Evaluación

NOMBRE ______ **APELLIDOS** ______

CURSO Y GRUPO ______ **FECHA** ______ **CALIFICACIÓN** ______

1 Calcula el término general de una progresión geométrica que tiene de término $a_3 = 2$ y por razón 1/2.

a) 2^{2-n} ***b)*** 2^{4-n} ***c)*** 2^{n-4}

2 El $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1-2n^2}{-6n^2+n}$ es:

a) $-\infty$ ***b)*** 0 ***c)*** 1/3

3 El $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{5n^2-1} - \sqrt{2+6n^2}\right)$ es:

a) $-\infty$ ***b)*** $+\infty$ ***c)*** $\sqrt{11}$

4 Dada la función representada gráficamente en la figura 9.1, determina cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$, asíntota horizontal $x = -2$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \infty$

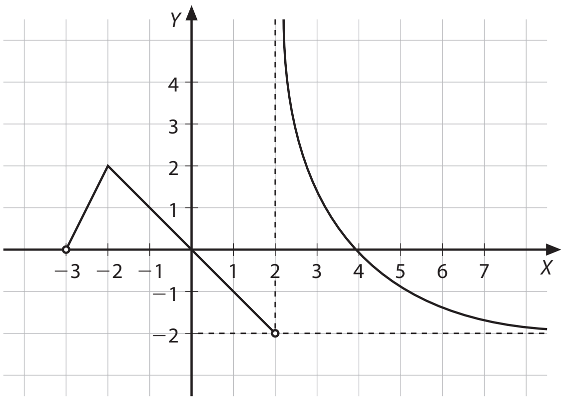


FIGURA 9.1.

5 El $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{-x}{(x-1)^2}}$ es:

a) $+\infty$ ***b)*** $-\infty$ ***c)*** 0

6 El $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{x^2-4x+4}{x+1}\right)^{-3x+1}$ es:

a) $+\infty$ ***b)*** $-\infty$ ***c)*** 0

7 El $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x+6}{x^2-16} - \dfrac{x+1}{x^2-4x}\right)$ es:

a) 1/32 ***b)*** ∞ ***c)*** 0

8 El $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1-2x}{2-2x}\right)^{3x+4}$ es:

a) $e\sqrt{e}$ ***b)*** e ***c)*** 0

9 Indica las discontinuidades de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} & \text{si } x \leq 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) En $x = -1$, discontinuidad asintótica.
En $x = 2$, discontinuidad asintótica.

b) En $x = 3$ y $x = -1$, discontinuidad evitable.
En $x = 2$, discontinuidad asintótica.

c) En $x = -1$, discontinuidad evitable.
En $x = 2$, discontinuidad asintótica.

10 El $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{3n^2+2} - \sqrt{3n^2-5n}\right)$ es:

a) $\dfrac{5}{6}$ ***b)*** $\dfrac{-5}{2\sqrt{3}}$ ***c)*** $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

11 El $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+3}{(x-4)^3 \cdot (x+2)}$ es:

a) ∞ ***b)*** 0 ***c)*** $+\infty$

12 Si la función $f(x)$ es tal que $\exists\, f(a)$ y $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)$, ¿se puede asegurar que $f(x)$ es continua en a?

a) No. ***b)*** Sí. ***c)*** En algunas ocasiones.

Solución de la evaluación

(Se indican con ▶ las respuestas correctas)

1 Calcula el término general de una progresión geométrica que tiene de término $a_3 = 2$ y por razón 1/2.

a) 2^{2-n} ▶ ***b)*** 2^{4-n} ***c)*** 2^{n-4}

2 El $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-2n^2}{-6n^2+n}$ es:

a) $-\infty$ ***b)*** 0 ▶ ***c)*** 1/3

3 El $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{5n^2-1}-\sqrt{2+6n^2}\right)$ es:

▶ ***a)*** $-\infty$ ***b)*** $+\infty$ ***c)*** $\sqrt{11}$

4 Dada la función representada gráficamente en la figura 9.1, determina cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

a) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\infty$, asíntota horizontal $x = -2$

▶ ***b)*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$

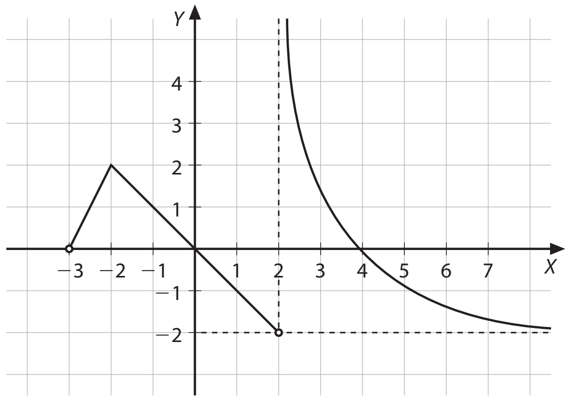


FIGURA 9.1.

