m) $\frac{(-3i)^2\,(1-2i)}{2+2i}$

2. Obtén polinomios cuyas raíces sean:

a) $2+\sqrt{3}i$ y $2-\sqrt{3}i$

b) $-3i$ y $3i$

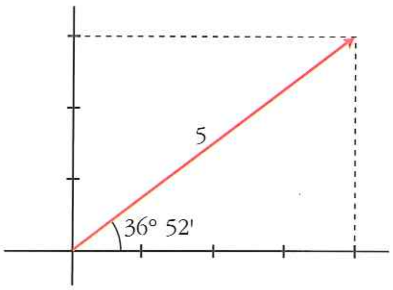
c) $1+2i$ y $3-4i$

(Observa que solo cuando las dos raíces son conjugadas, el polinomio tiene coeficientes reales).

3. ¿Cuánto debe valer x, real, para que $(25-xi)^2$ sea imaginario puro?

4. Representa gráficamente $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 2+5i$, $z_1 + z_2$. Comprueba que $z_1 + z_2$ es una diagonal del paralelogramo de lados z_1 y z_2.

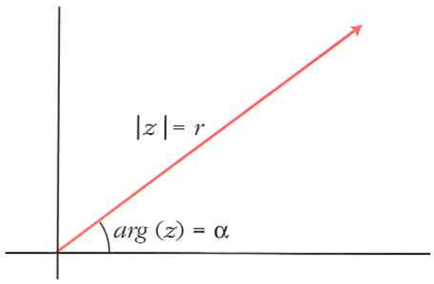
6.3 NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR



El número complejo $4 + 3i$ se representa mediante un vector de longitud 5 unidades y que forma un ángulo de $36° \, 52'$ con el eje real. Diremos que su **módulo** es 5 y su **argumento** es $36° \, 52'$.

Vamos a estudiar la relación que hay entre las componentes, a y b, de un número complejo, con su módulo y su argumento.

Módulo y argumento de un número complejo



- **Módulo** de un número complejo z es la longitud del vector mediante el que dicho número se representa. Se designa por $|z|$.
- **Argumento** de un complejo z, $z \neq 0$, es el ángulo que forma el vector con el eje real. Se designa por $arg\ (z)$.
- Si $|z| = r$ y $arg\ (z) = \alpha$, el número complejo se puede designar así: $z = r_\alpha$

Esta es la forma **módulo-argumental** o **polar** de describir un número complejo.

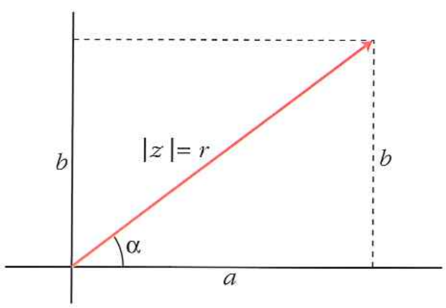
Observa que un número complejo admite infinitos argumentos:

$$r_\alpha = r_{360° + \alpha} = r_{720° + \alpha} = r_{1\,080° + \alpha} = \dots$$

De entre todos, solo uno de ellos está entre 0° y 360°.

No tiene sentido poner el número complejo 0 en forma polar.

Paso de forma binómica a forma polar



Si conocemos un número complejo $z = a + bi$ en forma binómica, las siguientes relaciones, que son muy claras, permiten pasarlo a la forma polar, r_α:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad tg\ \alpha = \frac{b}{a}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

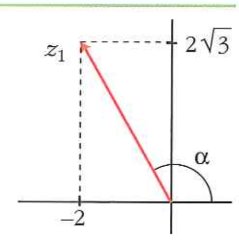
1. *Pasar a forma polar los siguientes números complejos:*

$z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$

$z_2 = i$

$z_3 = -2$

Representamos z_1 para visualizar su situación.



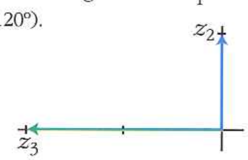
Módulo: $|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$

Argumento: $tg\ \alpha = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \rightarrow \alpha = 120°$

Por tanto: $z_1 = 4_{120°}$ o bien $z_1 = 4_{(2\pi/3)\ \text{rad}}$

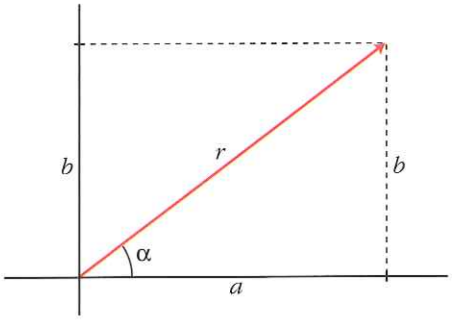
($-\sqrt{3}$ es la tangente de 120° y de 300°, pero observando la representación gráfica de z_1 vemos que su argumento está entre 90° y 180° y que, por tanto, es 120°).

La expresión polar de los otros dos es inmediata y no requiere cálculos:



$$z_2 = i = 1_{90°} \qquad z_3 = -2 = 2_{180°}$$

Paso de la forma polar a la forma binómica



Si conocemos un número complejo $z = r_\alpha$ en forma polar, las siguientes relaciones permiten pasarlo a forma binómica:

$$a = r\,cos\,\alpha \qquad b = r\,sen\,\alpha$$

Según estas igualdades, el número complejo puede ponerse así:

$$z = r\,cos\,\alpha + (r\,sen\,\alpha)\,i = r\,(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$$

Esta expresión, $z = r\,(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$, se llama **forma trigonométrica** y sirve para pasar de forma polar a forma binómica.

EJERCICIOS RESUELTOS

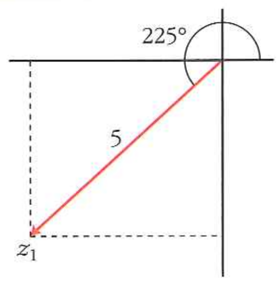
1. *Pasar a forma binómica los siguientes números complejos:*

a) $z_1 = 5_{225^\circ}$

b) $z_2 = 4_{0^\circ}$

c) $z_3 = 3_{270^\circ}$

a)

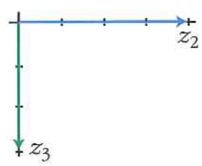


$$a = 5cos\,225^\circ = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$b = 5sen\,225^\circ = 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$z_1 = 5_{225^\circ} = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$$

b) y c) La expresión binómica de los otros dos es inmediata y no requiere cálculos:



$$z_2 = 4 + 0i = 4$$

$$z_3 = 0 - 3i = -3i$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Escribe en forma polar los siguientes números complejos:

a) $1 + \sqrt{3}\,i$ b) $\sqrt{3} + i$ c) $-1 + i$

d) $5 - 12i$ e) $3i$ f) -5

2. Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $5_{(\pi/6)\ \text{rad}}$ b) 2_{135° c) 2_{495°

d) 3_{240° e) 5_{180° f) 4_{90°

3. Expresa en forma polar el opuesto y el conjugado del número complejo $z = r_\alpha$.

4. Escribe en forma binómica y en forma polar el complejo:

$$z = 8(cos\,30^\circ + i\,sen\,30^\circ)$$

5. Sean los números complejos $z_1 = 4_{60^\circ}$ y $z_2 = 3_{210^\circ}$.

a) Expresa z_1 y z_2 en forma binómica.

b) Halla $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1, y pasa los resultados a forma polar.

c) Compara los módulos y los argumentos de $z_1 \cdot z_2$ y z_2/z_1 con los de z_1 y z_2 e intenta encontrar relaciones entre ellos.

