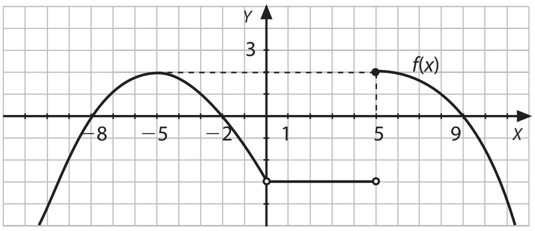
Evaluación

NOMBRE ______________ **APELLIDOS** ______________

CURSO Y GRUPO ______________ **FECHA** ______________ **CALIFICACIÓN** ______________

1 A partir de la función representada en la siguiente gráfica, indica qué afirmaciones son ciertas:



a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
Rec $f(x) = (-3, -\infty)$
$f(0) = -3$, $f(2) = -3$
$f^{-1}(2) = -5$, $f^{-1}(-3) = (0, 5)$

b) Dom $f(x) = \mathbb{R}$
Rec $f(x) = (2, -\infty)$
$f(2) = -3$, $f(5) = -3$
$f^{-1}(2) = -5$, $f^{-1}(-3) = (0, 5]$

c) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
Rec $f(x) = (-\infty, 2]$
$f(2) = -3$, $f(5) = 2$
$f^{-1}(2) = \{-5, 5\}$, $f^{-1}(0) = \{-8, -2, 9\}$

2 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 4x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

su dominio y su recorrido son:

a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$ y Rec $f(x) = \mathbb{R} - [-1, 0)$

b) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$ y Rec $f(x) = (0, +\infty)$

c) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ y Rec $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

3 Dadas estas funciones indica qué afirmaciones son ciertas:

$f(x) = 2x + \sqrt{x-1}$ $\quad$ $i(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$

$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$ $\quad$ $j(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2+x}$

$h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ $\quad$ $k(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

a) $\mathbb{R}$ es el dominio de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

b) $[1, +\infty)$ es el dominio de $f(x)$ y $j(x)$.

c) $[-1, 2]$ es el dominio de $i(x)$ y $k(x)$.

4 Dadas las funciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$:

a) $(f+g)(x) = \dfrac{x+3}{x}$, Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $(f+g)(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$, Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $(f+g)(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x}$, Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{0, -2\}$

5 Halla la función producto y el dominio de las funciones $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$:

a) $(f \cdot g) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-3}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b) $(f \cdot g) = \dfrac{x+1}{x \cdot (x-1)}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

c) $(f \cdot g) = \dfrac{x-3}{x}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

6 Dadas $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, determina la función compuesta de f y g:

a) $(g \circ f)(x) = \dfrac{3-x}{x}$, Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{3x-1}$, Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$

c) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{3x-1}$, Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

7 La función inversa respecto de la composición de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-x}$ es:

a) $f(x)$ no tiene inversa, puesto que no es inyectiva.

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{x \cdot (1-x) + 1}{2}$

8 Un agricultor recoge 1 000 kg de melocotones diarios durante quince días. La cooperativa del pueblo está dispuesta a comprarlos a 1,2 €/kg, pero su precio disminuye 0,05 € por día. Por otro lado, al agricultor se le pudren 300 kg de melocotones cada día.

Expresa la función que proporciona las ganancias de la venta de los melocotones, en euros, según los días transcurridos, tomando el primer día como $x = 0$.

a) $G(x) = -35x^2 + 790x + 1200$

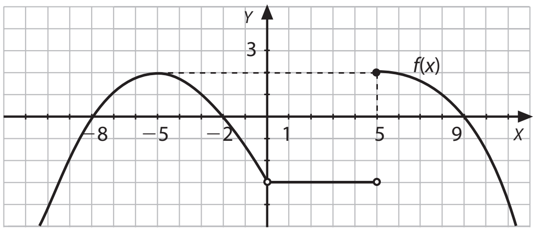
b) $G(x) = -35x^2 + 630x$

c) $G(x) = -15x^2 - 220x + 900$

Solución de la evaluación

(Se indican con ▶ las respuestas correctas)

1 A partir de la función representada en la siguiente gráfica, indica qué afirmaciones son ciertas:



a) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
Rec $f(x) = (-3, -\infty)$
$f(0) = -3$, $f(2) = -3$
$f^{-1}(2) = -5$, $f^{-1}(-3) = (0, 5)$

b) Dom $f(x) = \mathbb{R}$
Rec $f(x) = (2, -\infty)$
$f(2) = -3$, $f(5) = -3$
$f^{-1}(2) = -5$, $f^{-1}(-3) = (0, 5]$

▶ ***c)*** Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
Rec $f(x) = (-\infty, 2]$
$f(2) = -3$, $f(5) = 2$
$f^{-1}(2) = \{-5, 5\}$, $f^{-1}(0) = \{-8, -2, 9\}$

2 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x < 2 \\ -x^2 + 4x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

su dominio y su recorrido son:

▶ ***a)*** Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$ y Rec $f(x) = \mathbb{R} - [-1, 0)$

b) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{2\}$ y Rec $f(x) = (0, +\infty)$

c) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 2\}$ y Rec $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

3 Dadas estas funciones indica qué afirmaciones son ciertas:

$f(x) = 2x + \sqrt{x-1}$ $\qquad$ $i(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$

$g(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x - 2}$ $\qquad$ $j(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{2+x}$

$h(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$ $\qquad$ $k(x) = \sqrt{-x^2+x+2}$

a) $\mathbb{R}$ es el dominio de $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$.

▶ ***b)*** $[1, +\infty)$ es el dominio de $f(x)$ y $j(x)$.

c) $[-1, 2]$ es el dominio de $i(x)$ y $k(x)$.

4 Dadas las funciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$:

a) $(f+g)(x) = \dfrac{x+3}{x}$, Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{0\}$

▶ ***b)*** $(f+g)(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x}$, Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $(f+g)(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x}$, Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{0, -2\}$

5 Halla la función producto y el dominio de las funciones $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{x-3}{x-1}$:

a) $(f \cdot g) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-3}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

b) $(f \cdot g) = \dfrac{x+1}{x \cdot (x-1)}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

▶ ***c)*** $(f \cdot g) = \dfrac{x-3}{x}$, Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

6 Dadas $f(x) = 3x - 1$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$, determina la función compuesta de f y g:

a) $(g \circ f)(x) = \dfrac{3-x}{x}$, $\quad$ Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}$

b) $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{3x-1}$, $\quad$ Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{0, \dfrac{1}{3}\right\}$

▶ ***c)*** $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{3x-1}$, $\quad$ Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

7 La función inversa respecto de la composición de la función $f(x) = \dfrac{2x-1}{1-x}$ es:

a) $f(x)$ no tiene inversa, puesto que no es inyectiva.

▶ ***b)*** $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{x \cdot (1-x) + 1}{2}$

8 Un agricultor recoge 1 000 kg de melocotones diarios durante quince días. La cooperativa del pueblo está dispuesta a comprarlos a 1,2 €/kg, pero su precio disminuye 0,05 € por día. Por otro lado, al agricultor se le pudren 300 kg de melocotones cada día.

Expresa la función que proporciona las ganancias de la venta de los melocotones, en euros, según los días transcurridos, tomando el primer día como $x = 0$.

