

Relación de ejercicios de números complejos

Ejercicio 1.- Responde a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuál es el opuesto del conjugado de $2 - 5i$?
- b) ¿Cuál es el conjugado del opuesto de $-3 + 4i$?
- c) ¿Cuál es el conjugado del conjugado de $-1 - 5i$?
- d) ¿Cuál es el opuesto del opuesto de $3 + i$?

Ejercicio 2.- Realiza las siguientes operaciones:

- a) $(1 - 2i) - (2 - 6i)$
- b) $-i + (3 + i) - (-1 - 4i)$
- c) $-(2 + i) - 3(-1 - i) + 2(4 + 3i)$
- d) $(2 - 3i)(-4 + i)$
- e) $(-4 - 2i)(-3 + 5i)$
- f) $(-1 + i)(2 - 3i)(3 - i)$
- g) $\frac{7-3i}{1-i}$
- h) $\frac{-2-7i}{-i}$
- i) $\frac{5-2i}{1-3i}$
- j) $(5 - 2i)^2$
- k) $(3 + 4i)^3$
- l) $(-2 + 3i)^4$
- m) i^{2019}

Ejercicio 3.- Calcula el valor de a para que la multiplicación $(1 + 2i)(a - 6i)$?

- a) sea un número real,
- b) sea un número imaginario puro

Ejercicio 4.- Expresa el complejo $-\sqrt{3} + i$ en forma polar y en forma trigonométrica

Ejercicio 5.- Expresa el complejo 3_{300° en forma trigonométrica y en forma binómica

Ejercicio 6.- Efectúa las siguientes operaciones y escribe el resultado en forma polar y en forma binómica.

- a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$
- b) $1_{33^\circ} \cdot 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$
- c) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$
- d) $9_{37^\circ} : 3_{97^\circ}$

Ejercicio 7.- Expresa $\cos(3a)$ y $\sin(3a)$ en función de $\sin a$ y $\cos a$.

Ejercicio 8.- Calcula:

- a) $(1 + i)^4$
- b) $(-1 + i)^{30}$
- c) $(1 - i)^6$

Ejercicio 9.- Calcula $\sqrt[4]{-1}$

Ejercicio 10.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $z^2 - 4z + 8 = 0$
- b) $z^3 + 4z^2 + 9z + 36 = 0$
- c) $z^3 + 8i = 0$

Ejercicio 11.- Sabiendo que $u = 3 - 4i$, $v = -3i$, $w = 1 - i$, calcula:

- a) u^2
- b) w^3
- c) $(u - v)^2$
- d) $\frac{(u+v)^3}{w^2}$

Ejercicio 12.- Calcula:

- a) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{20}$
- b) $\frac{i^{298}}{i^{481} - i^{275}}$
- c) $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2000}$
- d) $\frac{(3 + 2i) \cdot i^{17}}{i^{243} \cdot (1 - i^7)}$
- e) $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + \dots + i^{-40}$
- f) $\frac{(2 - i) \cdot (3 + 2i)^2}{(1 + i^{12}) \cdot i^{20}}$

Ejercicio 13.- Resuelve las siguientes cuestiones:

- a) Halla b con la condición de que $(2 + bi)^2$ sea un número real.
- b) Determine b para que $(3 + 2i)(-5 + bi)$ tenga su afijo en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
- c) Halla los valores de a y b para que el producto de los complejos $a + 3i$ y $2 - bi$ sea igual a $23 - 14i$.
- d) Determina el valor de a para que el cociente $\frac{4+2ai}{3a+i}$ sea un número imaginario puro.