6.4 OPERACIONES CON COMPLEJOS EN FORMA POLAR

El módulo y el argumento de la suma de dos números complejos poco tiene que ver con los módulos y los argumentos de los sumandos. Es decir, la relación entre ellos es tan complicada que no sirve de mucho.

Sin embargo, como pudiste ver en el último ejercicio del apartado anterior, hay unas relaciones muy sencillas y útiles entre la forma polar de dos números complejos y la de su producto o su cociente. Veámoslas.

Producto

El producto de dos números complejos es otro número complejo tal que:

- Su módulo es el producto de los módulos de los factores.
- Su argumento es la suma de los argumentos de los factores.

$$r_\alpha \cdot r'_\beta = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Demostración

Expresamos los dos factores en forma trigonométrica:

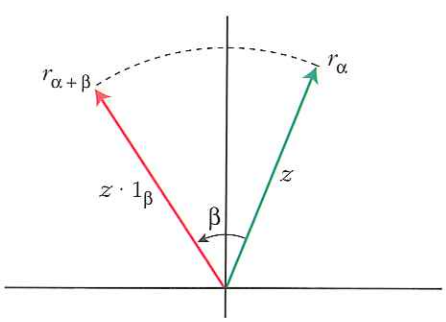
$$r_\alpha \cdot r'_\beta = r\,(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha) \cdot r'(cos\,\beta + i\,sen\,\beta) =$$

$$= r \cdot r'[(cos\,\alpha\,cos\,\beta - sen\,\alpha\,sen\,\beta) + i\,(sen\,\alpha\,cos\,\beta + cos\,\alpha\,sen\,\beta)] =$$

(aplicando las fórmulas **I.1** y **I.2** de la unidad 5, página 132)

$$= r \cdot r'[cos\,(\alpha+\beta) + i\,sen\,(\alpha+\beta)] = (r \cdot r')_{\alpha+\beta}$$

Producto por un complejo de módulo 1



Al multiplicar un número complejo $z = r_\alpha$ por 1_β, se gira z un ángulo β alrededor del origen.

$$r_\alpha \cdot 1_\beta = r_{\alpha+\beta}$$

Potencia

$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha}$, pues:

$(r_\alpha)^n = r_\alpha \cdot r_\alpha \cdot \ldots \cdot r_\alpha = (r \cdot r \cdot \ldots \cdot r)_{\alpha+\alpha+\ldots+\alpha} = (r^n)_{n\alpha}$

Al elevar r_α a un número natural, n, su módulo se eleva a n (r^n) y su argumento se multiplica por n $(n\alpha)$.

Cociente

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}, \text{ pues } \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta} \cdot r'_\beta = \left(\frac{r}{r'} \cdot r'\right)_{\alpha-\beta+\beta} = r_\alpha$$

Para dividir dos números complejos, se dividen sus módulos y se restan sus argumentos.

Fórmula de Moivre

Aplicando las propiedades de la potencia de un número complejo, se obtiene la siguiente fórmula, llamada **fórmula de Moivre**:

$$(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^n = cos\ n\alpha + i\ sen\ n\alpha$$

que es útil en trigonometría, pues permite hallar $cos\ n\alpha$ y $sen\ n\alpha$ en función de $cos\ \alpha$ y $sen\ \alpha$.

Demostración

$$(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^n = (1_\alpha)^n = 1_{n\alpha} = cos\ n\alpha + i\ sen\ n\alpha$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Dados los complejos* $z_1 = 4_{60°}$ *y* $z_2 = 3_{210°}$, *hallar:* $z_1 \cdot z_2$; z_1^5; z_2^4 *y* $\dfrac{z_2}{z_1}$

Basándonos en las propiedades anteriores, podemos efectuar las operaciones sin pasar, previamente, a la forma binómica:

$z_1 \cdot z_2 = 4_{60°} \cdot 3_{210°} = 12_{270°}$ $\qquad z_1^5 = (4_{60°})^5 = (4^5)_{5 \cdot 60°} = 1\,024_{300°}$

$z_2^4 = (3_{210°})^4 = (3^4)_{4 \cdot 210°} = 81_{840°} = 81_{120°}$ $\qquad \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{3_{210°}}{4_{60°}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)_{150°}$

Ahora, si se desea, se pueden pasar los resultados a la forma binómica.

2. *Calcular* $cos\ 2\alpha$ *y* $sen\ 2\alpha$ *mediante la fórmula de Moivre.*

Si desarrollamos:

$$(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^2 = cos^2\ \alpha + (2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha)i + (i\ sen\ \alpha)^2 =$$
$$= (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) + i\,(2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha)$$

Si aplicamos la fórmula de Moivre: $(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)^2 = cos\ 2\alpha + i\ sen\ 2\alpha$

Como ambas expresiones tienen que ser iguales:

$$cos\ 2\alpha + i\ sen\ 2\alpha = (cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha) + i\,(2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha)$$

Igualando la parte real y la imaginaria, obtenemos:

$$cos\ 2\alpha = cos^2\ \alpha - sen^2\ \alpha$$
$$sen\ 2\alpha = 2\ sen\ \alpha\ cos\ \alpha$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Efectúa estas operaciones y da el resultado en forma polar y en forma binómica:

a) $1_{150°} \cdot 5_{30°}$ b) $6_{45°} : 3_{15°}$

c) $2_{10°} \cdot 1_{40°} \cdot 3_{70°}$ d) $5_{(2\pi/3)\mathrm{rad}} : 1_{60°}$

e) $(1 - \sqrt{3}\,i)^5$ f) $(3 + 2i) + (-3 + 2i)$

2. Compara los resultados en cada caso:

a) $(2_{30°})^3$, $(2_{150°})^3$, $(2_{270°})^3$

b) $(2_{60°})^4$, $(2_{150°})^4$, $(2_{270°})^4$, $(2_{330°})^4$

3. Dados los complejos $z = 5_{45°}$, $w = 2_{15°}$, $t = 4i$, obtén en forma polar:

a) $z \cdot t$ b) $\dfrac{z}{w^2}$

c) $\dfrac{z^3}{w \cdot t^2}$ d) $\dfrac{z \cdot w^3}{t}$

4. Expresa $cos\ 3\alpha$ y $sen\ 3\alpha$ en función de $sen\ \alpha$ y $cos\ \alpha$ utilizando la fórmula de Moivre. Ten en cuenta que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