▶ ***a)*** $G(x) = -35x^2 + 790x + 1200$

b) $G(x) = -35x^2 + 630x$

c) $G(x) = -15x^2 - 220x + 900$

1. Características de las funciones

1 Una función es una ____________________ entre dos conjuntos, de manera que a cada elemento del conjunto original le corresponde ____________________ del conjunto imagen.

2 ¿Por qué la expresión $y^2 = 3 + 2x$ no corresponde a una función?

____

____

3 Dada una función real de variable real, completa las definiciones de dominio y recorrido:

Dom $f = \{ x \in \quad | \quad \}$

Rec $f = \{ y \in \quad | \quad \}$

4 Si $f(x)$ es una función polinómica, su dominio es el conjunto ____________________

5 Si $f(x)$ es una función racional, su dominio está formado por ____________________

____

6 Si $f(x)$ es una función irracional, de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, con n par, su dominio se define como:

Dom $f = \{ x \in \quad | \quad \}$

7 ¿Cómo se pueden determinar los intervalos de signo constante de una función?

____

____

____

8 ¿Cuándo es una función creciente en un intervalo?

____

____

____

9 Cuando una función $f(x)$ cumple que $f(x) = f(-x)$, para cualquier x de su dominio, la función es __________, y su gráfica es simétrica respecto del ____________________

10 Una función simétrica respecto del origen de coordenadas es ____________________, y se verifica, para cualquier x de su dominio, que ____________________

11 Si una función cumple que $|f(x)| \leq k$, $k \in \mathbb{R}$, se dice que la función está ____________________ .
k se denomina ____________________ de *f*.

12 ¿Qué característica presentan las gráficas de las funciones periódicas?

13 Para que dos funciones sean iguales, ¿qué condiciones deben cumplirse?

14 Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, cuyos respectivos dominios son Dom *f* y Dom *g*, define las funciones suma, producto y cociente de *f* y *g*:

15 ¿Cómo se define la función que resulta de aplicar primero una función *f* sobre *x*, y después a la imagen obtenida, una función *g*?

16 ¿Qué funciones admiten inversa respecto de la composición de funciones?

17 Indica la característica gráfica que presentan las funciones que admiten inversa respecto de la composición de funciones.

2. Actividades complementarias

1 **Averigua el dominio de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{5-x}}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x-1}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{\sqrt[3]{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-x}}$

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2-5x-2}}{x}$

f) $f(x) = 3x^2 + x - \sqrt{x} - 2$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$

h) $f(x) = \dfrac{2x^2+2x-1}{2x^4-3x^3-3x^2+2x}$

i) $f(x) = \dfrac{2x+|x|}{2x-|x|}$

2 **Encuentra el recorrido de las siguientes funciones con la ayuda de su representación gráfica:**

a) $f(x) = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$

b) $f(x) = x^2 - 1$

c) $f(x) = -x^2 + 3x - 2$

d) $f(x) = \sqrt{x+4}$

e) $f(x) = \dfrac{3-x}{x}$

f) $f(x) = \left|\dfrac{3-x}{x}\right|$

g) $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$

h) $f(x) = \dfrac{1-x}{2-x}$

3 **Estudia el signo de las siguientes funciones:**

a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{2-3x}$

d) $f(x) = \dfrac{x+1}{(x-1)^2}$

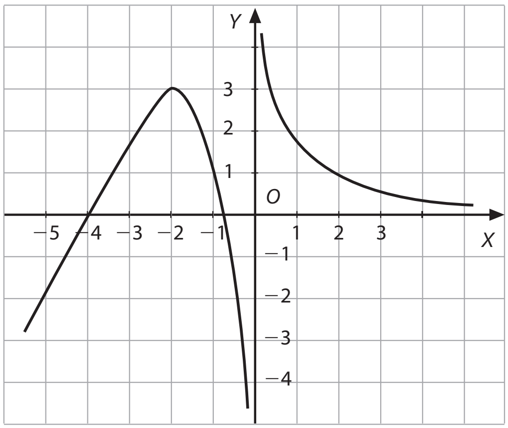
e) $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-1}$

4 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las siguientes funciones:**

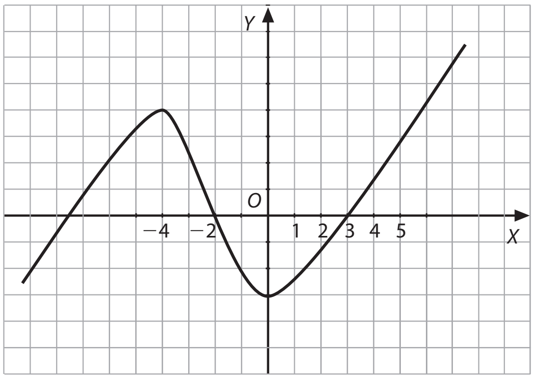
a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$

b) $f(x) = |2x^2 + x - 1|$

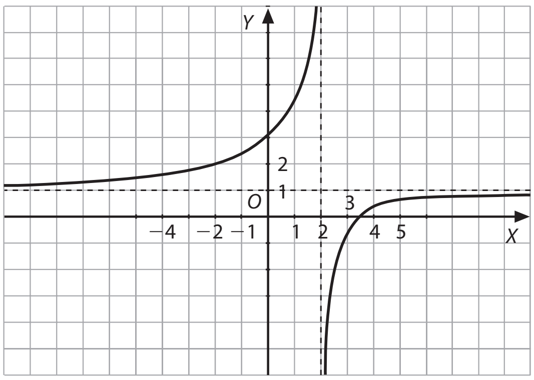
c)



d)



e)



5 **De las siguientes funciones, indica cuáles son simétricas respecto del eje de ordenadas:**

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+2}{x}$

c) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{3+x^2}$

d) $f(x) = x^2 + 3$

e) $f(x) = x^3 + x - 1$

f) $f(x) = |x| + x^2$

6 **De las funciones anteriores, indica cuáles son simétricas respecto del origen de coordenadas.**

7 **Representa gráficamente las siguientes funciones e indica su dominio y recorrido:**

a) $f(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{si } x \leq 3 \\ x^2 - 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} E(x) & \text{si } x < \frac{3}{2} \\ \frac{|x|}{x} & \text{si } x \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -(x+1)^2 + 4 & \text{si } x \leq 1 \\ -|x-1| & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ x+2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

d) $f(x) = -2x^2 - x + 1$

e) $f(x) = |x^2 + x - 6|$

f) $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|$

8 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = \frac{3-x}{x} \text{ y } g(x) = \frac{x^2-x}{x+1}$$

Calcula $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$ y sus respectivos dominios.

9 **Dadas las funciones siguientes: $f(x) = |x-2|$ y $g(x) = 2x+1$. Calcula $(f+g)(x)$ y su dominio.**

10 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula $(f+g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(f/g)(x)$ y sus respectivos dominios.

11 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = 3 - \frac{1}{x} \text{ y } g(x) = x - 2$$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

12 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = \sqrt{x+1} \text{ y } g(x) = x^2 - 1$$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

13 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = \frac{x+1}{2-x} \text{ y } g(x) = \frac{2x-1}{x+1}$$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

14 **Dadas las funciones:**

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ y } g(x) = \sqrt{x-2}$$

Calcula $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y sus respectivos dominios.