5 El $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{-x}{(x-1)^2}}$ es:

a) $+\infty$ ***b)*** $-\infty$ ▶ ***c)*** 0

6 El $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-4x+4}{x+1}\right)^{-3x+1}$ es:

a) $+\infty$ ***b)*** $-\infty$ ▶ ***c)*** 0

7 El $\lim\limits_{x\to 4} \left(\dfrac{x+6}{x^2-16} - \dfrac{x+1}{x^2-4x}\right)$ es:

▶ ***a)*** 1/32 ***b)*** ∞ ***c)*** 0

8 El $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1-2x}{2-2x}\right)^{3x+4}$ es:

▶ ***a)*** $e\sqrt{e}$ ***b)*** e ***c)*** 0

9 Indica las discontinuidades de la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-x-2} & \text{si } x \le 3 \\ 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) En $x = -1$, discontinuidad asintótica.
En $x = 2$, discontinuidad asintótica.

b) En $x = 3$ y $x = -1$, discontinuidad evitable.
En $x = 2$, discontinuidad asintótica.

▶ ***c)*** En $x = -1$, discontinuidad evitable.
En $x = 2$, discontinuidad asintótica.

10 El $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{3n^2+2}-\sqrt{3n^2-5n}\right)$ es:

a) $\dfrac{5}{6}$ ***b)*** $\dfrac{-5}{2\sqrt{3}}$ ▶ ***c)*** $\dfrac{5}{2\sqrt{3}}$

11 El $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{(x-4)^3\cdot(x+2)}$ es:

a) ∞ ▶ ***b)*** 0 ***c)*** $+\infty$

12 Si la función $f(x)$ es tal que $\exists\, f(a)$ y $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x)$, ¿se puede asegurar que $f(x)$ es continua en a?

a) No. ***b)*** Sí. ▶ ***c)*** En algunas ocasiones.

1. Límite y continuidad

1 Sucesiones

Una sucesión de números reales es una aplicación de ______

En una progresión aritmética cada término se obtiene del anterior ______

______

Una sucesión tal que cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad constante llamada razón, se denomina ______

Una sucesión convergente es una sucesión ______

2 Límites

El número e es el límite de la sucesión: ______

En una función, si $\lim_{x \to \infty} f(x) = k$, la recta $y = k$ es una ______ de la función.

Cuando $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, se dice que $f(x)$ tiene una ______ en $x = a$.

Se dice que una función, f, es continua en $x = a$ si:

- ______
- ______
- ______

Si en $x = a$ una función, f, es discontinua, pero existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$, entonces la discontinuidad se denomina:

______

Si en $x = a$ una función, f, es discontinua, y el límite no existe, pueden darse estas dos situaciones: ______

______

3 Completa las siguientes tablas:

- **Límite de la sucesión suma**

$+$	$\lim_{n \to \infty} x_n = a$	$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$	$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$
$\lim_{n \to \infty} y_n = b$			
$\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$			
$\lim_{n \to \infty} y_n = -\infty$			

- **Límite de la sucesión resta**

$-$	$\lim_{n \to \infty} x_n = a$	$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$	$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$
$\lim_{n \to \infty} y_n = b$			
$\lim_{n \to \infty} y_n = +\infty$			
$\lim_{n \to \infty} y_n = -\infty$			

- **Límite de la sucesión producto**

$\times$	$\lim_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$	$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim_{n\to\infty} y_n = b$				
$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$				
$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$				
$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$				

- **Límite de la sucesión cociente**

$\div$	$\lim_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$	$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim_{n\to\infty} y_n = b$				
$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$				
$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$				
$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$				

2. Actividades complementarias

1 **Calcula el término general de las sucesiones siguientes e indica si son convergentes, divergentes u oscilantes.**

a) $-5, -21, 3, 7, 11, \dots$

b) $2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \dots$

c) $-1, 4, -9, 16, \dots$

d) $0, 3/4, 8/6, 15/8, \dots$

e) $3, 2, \sqrt[3]{5}, \sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{7}, \dots$