6.5 RADICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS

Los números reales positivos tienen dos raíces cuadradas. Por ejemplo, 2 y -2 son las raíces de 4. Los números reales negativos tienen dos raíces cuadradas imaginarias. Puedes comprobar, elevándolos al cuadrado, que $2i$ y $-2i$ son las raíces cuadradas de -4.

Vamos a probar ahora que cualquier número complejo, salvo el 0, tiene n raíces n-ésimas.

Obtención de las raíces *n*-ésimas de un número complejo

Estudiemos la relación que hay entre el módulo y el argumento de un número complejo, R_β, y los de su raíz n-ésima r_α:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt[n]{R_\beta} = r_\alpha \;\rightarrow\; (r_\alpha)^n = R_\beta \\ (r_\alpha)^n = (r^n)_{n\alpha} \end{array}\right\} R_\beta = (r^n)_{n\alpha} \left\{\begin{array}{l} R = r^n \;\rightarrow\; r = \sqrt[n]{R} \\ \beta = n\alpha \;\rightarrow\; \alpha = \dfrac{\beta}{n} \end{array}\right.$$

La **raíz *n*-ésima** de un número complejo R_β tiene un módulo $r = \sqrt[n]{R}$ y un argumento $\alpha = \dfrac{\beta}{n}$.

Sin embargo, aunque el argumento de un complejo lo mismo puede ser β que $\beta + 360°$, que $\beta + 720°$, etc., los resultados al dividir por n estos ángulos no son iguales. Estudiemos cuántos resultados distintos hay:

$$\beta + 360° \cdot k = n\alpha \;\rightarrow\; \alpha = \frac{\beta + 360° \cdot k}{n}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } k = 0 \;\rightarrow\; \alpha_1 = \dfrac{\beta}{n} \\ \text{Si } k = 1 \;\rightarrow\; \alpha_2 = \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{360°}{n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{Si } k = n-1 \;\rightarrow\; \alpha_n = \dfrac{\beta}{n} + \dfrac{360° \cdot (n-1)}{n} \end{array}\right\}$$

Al dividir $\beta + 360° \cdot k$ por n hay n posibles valores.

Por tanto, $\sqrt[n]{R_\beta}$ tiene n posibles argumentos.

Observa que si $k = n$, $\dfrac{\beta + 360° \cdot n}{n} = \dfrac{\beta}{n} + 360° = \dfrac{\beta}{n}$. Se obtiene α_1.

Y para valores superiores de k se obtienen argumentos que ya tenemos.

Un número complejo, R_β, tiene n raíces n-ésimas. Todas ellas tienen el mismo módulo $r = \sqrt[n]{R}$. Sus argumentos son:

$$\alpha_1 = \frac{\beta}{n},\quad \alpha_2 = \frac{\beta}{n} + \frac{360°}{n},\quad \alpha_3 = \frac{\beta}{n} + \frac{360°}{n} \cdot 2,\ \dots$$

$$\dots,\ \alpha_n = \frac{\beta}{n} + \frac{360°}{n} \cdot (n-1)$$

Para $n > 2$, los afijos de estas n raíces son los vértices de un n-ágono regular con centro en el origen.

ECUACIONES EN $\mathbb{C}$

Cuando nos movemos dentro de los números naturales, o de los enteros, se suele tomar como variable la letra n y cuando lo hacemos dentro de los reales, la x.

Pues bien, la variable que se suele utilizar en el campo complejo es la z. No obstante, se puede utilizar cualquier otra variable como, en concreto, la x.

¿Ecuaciones sin solución?

"*La ecuación* $x^2 + 2x + 5 = 0$ *no tiene solución*", decíamos cuando nos movíamos en el campo real. Sin embargo, si nos movemos en los números complejos diremos

"*la ecuación* $z^2 + 2z + 5 = 0$ *tiene dos soluciones*: $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = -1 - 2i$".

En tu CD se te explica cómo trabajar: con **DERIVE** (1) y con **CALCULADORA GRÁFICA** (2) algunos aspectos de esta unidad.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. *Hallar las raíces cúbicas de 8i, y representarlas.*

$8i = 8_{90°}$. Sus raíces cúbicas tienen módulo $\sqrt[3]{8} = 2$.

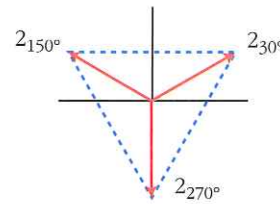
Sus argumentos son:

$$\alpha_1 = \frac{90°}{3} = 30° \qquad \alpha_2 = 30° + \frac{360°}{3} = 30° + 120° = 150°$$

$$\alpha_3 = 30° + 2 \cdot 120 = 270°$$

Así pues, las tres raíces cúbicas de $8i$ son:

$$2_{30°} \quad 2_{150°} \quad 2_{270°}$$



Es interesante observar que sus afijos ocupan los vértices de un triángulo equilátero.

2. *Hallar las raíces cuartas de*

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

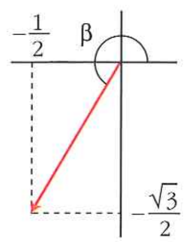
y representarlas.

Este enunciado es equivalente a este otro:

Resolver la ecuación

$$z^4 + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

En primer lugar, expresaremos z en forma polar:

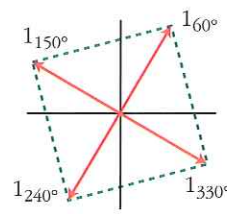


$$\begin{cases} |z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \\ tg\ \beta = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3} \ \rightarrow \ \beta = 240° \end{cases}$$

Por tanto: $z = 1_{240°}$

Las raíces cuartas de $1_{240°}$ tienen módulo 1. Sus argumentos son:

$$\frac{240° + k \cdot 360°}{4} = 60° + k \cdot 90° \ \text{ siendo } \ k = 0, 1, 2, 3.$$



Los afijos de las cuatro raíces cuartas, $1_{60°}$, $1_{150°}$, $1_{240°}$, $1_{330°}$, ocupan los vértices de un cuadrado centrado en el origen.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Halla las seis raíces sextas de 1. Represéntalas y exprésalas en forma binómica.