15 **A partir de $f(x) = 2x - x^2$ y $g(x) = \sqrt{x-2}$, halla $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ y sus respectivos dominios. ¿Qué observas? ¿Es siempre posible componer funciones?**

16 **Dadas las funciones:**

a) $f(x) = \dfrac{3x-2}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{3-x}{3}$

c) $f(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = x^2 - x - 2$

f) $f(x) = \dfrac{x-2}{1-3x}$

g) $f(x) = \dfrac{3}{2-x}$

Calcula, si existe, su inversa respecto de la composición de funciones.

17 **Dos números naturales suman 15. Expresa analíticamente la función que expresa su producto en función de uno de ellos. Indica su dominio y su recorrido.**

18 **Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x con el fin de hacer una caja sin tapa. Calcula el volumen de la caja en función de x.**

19 **Dada una función afín, se conocen los puntos $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, -3\right)$. Halla su expresión analítica. ¿Es creciente?**

20 **¿Son iguales $f(x) = x + 2$ y $g(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$? ¿Por qué?**

21 **Encuentra una función cuadrática, $f(x)$, que tome los valores que muestra la tabla:**

x	0	2	−1
$f(x)$	1,25	−0,75	6,75

22 **Se ha realizado una experiencia que consiste en relacionar el período, T, de oscilación de un péndulo con su longitud, l. Se ha obtenido la siguiente tabla:**

l (cm)	0,05	0,10	0,15	0,25	0,50
t (s)	0,45	0,63	0,78	1	1,42

Aunque para cada longitud del péndulo se ha determinado el período, queremos conocer la expresión que proporciona el período de un péndulo en función de su longitud. Sabemos que $l = f(t)$ es una función de segundo grado. Averigua $T = f(l)$.

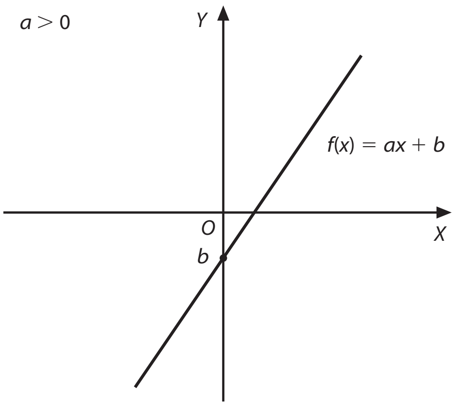
3. Representación gráfica de funciones polinómicas de primer y segundo grado

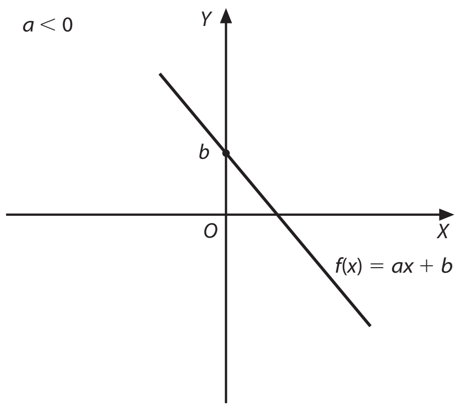
Funciones polinómicas de 1.er grado: $f(x) = ax + b$

Su representación gráfica es una recta de pendiente a e intersección con el eje de ordenadas en el punto $(0, b)$.

La función se anula en el punto $x = -b/a$, por tanto, el punto de intersección con el eje de abscisas es $(-b/a, 0)$.

- Si $a > 0$, la **pendiente** de la recta es **positiva** y, por tanto, la función $f(x) = ax + b$ es **estrictamente creciente** en $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, la **pendiente** de la recta es **negativa** y, por tanto, la función $f(x) = ax + b$ es **estrictamente decreciente** en $\mathbb{R}$.



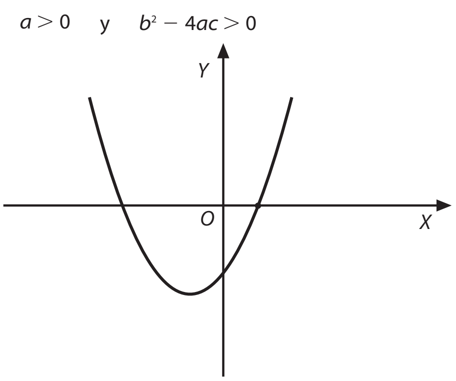


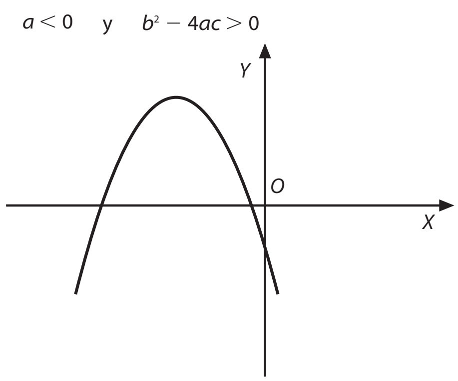
Funciones polinómicas de 2.º grado: $f(x) = ax^2 + bx + c$

Su representación gráfica es una **parábola,** cuyo vértice es el punto de abscisa $x = -b/2a$, y, por tanto, su eje de simetría es la recta $x = -b/2a$.

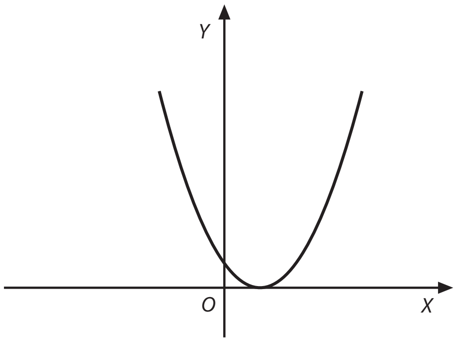
La parábola es *derecha*, con las ramas hacia arriba, si $a > 0$, e invertida si $a < 0$.

Corta al eje de abscisas en dos, uno o ningún punto, según que la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tenga, respectivamente, dos, una o ninguna solución, es decir, según el signo del discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$.