2 **Dadas las sucesiones:**

$$a_n = \frac{2n^2+3n}{n^2+3n},\ b_n = \frac{2n^2+1}{2-n},\ c_n = \frac{2-3n^2}{n}$$

Calcula:

a) $\lim (a_n + b_n)$

b) $\lim (a_n + c_n)$

c) $\lim (b_n \cdot c_n)$

d) $\lim (a_n/b_n)$

e) $\lim (a_n)^{b_n}$

f) $\lim (a_n)^{c_n}$

3 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = (6n^5 - 3n^3 + 1)/(-3n^2 + 3)$

b) $a_n = (3n + 2)^2/(n^2 + 1)$

c) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{n^2} + 2\right) \cdot \left(\frac{1-2n}{3n}\right)$

d) $a_n = \frac{2n^2}{n^3+1} - \frac{1-n^3}{n}$

4 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n^6+5}}{n^2+1}$

b) $a_n = \sqrt[3]{10^8 - n^7}$

c) $a_n = \sqrt{3n^2+4} - \sqrt{5n^3+10n}$

d) $a_n = \sqrt{5n^2+1} - \sqrt{2n^2+6n}$

e) $a_n = \frac{\sqrt{6n^2+1} - (3n-2)}{1-2n}$

f) $a_n = \sqrt{4n^2+5} - (2n+3)$

5 **Calcula el límite de las siguientes sucesiones:**

a) $a_n = \sqrt{\frac{3n+1}{2n+2}}$

b) $a_n = \left(\frac{n+1}{3+2n}\right)^{3n}$

c) $a_n = \left(\frac{n^2+5}{6n}\right)^{2-n}$

d) $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{5-n}$

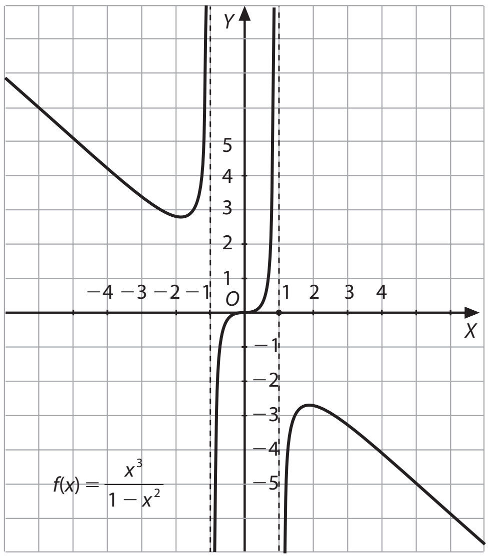
e) $a_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{n+3}{2n}\right)^{n^2/(n-1)}$

f) $a_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^{(2-n^2)/(n+1)}$

g) $a_n = \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1} - \frac{1}{n}\right)^{n}$

6 **Dadas las siguientes funciones, averigua los límites que se indican:**

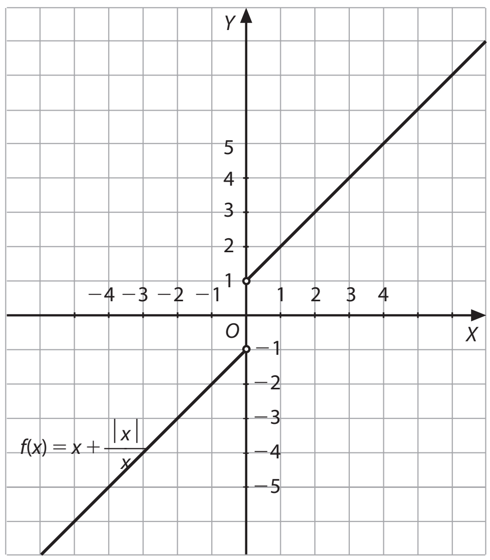
a)