2. Resuelve la ecuación $z^3 + 27 = 0$. Representa sus soluciones.

3. Calcula:

a) $\sqrt[3]{-i}$ b) $\sqrt[4]{-8 + 8\sqrt{3}i}$

c) $\sqrt{-25}$ d) $\sqrt{\dfrac{-2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}}$

4. Resuelve las ecuaciones:

a) $z^4 + 1 = 0$ b) $z^6 + 64 = 0$

5. Comprueba que si z y w son dos raíces sextas de 1, entonces también lo son los resultados de las siguientes operaciones:

$$z \cdot w, \ z/w, \ z^2, \ z^3$$

6. El número $4 + 3i$ es la raíz cuarta de un cierto número complejo, z. Halla las otras tres raíces cuartas de z.

7. Calcula las siguientes raíces y representa gráficamente sus soluciones:

a) $\sqrt{-9}$ b) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{2 - 2i}$

d) $\sqrt[3]{\dfrac{1 - i}{1 + i}}$ e) $\sqrt[5]{\dfrac{-32}{i}}$ f) $\sqrt[3]{8i}$

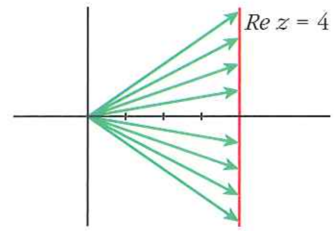
LENGUAJE MATEMÁTICO

EL LENGUAJE GRÁFICO PARA INTERPRETAR LOS NÚMEROS COMPLEJOS

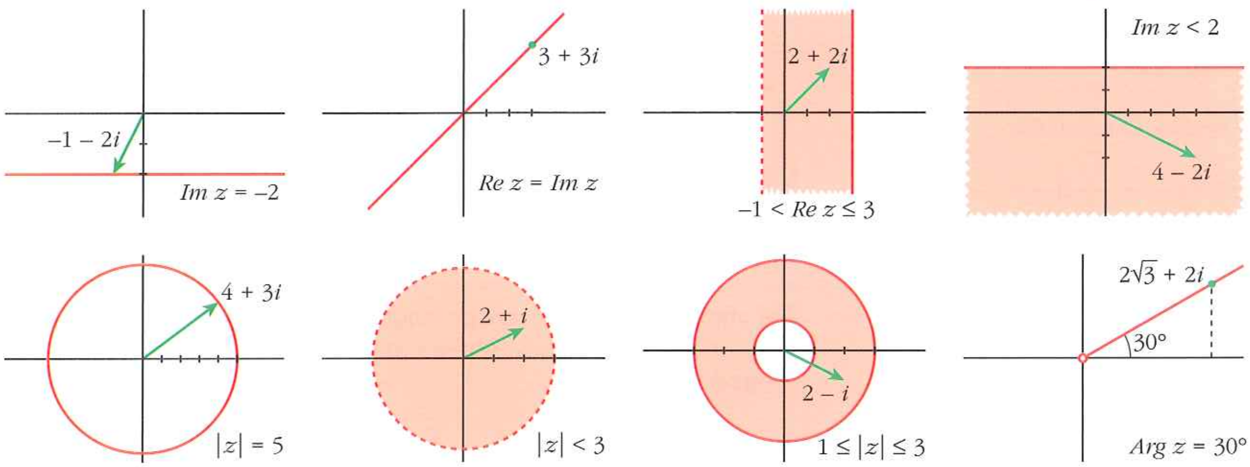
En el siglo XVII y buena parte del XVIII, a pesar de los buenos resultados que algebraicamente producían los números complejos, gran parte de los matemáticos se mostraban recelosos ante esos extraños seres. Solo cuando se les supo dar una representación geométrica adecuada (Gauss, finales del XVIII) fueron plenamente aceptados por la comunidad matemática.

Mediante esta representación sobre el plano se identifican *familias de números complejos* con *curvas* o con *recintos planos*. Las *familias* quedan caracterizadas mediante ecuaciones o inecuaciones en las que las incógnitas son la parte real de la variable z $(Re\ z)$, la parte imaginaria $(Im\ z)$, su módulo $(|z|)$ o su argumento $(Arg\ z)$.

Por ejemplo: *¿dónde están situados todos los números complejos cuya parte real vale 4?* Esta familia queda caracterizada por la ecuación $Re\ z = 4$ y se representa, obviamente, como vemos en la figura adjunta.

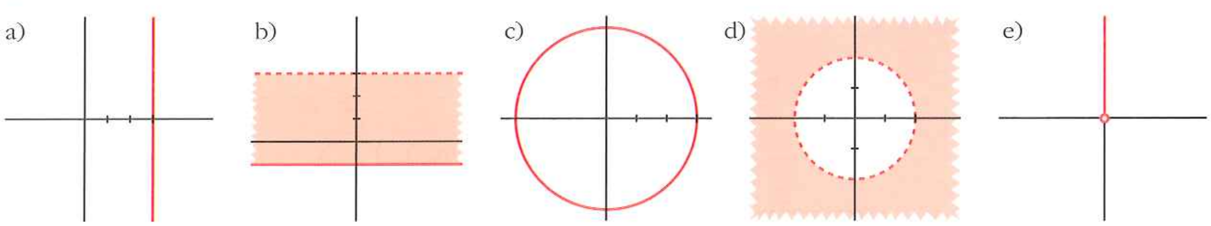


Análogamente:



EJERCICIOS

1. Pon la ecuación o inecuación que caracteriza los siguientes recintos o líneas:



Describe con palabras cada una de las familias ("son los números complejos cuya parte real vale …") y da un representante de cada una de ellas.

2. Representa:

a) $Re\ z = -3$ b) $Im\ z = 0$ c) $3 < Re\ z \leq 5$ d) $|z| \geq 4$ e) $Arg\ z = 180°$

1 Operaciones con números complejos

Calcula en forma binómica:

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-3i}$$

$$\frac{(2+i)^2+(1-i)^2}{1-3i} = \frac{(4+4i+i^2)+(1-2i+i^2)}{1-3i} =$$

$$= \frac{4+4i-1+1-2i-1}{1-3i} = \frac{3+2i}{1-3i} =$$

$$= \frac{(3+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{3+9i+2i+6i^2}{1^2-(3i)^2} =$$

$$= \frac{3+11i-6}{1+9} = \frac{-3+11i}{10} = \boxed{-\frac{3}{10}+\frac{11}{10}i}$$

2 Parte real y parte imaginaria

Halla el valor que debe tener x para que el cociente

$$\frac{1+3xi}{3-4i} \quad \textit{sea:}$$

a) Un número real.

b) Un número imaginario puro.