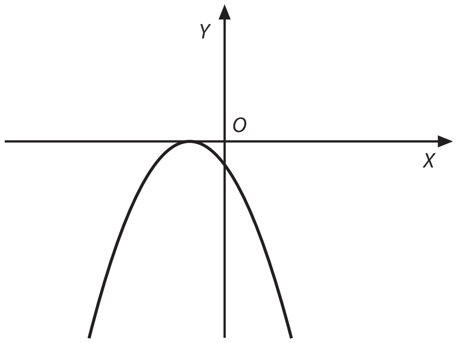




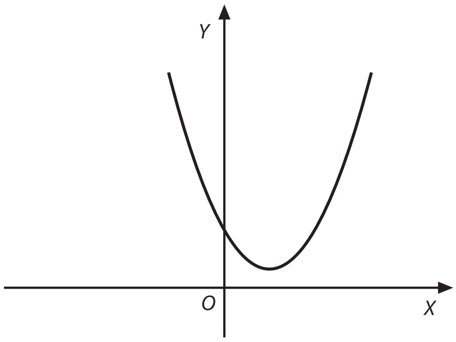
$a > 0$ y $b^2 - 4ac = 0$



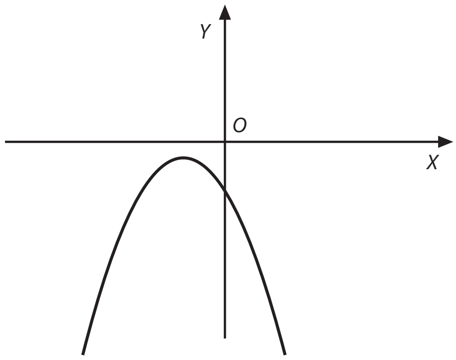
$a < 0$ y $b^2 - 4ac = 0$



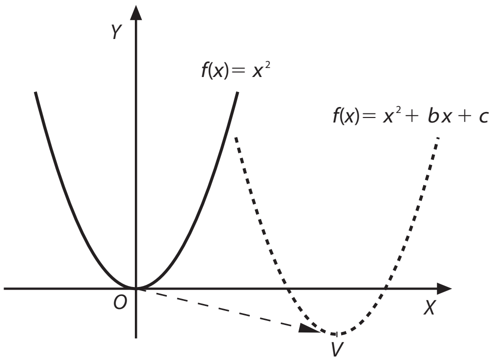
$a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$



$a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$



Si $a = 1$, la representación gráfica de la función $f(x) = x^2 + bx + c$, de vértice $V(x_v, y_v)$, es una traslación de la parábola básica $y = x^2$ cuyo vértice es el punto (0, 0) al punto $V(x_v, y_v)$, es decir, una traslación de vector $\vec{v} = (x_v, y_v)$.



Por tanto, $f(x) = x^2 + bx + c = (x - x_v)^2 + y_v$

Ejemplo:

La representación gráfica de $f(x) = x^2 - 4x + 6$ es una parábola derecha cuyo vértice está en el punto de abscisa:

$$x_v = \frac{4}{2} = 2$$

Y la ordenada del vértice es: $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2$

Su vértice, pues, es el punto $V(2, 2)$.

Por tanto, podemos escribir $f(x)$ como:

$$f(x) = (x - 2)^2 + 2$$

En general: $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_v)^2 + y_v$

Actividades

1 **Escribe las siguientes funciones de segundo grado en la forma: $f(x) = a(x - x_v)^2 + y_v$**

A continuación represéntalas, indicando sus puntos de intersección con los ejes, su vértice y su eje de simetría.

a) $f(x) = -2x^2 - 8x - 6$

b) $f(x) = 3x^2 - 6x - 45$

c) $f(x) = -2x^2 + 4x + 3$

2 **Traslada las parábolas anteriores, de tal manera que el nuevo vértice sea el punto $(-1, 2)$. ¿Qué vector de traslación debes utilizar?**

4. Modelización de situaciones reales mediante funciones

1 En una fábrica de ropa hay, actualmente, 3 000 abrigos. Un comerciante está dispuesto a comprarlos todos a precio de mercado, que actualmente es de 50 € cada uno; cada día que pasa, este precio disminuye 0,8 €.

Si la fábrica produce 100 abrigos al día, determinar la función que proporciona el dinero que ingresa la fábrica un día cualquiera, *x*, tomando el día de hoy como $x = 0$.

El número de abrigos que producirá la fábrica, y el precio que el comerciante pagará en función de los días transcurridos a partir de hoy, se refleja en la siguiente tabla:

Días	0	1	…	x
Número de abrigos	3 000	$3\,000 + 100 \cdot 1$	…	$3\,000 + 100x$
Precio de un abrigo	50	$50 - 0{,}8 \cdot 1$	…	$50 - 0{,}8x$
Ingresos de la fábrica	150 000	152 520	…	$-80x^2 + 2\,600x + 150\,000$

Es decir, la función que proporciona los ingresos en función del tiempo transcurrido, tomando hoy como $x = 0$, es:

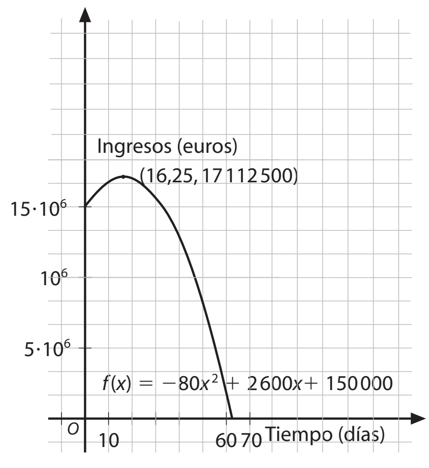
$$f(x) = -80x^2 + 2\,600x + 150\,000$$

Es una función polinómica de segundo grado, cuyo dominio, por el contexto del problema, es el conjunto de números naturales, *x*, para los cuales no se anula el precio de los abrigos, porque esto daría un ingreso nulo.

$50 - 0{,}8x \neq 0 \Rightarrow x \neq 62{,}5$. Como x debe ser un número natural, tenemos que:

$$\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid x \in [0, 62]\}$$

Si quisiéramos calcular el momento idóneo para vender los abrigos, basta recordar que la representación gráfica de esta función es una parábola invertida, en cuyo vértice se alcanza el valor máximo.



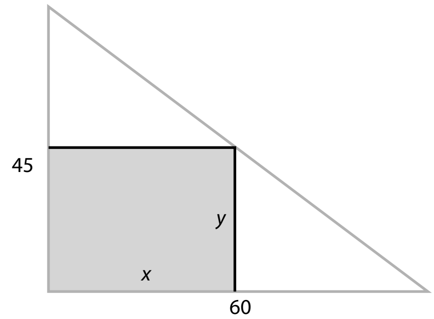
El vértice tiene por abscisa: $x = \dfrac{-260\,000}{-2 \cdot (-8\,000)} = 16{,}25$

Es decir, en el decimosexto día, la venta de los abrigos que hay en la fábrica produce el máximo beneficio.

2 Una agencia inmobiliaria pone a la venta una parcela que tiene forma de triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 45 m y 60 m. El ayuntamiento de la localidad donde se encuentra la parcela impone que la porción edificable de la misma debe ser rectangular, de lados x e y, tal como se indica en la figura. La inmobiliaria cobra 250 € por metro cuadrado edificable y 50 € por el resto.

a) Expresa el área edificable en función de x.

b) Expresa el precio de la parcela en función de x.



c) El área del rectángulo de la figura es:

$$A = x \cdot y$$

A partir de la figura, podemos establecer la relación entre x e y:

$$\frac{45}{60} = \frac{y}{60 - x} \Rightarrow y = \frac{45}{60}(60 - x) \Rightarrow y = 45 - \frac{3x}{4}$$

Por tanto, el área edificable, expresada en función de x, será:

$$A(x) = x \cdot \left(45 - \frac{3x}{4}\right), \text{ es decir, } A(x) = 45x - \frac{3x^2}{4}$$

d) El área total de la parcela es:

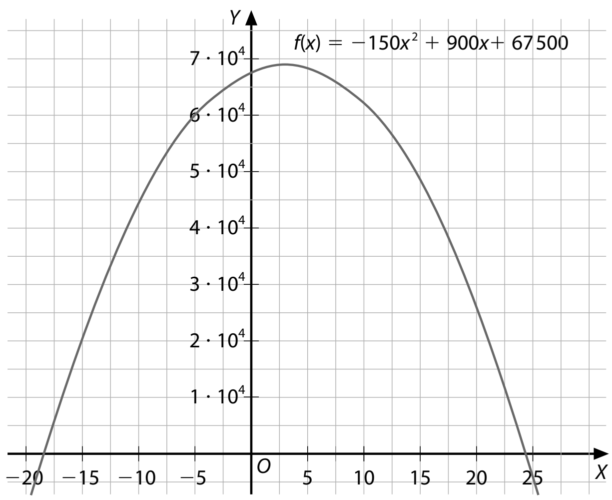
$$\frac{45 \cdot 60}{2} = 1\,350 \text{ m}^2$$

Así, el área no edificable, en función de x, será:

$$1\,350 - \left(45x - \frac{3x^2}{4}\right) = 1\,350 - 45x + \frac{3x^2}{4}$$

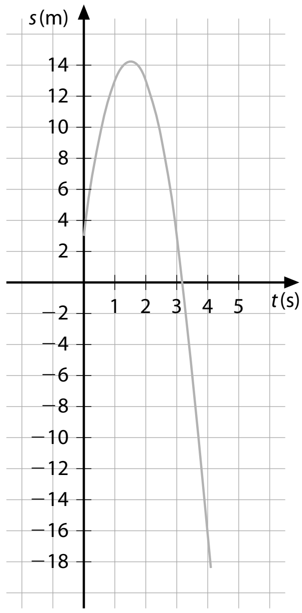
Por tanto, el precio de la parcela será:

$$P(x) = \left(45x - \frac{3x^2}{4}\right) \cdot 250 + \left(1\,350 - 45x + \frac{3x^2}{4}\right) \cdot 50 = -150x^2 + 900x + 67\,500$$



5. Interpolación cuadrática

Hallar la ecuación posición-tiempo que corresponde a la gráfica de la siguiente figura:



Dado un sistema de referencia, la gráfica que relaciona el tiempo con la posición en un movimiento uniformemente acelerado corresponde a una función polinómica de segundo grado:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

s_0, v_0 y a son los coeficientes de esta función.

s_0 es la posición inicial, o el punto que corresponde al momento $t = 0$.

v_0 es la velocidad inicial.

a es la aceleración del movimiento.

A partir de la gráfica se conocen tres puntos: (0, 3), (3, 3) y (4, −17). Con estos se puede obtener la expresión de la posición del móvil en cada instante, haciendo lo siguiente:

$$s(0) = 3 \Rightarrow 3 = s_0 + v_0 \cdot 0 + \frac{a \cdot 0^2}{2}$$

$$s(3) = 3 \Rightarrow 3 = s_0 + v_0 \cdot 3 + \frac{a \cdot 3^2}{2}$$

$$s(4) = -17 \Rightarrow -17 = s_0 + v_0 \cdot 4 + \frac{a \cdot 4^2}{2}$$

Es preciso, pues, resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. De la primera ecuación se obtiene directamente: $s_0 = 3$

Sustituyendo en la segunda ecuación, se tiene que:

$$v_0 = -\frac{3 \cdot a}{2}$$

De la última ecuación se obtiene, por sustitución:

$$a = -10, \text{ con lo que: } v_0 = 15$$

La ecuación posición-tiempo buscada es:

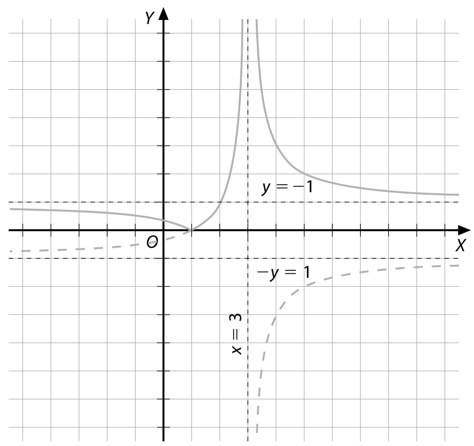
$$s(t) = 3 + 15 \cdot t - 5 \cdot t^2$$

6. Representación del valor absoluto de una función

Representar la función $f(x) = \left|\dfrac{x-1}{3-x}\right|$.

Es una función definida en $\mathbb{R} - \{3\}$. Si se estudia su signo, se obtiene:

	$-\infty$ — 1	1 — 3	3 — $+\infty$
$x - 1$	−	+	+
$3 - x$	+	+	−
$x - 1/3 - x$	−	+	−



Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{x-1}{3-x} & \text{si } x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \\[2ex] \dfrac{x-1}{3-x} & \text{si } x \in [1, 3) \end{cases}$$

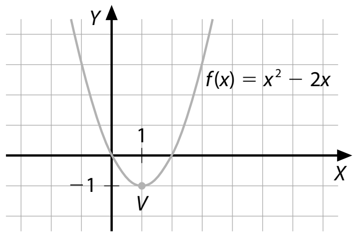
En la figura anterior se representa gráficamente esta función. La gráfica de la función racional se dibuja con trazo punteado, y, a partir de ella, se representa su valor absoluto, procediendo por simetría respecto del eje de abscisas, como se ha hecho anteriormente.

7. Restricción del dominio de f para que exista f^{-1}

Restringir el dominio de $f(x) = x^2 - 2x$ para que admita función inversa respecto de la composición y obtener su expresión $f^{-1}(x)$.

La función $f(x) = x^2 - 2x$ es una función no inyectiva y su representación gráfica es una parábola.

Para conseguir que cada elemento del dominio tenga una sola imagen hay que considerar, o bien el intervalo $(-\infty, 1]$, o el intervalo $[1, +\infty)$, porque 1 corresponde al valor de la abscisa del vértice de la parábola.



Si consideramos el dominio como $[1, +\infty)$, encontramos otra dificultad:

¿Cómo se aísla la variable x de $y = x^2 - 2x$?

Hacemos $x^2 - 2x - y = 0$.

Esta expresión constituye una ecuación de segundo grado que podemos solucionar:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 + y}$$

Permutamos ahora las variables x e y:

$$y = 1 \pm \sqrt{1 + x}$$

Esto no es una función, pues, para cada valor de x del dominio, se obtienen dos imágenes, por lo tanto, se debe tomar un solo signo:

$$y = 1 + \sqrt{1 + x} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$$

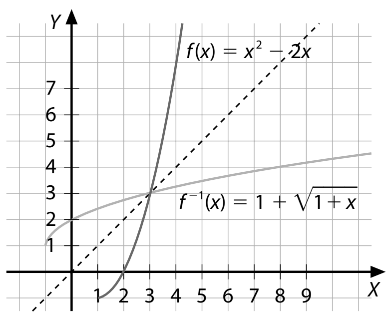
El dominio de la función inversa hallada es pues el conjunto de valores reales que cumplen $x \geq -1$, es decir $[-1, +\infty)$.