$\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

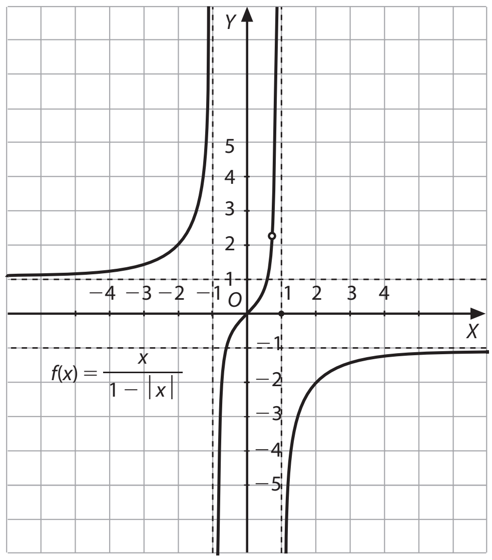
$\lim_{x \to 1} f(x)$, $\lim_{x \to -1} f(x)$

b)



$\lim_{x \to 0} f(x)$

c)



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

7 **Calcula analíticamente las asíntotas horizontales y verticales de las funciones representadas en la actividad 6, en caso de que las tengan.**

8 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} [(1 - x^3)/(x^2 + 1)(x - 2)]$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}\right)$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\left(\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+3}\right)/2x\right]$

9 **Calcula el límite de las funciones anteriores cuando $x \to -\infty$.**

10 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x+1}{1+3x}\right)^{-1/x^2}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1+3x}{1+x}\right)^{x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1+3x}{1+x}\right)^{x+1}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1-x}{3-x}\right)^{x-1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{x-1}{2x+2}\right]^{\frac{3-x^2}{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{2x}{x+1} \cdot \left(1 - \dfrac{3x}{2x+1}\right)\right]$

g) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + 2x - 3x^2 + 4x^3}{-x^2 + 7x - 2}$

11 **Averigua los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:**

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{2x+4} & \text{si } x \leq 1 \\ \dfrac{x-2}{x^2 - 3x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = -2$, $x = 1$, $x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{|3x - 1|}{3x^2 + 5x - 2}$ en $x = -2$ y $x = 1/3$

12 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 4x + 4}$

b) $\lim\limits_{x \to 1/2} \dfrac{4x^2 - 1}{4x^2 + 4x - 3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 + 3x^2 - x}{x^2 - x}$

d) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{4x^2 + x}{x^2 + 2x - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^{\frac{-x}{x-2}}$

g) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{2x+6}}{2+x}$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[x \cdot (\sqrt{4x^2+1} - 2x)\right]$

13 **Representa gráficamente las funciones que cumplan las siguientes condiciones:**

a) Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$

Rec $f = [-2, +\infty)$

$f(0) = 1$

$f^{-1}(0) = 3$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Rec $f = \mathbb{R}$

$f^{-1}(0) = \{-4, 0, 4\}$

$\lim\limits_{x \to -2} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +2} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3. Deducción del número e

Vamos a demostrar de manera rigurosa que la sucesión $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tiene límite, cuyo valor es el número e.

Para demostrar que la sucesión de término general:

$$a_n = (1 + 1/n)^n$$

tiene límite, hay que demostrar, en primer lugar, que la sucesión es creciente, y en segundo, que está acotada.

La sucesión es creciente

Para demostrar que la sucesión es creciente de una forma rigurosa, no es suficiente ir calculando términos sucesivos y comprobar que la sucesión crece, ya que es posible que esta crezca para algunos valores de n (que pueden ser muy grandes) y después decrezca.

Para ver que la sucesión es creciente, será preciso demostrar:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

para cualquier valor de n.

Se desarrolla $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ por el procedimiento del binomio de Newton:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3}1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ldots + \binom{n}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3\,!}\cdot\frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right) + \ldots$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

Un desarrollo análogo se podría hacer para el binomio:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \ldots$$

Si se comparan ambos desarrollos, se observa que al ser $(n + 1)$ mayor que n, $\frac{1}{n+1}$ es menor que $\frac{1}{n}$ y, por tanto, $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ es mayor que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

Como todos los paréntesis del desarrollo (2) son mayores que los del desarrollo (1) y, además, el desarrollo (2) tiene un término más que el del desarrollo (1), teniendo en cuenta que este término es necesariamente positivo, se puede concluir que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \text{ sea cual sea el valor de } n.$$

Por tanto, la sucesión es creciente.

La sucesión está acotada

Volviendo al desarrollo de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots$$

En este desarrollo, si se sustituye $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$ por 1, el resultado será mayor que la expresión dada:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 1} < \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$$

$$\frac{1}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} < \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^3}$$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1} < \frac{1}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n}} = \frac{1}{2^n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

En la expresión anterior, del segundo sumando en adelante, es una progresión geométrica de primer término 1 y razón 1/2.