Hallamos el cociente en forma binómica:

$$\frac{1+3xi}{3-4i} = \frac{(1+3xi)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{3+4i+9xi+12xi^2}{3^2-(4i)^2} =$$

$$= \frac{3+4i+9xi-12x}{9+16} = \frac{(3-12x)+(4+9x)i}{25} =$$

$$= \frac{(3-12x)}{25} + \frac{(4+9x)}{25}i$$

a) Para obtener un número real, su parte imaginaria ha de ser igual a cero:

$$\frac{4+9x}{25} = 0 \rightarrow 4+9x=0 \rightarrow 9x=-4 \rightarrow \boxed{x=-\frac{4}{9}}$$

b) Para obtener un número imaginario puro, su parte real ha de ser igual a cero:

$$\frac{3-12x}{25} = 0 \rightarrow 3-12x=0 \rightarrow 12x=3 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

3 Ecuaciones en $\mathbb{C}$

Resuelve en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones:

a) $z^2-4z+13=0$

b) $z^3+1=0$

a) Despejamos z:

$$z = \frac{4\pm\sqrt{16-52}}{2} = \frac{4\pm\sqrt{-36}}{2} \overset{(*)}{=} \frac{4\pm 6i}{2} = \begin{cases} z_1 = 2+3i \\ z_2 = 2-3i \end{cases}$$

(*) ya que $\sqrt{-36} = \sqrt{36}\,\sqrt{-1} = 6i$

b) $z = \sqrt[3]{-1}$ Pasamos -1 a forma polar $(1_{180°})$ y calculamos las raíces cúbicas:

$$z = \sqrt[3]{1_{180°}} = \sqrt[3]{1}_{\frac{180°+360°k}{3}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{Si } k=0, \; z_1 = 1_{60°} = \cos 60° + i\,\text{sen}\, 60° = 1/2 + (\sqrt{3}/2)i \\ \text{Si } k=1, \; z_2 = 1_{180°} = 1(\cos 180° + i\,\text{sen}\, 180°) = -1 \\ \text{Si } k=2, \; z_3 = 1_{300°} = 1(\cos 300° + i\,\text{sen}\, 300°) = 1/2 - (\sqrt{3}/2)i \end{cases}$$

4 Operaciones con números complejos en forma polar

Sean:

$A = (-1 + i\sqrt{3})^4$

$B = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

$C = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$

Prueba que:

$A \cdot B \cdot C = 8 - 8\sqrt{3}i$

Pasamos A, B y C a forma polar para efectuar las operaciones:

- $\left|-1 + i\sqrt{3}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$
  $tg\ \alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \to \alpha = 120°$ (2º cuadrante)
  $\Big\}\ -1 + i\sqrt{3} = 2_{120°}$

- $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$
  $tg\ \alpha = \frac{-\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3} \to \alpha = 300°$ (4º cuadrante)
  $\Big\}\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{300°}$

- $\left|-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right| = 1$
  $tg\ \alpha = +\sqrt{3} \to \alpha = 240°$ (3er cuadrante)
  $\Big\}\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1_{240°}$

Operamos:

$$(2_{120°})^4 \cdot (1_{300°})^3 \cdot (1_{240°})^3 = 16_{480°} \cdot 1_{900°} \cdot 1_{720°} = 16_{2\,100°} = 16_{300°}$$

Pasamos el resultado a forma binómica:

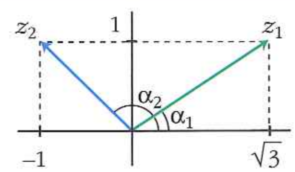
$$16_{300°} = 16\,(\cos 300° + i\ \mathrm{sen}\ 300°) = 16\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 8 - 8\sqrt{3}i$$

5 Radicación de números complejos

Calcula esta raíz cúbica:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{3} + i}{-1 + i}\right)^2}$$

- Representamos $z_1 = \sqrt{3} + i$ y $z_2 = -1 + i$ y pasamos a forma polar:



$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

$|z_2| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$tg\ \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \to \alpha_1 = 30°$; $\qquad tg\ \alpha_2 = \frac{1}{-1} = -1 \to \alpha_2 = 135°$

$$\sqrt[3]{\left[\frac{2_{30°}}{\sqrt{2}_{135°}}\right]^2} = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{-105°}\right]^2} = \sqrt[3]{\left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{255°}\right]^2} = \sqrt[3]{2_{510°}} = \sqrt[3]{2_{150°}}$$

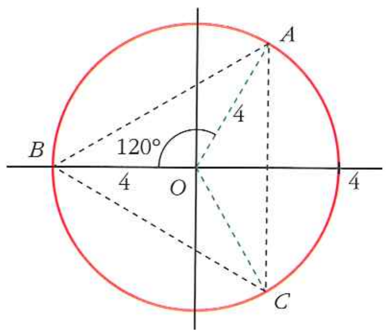
- De los infinitos argumentos que admite un número complejo, tomamos el que está entre $0°$ y $360°$. Por ello pasamos de $-105°$ a $-105° + 360° = 255°$ y de $510°$ a $510° - 360° = 150°$.

- Hallamos las raíces cúbicas: $\sqrt[3]{2_{150°}} = \sqrt[3]{2}_{\frac{150° + 360° \cdot k}{3}}$, $k = 0, 1, 2$

  Son: $\boxed{\sqrt[3]{2}_{50°};\ \sqrt[3]{2}_{170°};\ \sqrt[3]{2}_{290°}}$

6 Radicación de números complejos

Halla las coordenadas de los vértices del triángulo ABC, sabiendo que son los afijos de las raíces cúbicas de –64. Calcula su área.



- Expresamos –64 en forma polar para hallar las raíces cúbicas:

$$\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{64_{180^\circ}} = \sqrt[3]{64}_{\frac{180^\circ + 360^\circ \cdot k}{3}} \rightarrow 4_{60^\circ},\ 4_{180^\circ},\ 4_{300^\circ}$$

- Las pasamos a forma binómica:

$$4_{60^\circ} = 4(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 2 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$4_{180^\circ} = -4 \qquad 4_{300^\circ} = 2 - 2\sqrt{3}\,i$$

Los vértices del triángulo son:

$$\boxed{A(2,\ 2\sqrt{3});\ B(-4,\ 0);\ C(2,\ -2\sqrt{3})}$$

- Para hallar el área, calculamos el lado aplicando el teorema del coseno en el triángulo AOB:

$$\overline{AB}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ = 48 \rightarrow \overline{AB} = 4\sqrt{3}$$

Como el triángulo es equilátero, su altura es:

$$h^2 = (4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 36 \rightarrow h = 6$$

$$\boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}\, 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}}$$

7 Razones trigonométricas de un ángulo

Determina el valor de cos 15° y sen 15° a partir de la división $1_{60^\circ} : 1_{45^\circ}$.