Se observa que este dominio coincide con el recorrido de la función $f(x)$.

Para su cálculo se debe hallar la ordenada del vértice:

$$y = 1 - 2 = -1$$

Como $a = 1 > 0$, su recorrido es $[-1, +\infty)$.



1. Características de las funciones

1 Una función es una **aplicación** entre dos conjuntos, de manera que a cada elemento del conjunto original le corresponde **un único elemento** del conjunto imagen.

2 ¿Por qué la expresión $y^2 = 3 + 2x$ no corresponde a una función? **Porque a cada valor de *x* tiene que corresponderle un único valor de *y*.**

3 Dada la función real de variable real, completa las definiciones de dominio y recorrido.

$$\textbf{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / \exists\, y = f(x) \in \mathbb{R}\}$$

$$\textbf{Rec } f(x) = \{y \in \mathbb{R} / \exists\, x \in \textbf{Dom } f \textbf{ con } f(x) = y\}$$

4 Si $f(x)$ es una función polinómica, su dominio es el conjunto **de los números reales** $\mathbb{R}$.

5 Si $f(x)$ es una función racional, su dominio está formado por **aquellos valores reales que no anulan el denominador.**

6 Si $f(x)$ es una función irracional, de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, con n par, su dominio se define como:

$$\textbf{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \geq 0\}$$

7 ¿Cómo se pueden determinar los intervalos de signo constante de una función? **A partir de su expresión analítica, es preciso encontrar los posibles cambios de signo, determinando los ceros de la función y los puntos en los que no está definida.**

8 ¿Cuándo es una función creciente en un intervalo? **Una función, $f(x)$, es creciente en un intervalo (a, b) de su dominio, si para cualquier par de valores x_1 y x_2 del intervalo, con $x_2 > x_1$, se cumple que $f(x_2) > f(x_1)$.**

9 Cuando una función $f(x)$ cumple que $f(x) = f(-x)$, para cualquier x de su dominio, la función es **par**, y su gráfica es simétrica respecto del **eje de coordenadas.**

10 Una función simétrica respecto del origen de coordenadas es **impar** y se verifica, para cualquier x de su dominio, que $f(-x) = -f(x)$.

11 Si una función cumple que $|f(x)| \leq k$, $k \in \mathbb{R}$, se dice que la función está **acotada.**

k se denomina **cota superior, y el número $-k$, cota inferior de la función.**

12 ¿Qué características presentan las gráficas de las funciones periódicas?

Para cualquier $x \in$ Dom $f(x)$, se cumple la siguiente relación $f(x + T) = f(x)$

Desde el punto de vista gráfico son funciones que se repiten cada cierto intervalo de amplitud T.

13 Para que dos funciones sean iguales, ¿qué condiciones deben cumplirse?

Es indispensable que las imágenes sean iguales y estén definidas en el mismo dominio.

14 Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, cuyos respectivos dominios son Dom f y Dom g, define las funciones suma, producto y cociente de f y g.

Suma $(f + g) = f(x) + g(x)$,
donde Dom $(f + g)$ = Dom $f \cap$ Dom g

Producto $(f \cdot g) = f(x) \cdot g(x)$,
donde Dom $(f \cdot g)$ = Dom $f \cap$ Dom g

Producto $(f/g) = f(x)/g(x)$,
Dom $(f/g) = \{$Dom $f \cap$ Dom $g\} - \{x \in$ Dom$(g) | g(x) = 0\}$

15 ¿Cómo se define la función que resulta de aplicar primero una función f sobre x, y después a la imagen obtenida, una función g? **Se denomina función compuesta de *f* y *g*.**

16 ¿Qué funciones admiten inversa respecto de la composición de funciones? **Para que una función tenga inversa respecto de la composición, es imprescindible que sea inyectiva.**

17 Indica la característica gráfica que presentan las funciones que admiten inversa respecto de la composición de funciones. **Su gráfica es simétrica respecto a la recta $y = x$.**

2. Actividades complementarias

1
a) Dom $f(x) = (-\infty, 5)$
b) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$
c) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
d) Dom $f(x) = [-1, 0) \cup (1, +\infty)$
e) Dom $f(x) = \left(-\infty, \frac{-1}{3}\right] \cup \left[2, +\infty\right)$
f) Dom $f(x) = [0, +\infty)$
g) Dom $f(x) = (1, +\infty)$
h) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 2\right\}$
i) Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

2
a) Rec $f(x) = \mathbb{R}$
b) Rec $f(x) = [-1, +\infty)$
c) Rec $f(x) = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$
d) Rec $f(x) = [0, +\infty)$
e) Rec $f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$
f) Rec $f(x) = [0, +\infty)$
g) Rec $f(x) = [-3, +\infty)$
h) Rec $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

3
a) $f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y $f(x) < 0$ en $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$
b) $f(x) > 0$ en $(-\infty, -1) \cup (0, 3)$ y $f(x) < 0$ en $(-1, 0) \cup$ $\cup\, (3, +\infty)$
c) $f(x) > 0$ en $\left(-1, \frac{2}{3}\right)$ y $f(x) < 0$ en $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$
d) $f(x) > 0$ en $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$, y $f(x) < 0$ en $(-\infty, -1)$
e) $f(x) > 0$ en $(-1, 1)$ y $f(x) < 0$ en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

4
a) $f(x)$ es estrictamente decreciente en $\left(-\infty, \frac{-1}{4}\right)$ y estrictamente creciente en $\left(\frac{-1}{4}, +\infty\right)$.
b) $f(x)$ es estrictamente decreciente en el intervalo $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ y estrictamente creciente en $\left(-1, \frac{-1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

c) $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-2, 0) \cup (0, +\infty)$ y estrictamente creciente en $(-\infty, -2)$.

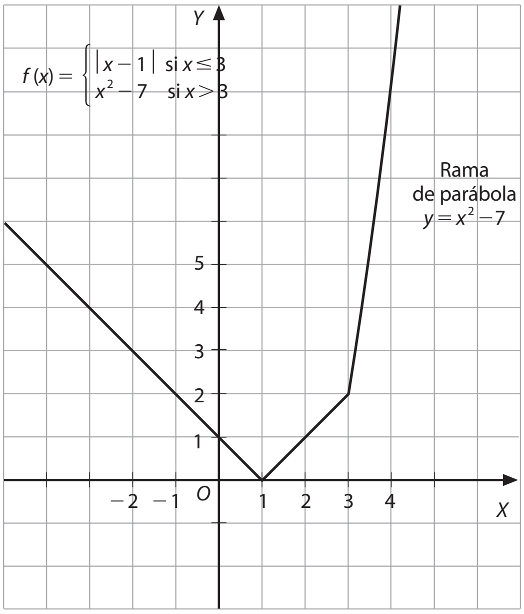
d) $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-4, 0)$.

e) $f(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R} - \{2\}$, que es su dominio.