Aplicando la expresión geometría, se obtiene:

$$1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 < 3$$

Todos los términos de la sucesión, sea cual sea el valor de *n*, tienen un valor menor que 3. La sucesión es creciente y está acotada, luego tiene límite: el valor de este límite se llama número e.

4. Estudio de la continuidad de una función definida a trozos

Para estudiar la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x+3} & \text{si } x < -2 \\ \dfrac{|x|}{x} & \text{si } -2 \le x < 2 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

En primer lugar calculamos su dominio: Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{-3, 0, 2\}$

- Para $x < -2$, la función es racional, continua en su dominio, por lo que en $x = -3$ no está definida y presentará un punto de discontinuidad.
- Para $-2 < x < 2$, la función está definida, excepto en $x = 0$.

  Puesto que interviene un valor absoluto, es necesario considerar que:

  $$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } -2 < x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2 \end{cases}$$

  En $x = 0$ habrá un punto de discontinuidad.
- Para $x > 2$, la función es continua, puesto que es polinómica.

  Además de los puntos de abscisa $x = -3$ y $x = 0$, habrá que considerar el punto de abscisa $x = 2$, que no es del dominio, y el punto de unión $x = -2$.

  En $x = -3$:

  $$\left.\begin{array}{l} \nexists f(-3) \\ \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^-} \left[\dfrac{-1}{(x+3)}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -3^+} \left[\dfrac{-1}{(x+3)}\right] = -\infty \end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to -3} f(x)$$

  la función presenta en $x = -3$ una discontinuidad asintótica.

  En $x = -2$:

  $$\left.\begin{array}{l} f(-2) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2} \left(\dfrac{-1}{x+3}\right) = -1 \\ \lim\limits_{x \to -2} f(x) = -1 \end{array}\right\} \lim_{x \to -2} f(x) = -1$$

  Puesto que el límite existe en $x = -2$ y es igual a la imagen $f(-2)$, la función es continua en $x = -2$.

  En $x = 0$:

  $$\left.\begin{array}{l} \nexists f(0): \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

  la función presenta, en $x = 0$, una discontinuidad de salto.

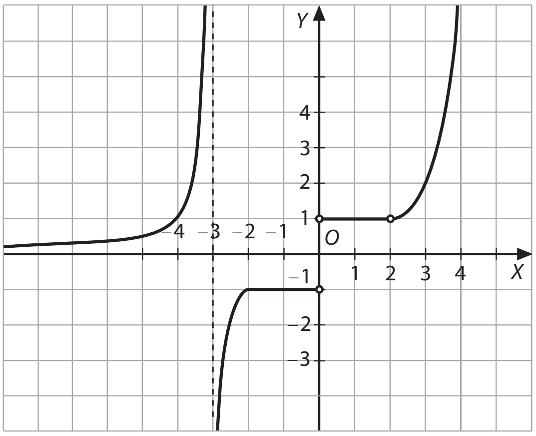
  $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 4x + 5) = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

En $x = 2$:

$\nexists f(2)$

puesto que el límite existe, en $x = 2$ la función presenta una discontinuidad evitable.

Por tanto, f es continua en su dominio.



1. Límite y continuidad

1 Sucesiones

- Una sucesión de números reales es una aplicación **del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales.**
- En una progresión aritmética cada término**, excepto el primero**, se obtiene del anterior **sumando una cantidad constante que se denomina diferencia.**
- Una sucesión tal que cada término se obtiene del anterior multiplicándolo por una cantidad constante llamada razón, se denomina **progresión geométrica.**
- Una sucesión convergente es una sucesión **que tiene un límite finito.**

2 Límites

- El número e es el límite de la sucesión: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
- En una función, si $\lim\limits_{x \to \infty}$, la recta $y = k$ es **una asíntota horizontal** de la función.
- Cuando $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ se dice que $f(x)$ tiene una **asíntota vertical** en $x = a$.
- Se dice que una función, f, es continua en $x = a$ si:
  - **Existe $f(a)$**
  - **Existe** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$
  - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \boldsymbol{f(a)}$
- Si en $x = a$ una función, f, es discontinua, pero existe $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$, entonces la discontinuidad se denomina: **discontinuidad evitable.**
- Si en $x = a$ una función, f, es discontinua, y el límite no existe, pueden darse estas dos situaciones **discontinuidad de salto finito. Discontinuidad asintótica o de salto infinito.**

3 Completa las siguientes tablas:

Límite de la sucesión suma

$+$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$	$\boldsymbol{a+b}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Límite de la sucesión resta

$-$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$	$a-b$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?