Al hacer la división obtenemos:

$$1_{60^\circ} : 1_{45^\circ} = 1_{15^\circ} = 1 \cdot (\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ) = \cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ$$

Efectuamos el cociente en forma binómica:

$$\frac{1_{60^\circ}}{1_{45^\circ}} = \frac{\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ}{\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{2} + \sqrt{2}i} =$$

$$= \frac{(1 + \sqrt{3}i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)}{(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}i + \sqrt{6}i + \sqrt{6}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2}i)^2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) + (\sqrt{6} - \sqrt{2})i}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i$$

Igualando ambos resultados, tenemos que:

$$\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} i$$

Por tanto: $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$, $\operatorname{sen} 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números complejos en forma binómica

1 Calcula:

a) $(3 + 2i)(2 - i) - (1 - i)(2 - 3i)$

b) $3 + 2i(-1 + i) - (5 - 4i)$

c) $-2i - (4 - i)5i$

d) $(4 - 3i)(4 + 3i) - (4 - 3i)^2$

2 Calcula en forma binómica:

a) $\dfrac{(3 + 3i)(4 - 2i)}{2 - 2i}$ b) $\dfrac{-2 + 3i}{(4 + 2i)(-1 + i)}$

c) $\dfrac{2 + 5i}{3 - 2i}(1 - i)$ d) $\dfrac{1 + i}{2 - i} + \dfrac{-3 - 2i}{1 + 3i}$

3 Dados los números complejos $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$, calcula:

a) zwt b) $zt - w(t + z)$ c) $\dfrac{w}{z}t$

d) $\dfrac{2z - 3t}{w}$ e) $\dfrac{3z + it}{3}w$ f) $\dfrac{z^2 - wt^2}{2}$

4 Calcula: a) i^{37} b) i^{126} c) i^{-7} d) i^{64} e) i^{-216}

5 Dado el número complejo $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, prueba que:

a) $1 + z + z^2 = 0$ b) $\dfrac{1}{z} = z^2$

Igualdad de números complejos

6 Calcula m y n para que se verifique la igualdad $(2 + mi) + (n + 5i) = 7 - 2i$.

7 Determina k para que el cociente $\dfrac{k + i}{1 + i}$ sea igual a $2 - i$.

8 Calcula a y b de modo que se verifique:

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

☛ *Desarrolla el cuadrado; iguala la parte real a 3, y la parte imaginaria a 4.*

9 Dados los complejos $2 - ai$ y $3 - bi$, halla a y b para que su producto sea igual a $8 + 4i$.

10 Calcula el valor de a y b para que se verifique:

$$a - 3i = \frac{2 + bi}{5 - 3i}$$

11 Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea un número:

a) Imaginario puro. b) Real.

12 Determina a para que $(a - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.

13 Calcula x para que el resultado del producto $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.

Números complejos en forma polar

14 Representa estos números complejos, sus opuestos y sus conjugados. Exprésalos en forma polar.

a) $1 - i$ b) $-1 + i$ c) $\sqrt{3} + i$ d) $-\sqrt{3} - i$

e) -4 f) $2i$ g) $-\dfrac{3}{4}i$ h) $2 + 2\sqrt{3}i$

15 Escribe en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $2_{45°}$ b) $3_{(\pi/6)}$ c) $\sqrt{2}_{180°}$ d) $17_{0°}$

e) $1_{(\pi/2)}$ f) $5_{270°}$ g) $1_{150°}$ h) $4_{100°}$

16 Dados los números complejos: $z_1 = 2_{270°}$, $z_2 = 4_{120°}$; $z_3 = 3_{315°}$, calcula:

a) $z_1 \cdot z_2$ b) $z_2 \cdot z_3$ c) $z_1 \cdot z_3$

d) $\dfrac{z_3}{z_1}$ e) $\dfrac{z_2}{z_1}$ f) $\dfrac{z_1 \cdot z_3}{z_2}$

g) z_1^2 h) z_2^3 i) z_3^4

17 Expresa en forma polar y calcula:

a) $(-1 - i)^5$ b) $\sqrt[4]{1 - \sqrt{3}i}$ c) $\sqrt[6]{64}$

d) $\sqrt[3]{8i}$ e) $\left(-2\sqrt{3} + 2i\right)^6$ f) $(3 - 4i)^3$

18 Calcula y representa gráficamente el resultado:

a) $\left(\dfrac{1 - i}{\sqrt{3} + i}\right)^3$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{1 + i}{2 - i}}$

19 Calcula y representa las soluciones:

a) $\sqrt[3]{4 - 4\sqrt{3}i}$ b) $\sqrt[4]{-16}$ c) $\sqrt[3]{8i}$

20 Calcula pasando a forma polar:

a) $(1 + i\sqrt{3})^5$ b) $(-1 - i\sqrt{3})^6 (\sqrt{3} - i)$

c) $\sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i}$ d) $\dfrac{8}{(1 - i)^5}$

e) $\sqrt[6]{-64}$ f) $\sqrt{-1 - i}$

g) $\sqrt[3]{-i}$ h) $\sqrt{\dfrac{2 - 2i}{-3 + 3i}}$

21 Expresa en forma polar z, su opuesto $-z$, y su conjugado $\bar{z}$ en cada uno de estos casos:

a) $z = 1 - \sqrt{3}i$

b) $z = -2 - 2i$

c) $z = -2\sqrt{3} + 2i$

22 Representa los polígonos regulares que tienen por vértices los afijos de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{i}$ b) $\sqrt[6]{-1}$ c) $\sqrt[4]{2\sqrt{3} + 2i}$

Ecuaciones y sistemas en $\mathbb{C}$

23 Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $z^2 + 4 = 0$ b) $z^2 + z + 4 = 0$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0$ d) $z^2 - z + 1 = 0$

24 Resuelve las ecuaciones:

a) $z^5 + 32 = 0$ b) $iz^3 - 27 = 0$

c) $z^3 + 8i = 0$ d) $iz^4 + 4 = 0$

25 Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 4i = 0$ b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$ d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

26 Obtén las cuatro soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $z^4 - 1 = 0$ b) $z^4 + 16 = 0$ c) $z^4 - 8z = 0$

27 Halla los números complejos z y w que verifican cada uno de estos sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ z - w = -3 + 4i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z + 2w = 2 + i \\ iz + w = 5 + 5i \end{cases}$

PARA RESOLVER

28 Calcula m para que el número complejo $3 - mi$ tenga el mismo módulo que $2\sqrt{5} + \sqrt{5}\,i$.

29 Halla dos números complejos tales que su cociente sea 3, la suma de sus argumentos $\pi/3$, y la suma de sus módulos 8.