5 Son simétricas respecto del eje de ordenadas las funciones pares: *c*, *d*, *f*.

6 Son simétricas respecto del origen de coordenadas las funciones impares: *b*.

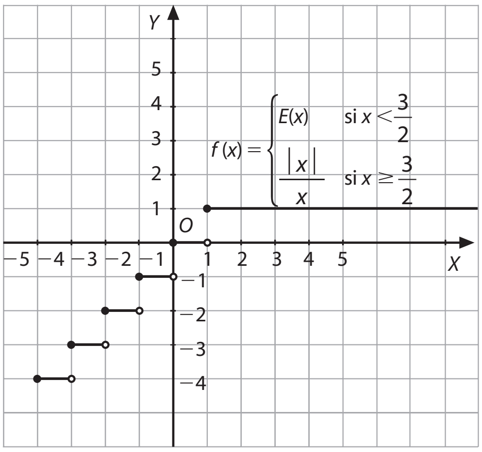
7 *a)*



Dom $f(x) = \mathbb{R}$

Rec $f(x) = [0, +\infty)$

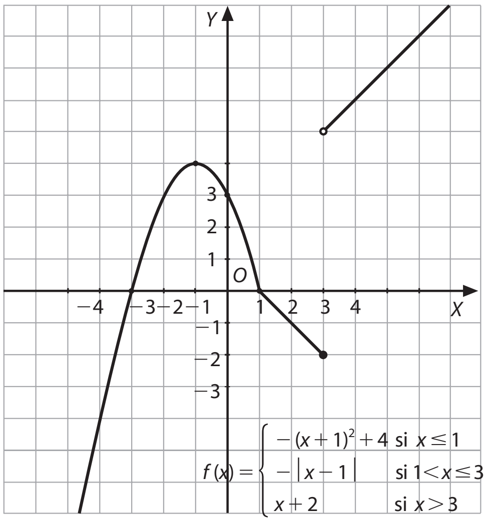
b)



Dom $f(x) = \mathbb{R}$

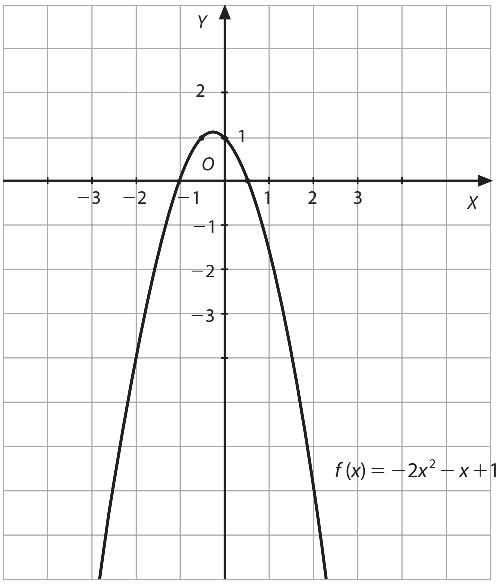
Rec $f(x) = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq 1\}$

c)



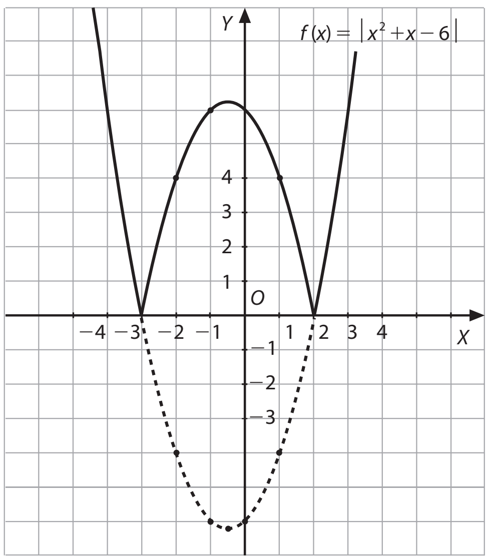
Dom $f(x) = \mathbb{R}$, Rec $f(x) = (-\infty, 4] \cup (5, +\infty)$

d)



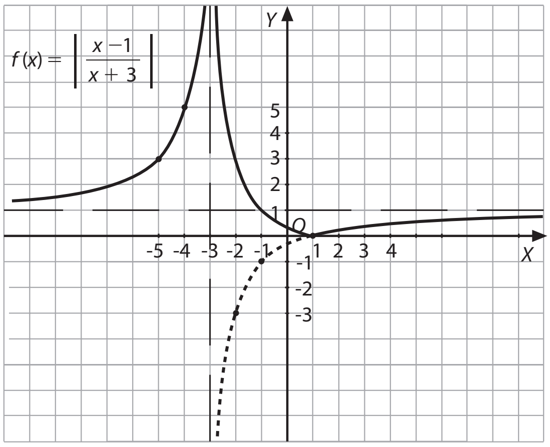
Dom $f(x) = \mathbb{R}$, Rec $f(x) = \left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$

e)



Dom $f(x) = \mathbb{R}$, Rec $f(x) = [0, +\infty)$

f)



Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Rec $f(x) = [0, +\infty)$

8 $(f+g)(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x}$

$(f-g)(x) = \dfrac{-x^3 + 3x + 3}{x^2 + x}$

$(f \cdot g)(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 3}{x + 1}$

El dominio de las dos primeras es $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

Dom $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

9 $(f+g)(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$

10

- $(f+g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3 - x^2 - x + 2}{x - 1} & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$

  Dom $(f+g) = \mathbb{R} - \{1\}$

- $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0, x \neq 1 \end{cases}$

  Dom $(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{1\}$

- $(f/g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 0 \text{ y } x \neq 1 \end{cases}$

  Dom $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{1\}$

11

- $(f \circ g) = \dfrac{3x - 7}{x - 2}$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{2\}$

- $(g \circ f) = \dfrac{x - 1}{x}$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

12

- $(f \circ g) = x$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R}$

- $(g \circ f) = x$

  Dom $(g \circ f) = [-1, +\infty)$

13

- $(f \circ g) = x$

  Dom $(f \circ g) = \mathbb{R} - \{-1\}$

- $(g \circ f) = x$

  Dom $(g \circ f) = \mathbb{R} - \{2\}$

14

- $(f \circ g) = x - 1$

  Dom $(f \circ g) = [2, +\infty)$

- $(g \circ f) = \sqrt{x^2 - 1}$

  Dom $(g \circ f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

15 $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x - 2} - x + 2$ Dom $(f \circ g) = [2, +\infty)$

$(g \circ f)(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 2}$ Dom $(g \circ f) = \varnothing$

$g \circ f$ no existe, puesto que el recorrido de $f(x)$, $(-\infty, 1)$, no está incluido en el dominio de $g(x)$, que es $[2, +\infty)$. Siempre que esto sucede no es posible componer las funciones f y g.

16 ***a)*** $f^{-1}(x) = \dfrac{2}{3 - x}$

b) $f^{-1}(x) = 9 - 3x$

c) $f^{-1}(x) = x^2 + 3 \quad \text{si } x \geq 0$

d) $f(x) = x^2 - 4$ no es inyectiva.

e) $f(x) = x^2 - x - 2$ no es inyectiva.