Límite de la sucesión producto

$\times$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$	$a \cdot b$	0	$+\infty\ (b>0)$ $-\infty\ (b<0)$	$-\infty\ (b>0)$ $+\infty\ (b<0)$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$	0	0	?	?
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$	$+\infty\ (a>b)$ $-\infty\ (a<b)$	?	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$	$-\infty\ (a>b)$ $+\infty\ (a<b)$	?	$-\infty$	$+\infty$

Límite de la sucesión cociente

$\div$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$	$\frac{a}{b}$	0	$+\infty\ (b>0)$ $-\infty\ (b<0)$	$-\infty\ (b>0)$ $+\infty\ (b<0)$
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$	**?∞**	**?**	**?∞**	**?∞**
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$	**0**	**0**	**?**	**?**
$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$	**0**	**0**	**?**	**?**

2. Actividades complementarias

1 *a)* $a_n = 4n - 9$, divergente.
b) $a_n = (n+1)/(n+2)$, convergente.
c) $a_n = (-1)^n \cdot n^2$, oscilante.
d) $a_n = (n^2 - 1)/2n$, divergente.
e) $a_n = \sqrt[n]{(n+2)}$, convergente.

2 *a)* $\lim (a_n + b_n) = 0$
b) $\lim (a_n + c_n) = -\infty$
c) $\lim (b_n \cdot c_n) = +\infty$
d) $\lim (a_n/b_n) = 1$
e) $\lim (a_n)^{b_n} = 1/4$
f) $\lim (a_n)^{c_n} = 0$

3 *a)* $-\infty$
b) 9
c) $-4/3$
d) $+\infty$

4 *a)* $\sqrt[3]{2}$
b) $-\infty$
c) $-\infty$
d) $+\infty$
e) $(3 - \sqrt{6})/2$
f) -3

5 *a)* $\sqrt{(3/2)}$
b) 0
c) 0
d) e^{-2}
e) $e^{3/2}$
f) $+\infty$
g) e^{-1}

6 *a)* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = +1\end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +1$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to -1} f(x) = \infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) = \infty$

7 *a)* En $x = -1$, a. v.
En $x = 1$, a. v.
b) No tiene a. v., ni a. h.
c) En $x = -1$, a. v.
En $x = 1$, a. v.
En $y = 1$, a. h.
En $y = -1$, a. h.

8 *a)* -1
b) $+\infty$
c) $\dfrac{\left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$

9 *a)* -1
b) No existe, puesto que Dom $f = \left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$.
c) No existe, puesto que Dom $f = \left[-\dfrac{1}{3}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

10 *a)* 1
b) $+\infty$
c) 0
d) e^3
e) 0
f) -1
g) $+\infty$

11 *a)* $\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to -2^-} f(x) = \dfrac{-1}{2} \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to -2} f(x)$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{2} \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{2}\end{array}\right\} \lim_{x \to 1} f(x) = 1/2$

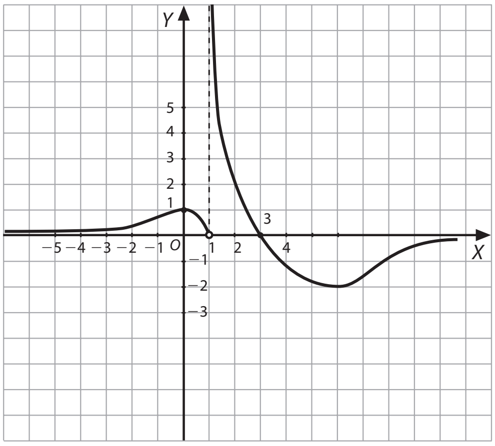
$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to 3} f(x) = \infty$

b) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \lim_{x \to -2} f(x) = \infty$

$\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 1/3^-} f(x) = \dfrac{-3}{7} \\ \lim_{x \to 1/3^+} f(x) = \dfrac{3}{7}\end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 1/3} f(x)$

12 *a)* ∞
b) 1/2
c) 1
d) -14
e) $e^{1/3} = \sqrt[3]{e}$
f) $\left.\begin{array}{l}\lim_{x \to 2^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0\end{array}\right\} \nexists \lim_{x \to 2} f(x)$
g) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
h) $+\infty$

13 *a)*



b)