☛ *Llámalos r_α y s_β y escribe las ecuaciones que los relacionan:*

$\dfrac{r_\alpha}{s_\beta} = 3_{0^\circ}$ (0° es el argumento del cociente, $\alpha - \beta = 0°$);

$r + s = 8$ y $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{3}$.

30 El producto de dos números complejos es 2_{90° y el cubo del primero dividido por el otro es $(1/2)_{0^\circ}$. Hállalos.

31 El producto de dos números complejos es -8 y el primero es igual al cuadrado del segundo. Calcúlalos.

32 De dos números complejos sabemos que:

- Tienen el mismo módulo, igual a 2.
- Sus argumentos suman $17\pi/6$.
- El primero es opuesto del segundo.

¿Cuáles son esos números?

33 Calcula *cos* 75° y *sen* 75° mediante el producto $1_{30^\circ} \cdot 1_{45^\circ}$.

34 Halla las razones trigonométricas de 15° conociendo las de 45° y las de 30° mediante el cociente $1_{45^\circ} : 1_{30^\circ}$.

35 ¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\dfrac{x - 4i}{x + i}$?

36 Halla, en función de x, el módulo de $z = \dfrac{1 + xi}{1 - xi}$.

Demuestra que $|z| = 1$ para cualquier valor de x.

37 Calcula x para que el número complejo que obtenemos al dividir $\dfrac{x + 2i}{4 - 3i}$ esté representado en la bisectriz del primer cuadrante.

☛ *Para que $a + bi$ esté en la bisectriz del primer cuadrante, debe ser $a = b$.*

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

38 Halla dos números complejos conjugados cuya suma es 8 y la suma de sus módulos es 10.

39 La suma de dos números complejos es $3 + i$. La parte real del primero es 2, y el producto de ambos es un número real. Hállalos.

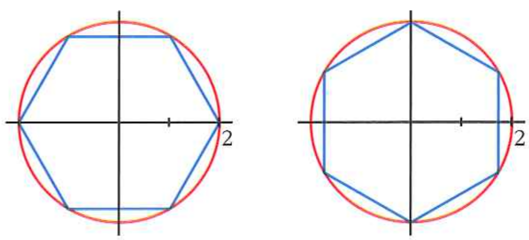
40 Representa gráficamente los resultados que obtengas al hallar $\sqrt[3]{-2-2i}$ y calcula el lado del triángulo que se forma al unir esos tres puntos.

41 Los afijos de las raíces cúbicas de $8i$ son los vértices de un triángulo equilátero. Compruébalo.

¿Determinan el mismo triángulo los afijos de $\sqrt[3]{-8i}$, $\sqrt[3]{8}$ o $\sqrt[3]{-8}$? Representa gráficamente esos cuatro triángulos que has obtenido.

42 ¿Pueden ser $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ y $z_4 = 1 - 2i$, las raíces de un número complejo? Justifica tu respuesta.

43 Halla los números complejos que corresponden a los vértices de estos hexágonos:



44 ¿Pueden ser las raíces de un número complejo, z, los números $2_{28°}$, $2_{100°}$, $2_{172°}$, $2_{244°}$ y $2_{316°}$? En caso afirmativo, halla z.

☛ *Comprueba si el ángulo que forman cada dos de ellas es el de un pentágono regular.*

45 El número complejo $3_{40°}$ es vértice de un pentágono regular. Halla los otros vértices y el número complejo cuyas raíces quintas son esos vértices.

☛ *Para obtener los otros vértices puedes multiplicar cada uno por* $1_{72°}$.

46 Una de las raíces cúbicas de un número complejo z es $1 + i$. Halla z y las otras raíces cúbicas.

☛ *Ten en cuenta que si* $\sqrt[3]{z} = 1 + i \rightarrow z = (1+i)^3$.

47 Escribe una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $1 + i$ y $1 - i$.

☛ *Mira el ejercicio resuelto 1 de la página 151.*

48 Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean:

a) $5i$ y $-5i$ b) $2 - 3i$ y $2 + 3i$

49 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $\begin{cases} z + w = -1 + 2i \\ iz + (1-i)w = 1 + 3i \end{cases}$

b) $\begin{cases} z - w = 5 - 3i \\ (2+i)z + iw = 3 - 3i \end{cases}$

Interpretación gráfica de igualdades y desigualdades entre complejos

50 Representa.

a) $Re\ z = 2$ b) $Im\ z = 1$

c) $Re\ z \le 0$ d) $-1 \le Im\ z \le 3$

e) $-2 < Re\ z < 5$ f) $|z| \le 3$

g) $Arg\ z = 45°$ h) $0° \le Arg\ z \le 90°$

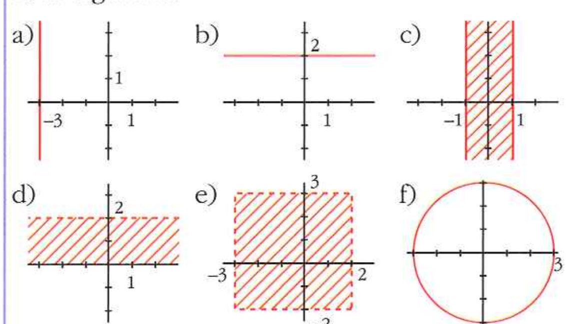
51 Representa los números complejos z tales que $z + \overline{z} = -3$.

☛ *Escribe* z *en forma binómica, súmale su conjugado y representa la condición que obtienes.*

52 Representa los números complejos que verifican:

a) $\overline{z} = -z$ b) $|z + \overline{z}| = 3$ c) $|z - \overline{z}| = 4$

53 Escribe las condiciones que deben cumplir los números complejos cuya representación gráfica es la siguiente:



☛ *En a), b) y f) es una igualdad. En c) y d), una desigualdad. En e), dos desigualdades.*

CUESTIONES TEÓRICAS

54 ¿Se puede decir que un número complejo es real si su argumento es 0?

55 Si $z = r_\alpha$, ¿qué relación tienen con z los números $r_{\alpha + 180°}$ y $r_{360° - \alpha}$?

56 Comprueba que: a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ c) $\overline{kz} = k\,\overline{z}$, con $k \in \mathbb{R}$

57 Demuestra que $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.

58 El producto de dos números complejos imaginarios, ¿puede ser real? Acláralo con un ejemplo.

59 Representa el número complejo $z = 4 - 3i$. Multiplícalo por i y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo que si aplicas a z un giro de $90°$.