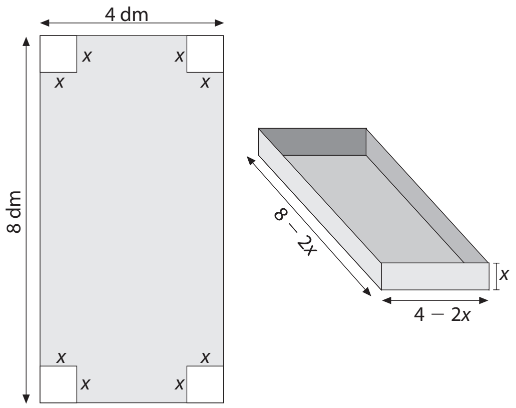
f) $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{1 + 3x}$

g) $f^{-1}(x) = \dfrac{2x - 3}{x}$

17 $x + y = 15 \Rightarrow x = 15 - x \Rightarrow f(x) = x(15 - x)$

Dom $f = \{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 15\}$ (Considerando $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$)

18



El lado del cuadrado que se recorta es la altura de la caja, x.

La base tendrá por lados: $8 - 2x$ y $4 - 2x$

Por lo tanto:

$$V(x) = x(8 - 2x)(4 - 2x) = 4x^3 - 24x^2 + 32x$$

19 $f(x) = \dfrac{-22}{5} x - \dfrac{19}{10}$

No es una función creciente, es decreciente.

20 No son iguales puesto que su dominio no es el mismo, Dom $f(x) = \mathbb{R}$ y Dom $g(x) = \mathbb{R} - \{2\}$, a pesar de que en su dominio $g(x) = x + 2$.

21 $f(x) = 1{,}5\, x^2 - 4x + 1{,}25$

22 Si $l = f(T)$, y es cuadrática, se obtiene $l = 0{,}25\, T^2$. Dado que, por definición, $l(T)$ es inyectiva, pues el período no puede ser negativo, tiene inversa, que es $T = 2\sqrt{l}$.

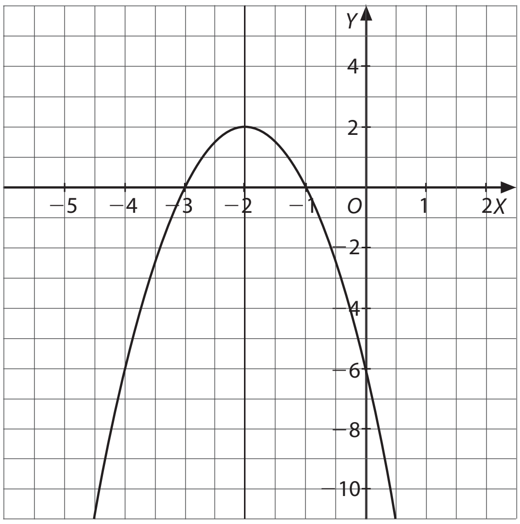
3. Representación gráfica de funciones polinómicas de primer y segundo grado

1 ***a)*** **$f(x) = -2\,(x + 2)^2 + 2$**

Puntos de intersección con los ejes (−3, 0) y (−1, 0)

Vértice (−2, 2)

Eje de simetría $x = -2$

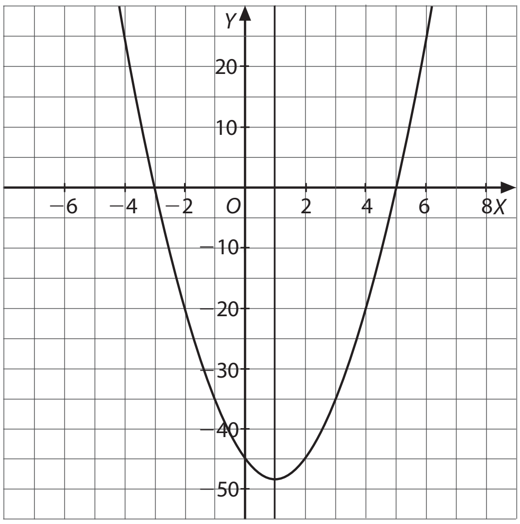


b) **$f(x) = 3\,(x + 1)^2 - 48$**

Puntos de corte con los ejes (−3, 0) y (5, 0)

Vértice (1, −48)

Eje de simetría $x = 1$



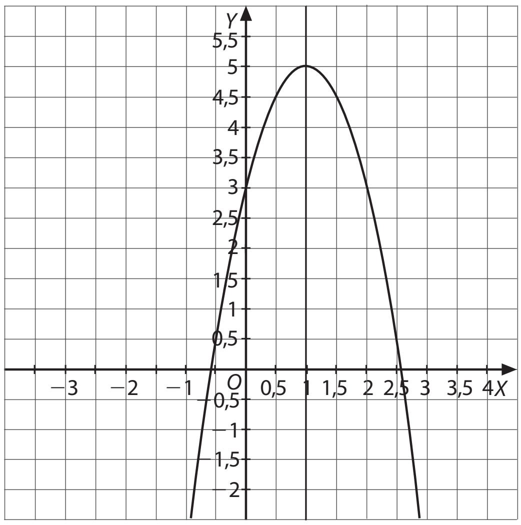
c) **$f(x) = -2\,(x - 1)^2 + 5$**

Puntos de intersección con los ejes:

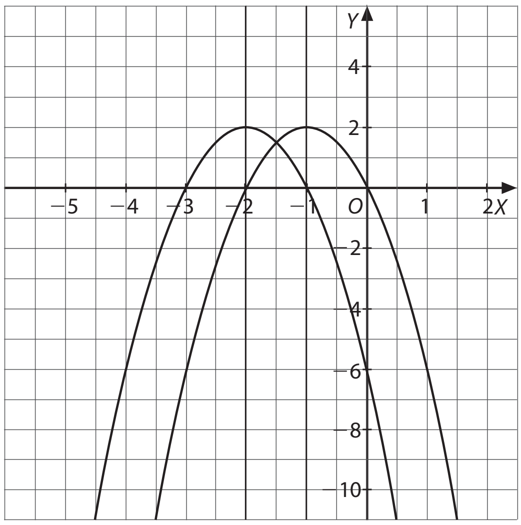
(−0,58, 0) y (2,58, 0)

Vértice (1, 5)

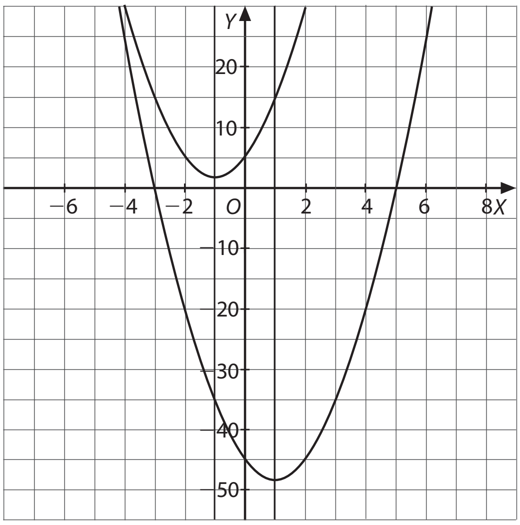
Eje de simetría $x = 1$



2 ***a)*** **El vector de traslación es $\vec{v} = (1, 0)$.**



b) **El vector de traslación es $\vec{v} = (2, 50)$.**



c) **El vector de traslación es $\vec{v} = (-2, -3)$.**