60 ¿Qué relación existe entre el argumento de un complejo y el de su opuesto?

61 ¿Qué condición debe cumplir un número complejo $z = a + bi$ para que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$?

☛ *Halla $\dfrac{1}{z}$, e iguala a $a - bi$.*

PARA PROFUNDIZAR

62 Un pentágono regular con centro en el origen de coordenadas tiene uno de sus vértices en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Halla los otros vértices y la longitud de su lado.

63 Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?

64 Calcula el inverso de los números complejos siguientes y representa gráficamente el resultado que obtengas:

a) $3_{\pi/3}$ b) $2i$ c) $-1 + i$

¿Qué relación existe entre el módulo y el argumento de un número complejo y de su inverso?

65 Representa gráficamente las igualdades siguientes. ¿Qué figura se determina en cada caso?

a) $|z - (1 + i)| = 5$

b) $|z - (5 + 2i)| = 3$

66 Escribe la condición que verifican todos los números complejos cuyos afijos estén en la circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 3.

AUTOEVALUACIÓN

1. Efectúa.

$$\frac{(3 - 2i)^2 - (1 + i)(2 - i)}{-3 + i}$$

2. Calcula z y expresa los resultados en forma binómica.

$$\sqrt[4]{z} = \frac{-\sqrt{3} + i}{\sqrt{2}\,i}$$

3. Halla a y b para que se verifique la igualdad:

$$5(a - 2i) = (3 + i)(b - i)$$

4. Resuelve la ecuación: $z^2 - 10z + 29 = 0$

5. Calcula el valor que debe tomar x para que el módulo de $\dfrac{x + 2i}{1 - i}$ sea igual a 2.

6. Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} - 4i$.

7. Representa gráficamente.

a) $1 \le Im\, z \le 5$ b) $|z| = 3$ c) $z + \overline{z} = -4$

8. Halla dos números complejos tales que su cociente sea $2_{150°}$ y su producto $18_{90°}$.

9. Demuestra que $|z \cdot \overline{z}| = |z|^2$.

10. Calcula $cos\ 120°$ y $sen\ 120°$ a partir del producto $1_{90°} \cdot 1_{30°}$.

11. Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de $30°$ con centro en el origen.

3. En tu CD puedes encontrar las resoluciones de todos estos ejercicios.

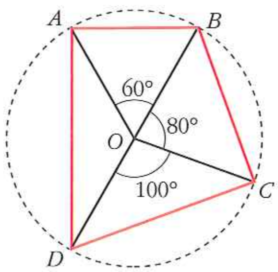
Autoevaluación

BLOQUE II: Trigonometría y números complejos

1. En el triángulo *ABC*, rectángulo en *A*, conocemos $tg\ \hat{B} = 1{,}5$ y $b = 6$ cm.

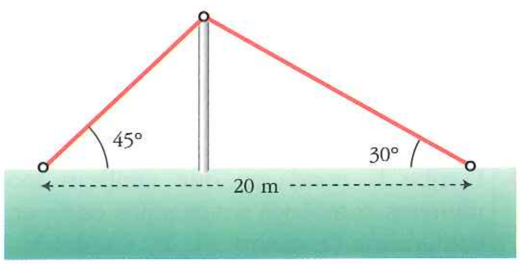
Halla los lados y los ángulos del triángulo.

2. Halla el perímetro del cuadrilátero *ABCD* inscrito en una circunferencia de 6 cm de radio.



3. Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura.

¿Cuánto miden el mástil y el cable?



4. Justifica si existe algún ángulo α tal que $tg\ \alpha = \dfrac{2}{3}$ y $sen\ \alpha = \dfrac{1}{2}$.

5. Las diagonales de un paralelogramo miden 16 cm y 28 cm y forman un ángulo de 48°. Calcula el perímetro y el área de dicho paralelogramo.

6. Busca, en cada caso, un ángulo del primer cuadrante que tenga una razón trigonométrica igual que el ángulo dado y di cuál es esa razón.

a) 297°   b) 1 252°

c) –100°   d) $\dfrac{13\pi}{5}$

7. Si $tg\ \alpha = 2$ y $cos\ \alpha > 0$, halla:

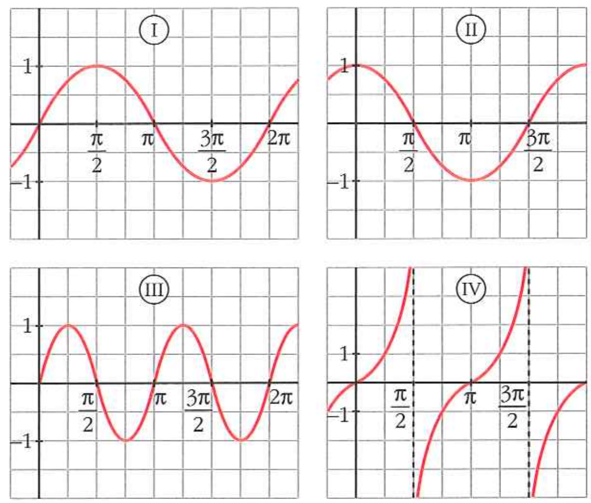
a) $cos\ 2\alpha$ b) $sen\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$

c) $sen\ \dfrac{\alpha}{2}$ d) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right)$

8. Asocia a cada grafica una de estas fórmulas:

a) $y = tg\ x$ b) $y = sen\ 2x$

c) $y = cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ d) $y = sen\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$



9. Demuestra que:

$$cos^4 x - sen^4 x = 2\ cos^2 x - 1$$

10. Resuelve:

a) $2sen\ x + cos\ x = 1$

b) $\begin{cases} sen\ 3x + sen\ y = \dfrac{3}{2} \\ cos\ \dfrac{3x - y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

11. Dado el número complejo $z = 3_{60°}$, expresa en forma polar el conjugado, el opuesto y el inverso.

12. Simplifica: $\dfrac{i^{10} - 2i^7}{2 + i^{33}}$

13. Escribe una ecuación de segundo grado cuyas soluciones sean $-1 + \sqrt{3}i$ y $-1 - \sqrt{3}i$.

14. Encuentra dos números complejos cuya suma sea 10 y cuyo producto sea 40.

15. Un cuadrado cuyo centro es el origen de coordenadas tiene un vértice en el afijo del número complejo $1 + \sqrt{3}i$. Determina los otros vértices y la medida del lado del cuadrado.

En tu CD tienes las resoluciones de estos ejercicios.