Ejercicio 14.- Completa la siguiente tabla:

Afijo	Forma Binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
(2, 2)			
	$1 - i$		
		4_{30}	
			$2(\cos 225 + i \sin 225)$

Ejercicio 15.- Efectúa las siguientes operaciones, expresando los resultados en forma binómica:

a) $2_{25^\circ} \cdot 3_{20^\circ}$

b) $16_{76^\circ} : 4_{46^\circ}$

c) $12_{93^\circ} : 3_{33^\circ}$

d) $(1_{30^\circ})^3$

e) $(4_{225^\circ})^2$

f) $[6(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)] \cdot [3(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)]$

g) $[4(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)]^3$

h) $\frac{4(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)}{2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$

Ejercicio 16.- Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(1 - i)^7 \cdot (-2 + 2i)^5$

c) $(i^8 + i^5) : (\sqrt{2}i)$

e) $i^{39} \cdot (-4 - 4\sqrt{3}i)^7$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

d) $\left(\frac{4-4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$

f) $i^{-73} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)$

Ejercicio 17.- Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt[3]{i}$

c) $\sqrt[3]{1-i}$

e) $\sqrt[6]{i}$

g) $\sqrt[5]{\frac{-32}{i}}$

i) $\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$

b) $\sqrt[3]{-27}$

d) $\sqrt[4]{1+i}$

f) $\sqrt{\frac{9}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{2}i}$

h) $\sqrt[3]{\frac{1-i}{1+i}}$

j) $\sqrt[3]{\frac{i^5 - i - 5}{2i}}$

Ejercicio 18.- Obtén y representa gráficamente las soluciones de las siguientes raíces:

a) $\sqrt[6]{1}$

c) $\sqrt[4]{16i}$

e) $\sqrt[3]{-27i}$

b) $\sqrt[3]{-1}$

d) $\sqrt[5]{-32}$

Ejercicio 19.- Halla todas las soluciones de estas ecuaciones:

a) $z^2 + z + 1 = 0$

c) $z^2 + iz + 2 = 0$

e) $z^3 + 1 = 0$

b) $z^2 - \sqrt{12}z + 4 = 0$

d) $z^6 - 28z^3 + 27 = 0$

f) $z^2 - 64i = 0$

Ejercicio 1.- Responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál es el opuesto del conjugado de $2 - 5i$?
- ¿Cuál es el conjugado del opuesto de $-3 + 4i$?
- ¿Cuál es el conjugado del conjugado de $-1 - 5i$?
- ¿Cuál es el opuesto del opuesto de $3 + i$?

a) opuesto = $-2 + 5i$
 Conjugado del opuesto

$$\boxed{-2 - 5i}$$

b) $3 + 4i$

c) $1 - 5i$

d) $-3 + i$

Ejercicio 2.- Realiza las siguientes operaciones:

a) $(1 - 2i) - (2 - 6i)$

f) $(-1 + i)(2 - 3i)(3 - i)$

j) $(5 - 2i)^2$

b) $-i + (3 + i) - (-1 - 4i)$

g) $\frac{7-3i}{1-i}$

k) $(3 + 4i)^3$

c) $-(2 + i) - 3(-1 - i) + 2(4 + 3i)$

h) $\frac{-2-7i}{-i}$

l) $(-2 + 3i)^4$

d) $(2 - 3i)(-4 + i)$

e) $(-4 - 2i)(-3 + 5i)$

i) $\frac{5-2i}{1-3i}$

m) i^{2019}

a) $(1 - 2i) - (2 - 6i) =$
 $(1 - 2i) + (-2 + 6i) =$
 $\underline{\underline{-1 + 4i}}$

b) $-i + (3 + i) + (1 + 4i) =$
 $\underline{\underline{4 + 4i}}$

c) $(-2 - i) + (3 + 3i) + (8 + 6i) = \underline{\underline{9 + 8i}}$

d) $-8 + 2i + 12i - 3i^2 = \underline{\underline{11 + 14i}}$

e) $12 - 20i + 6i - 10i^2 = \underline{\underline{22 - 14i}}$

f) $(2 + 3i + 2i - 3i^2)(3 - i) = (5 + 5i)(3 - i) = 15 - 5i + 15i - 5i^2 = 20 + 10i$

g) $\frac{7-3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{7+7i-3i-3i^2}{1-i^2} = \frac{10+4i}{2} = \underline{\underline{5+2i}}$

h) $\frac{-2-7i}{-i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-2i-7i^2}{-i^2} = \frac{7-2i}{1} = \underline{\underline{7-2i}}$

i) $\frac{5-2i}{1-3i} \cdot \frac{1+3i}{1+3i} = \frac{5+15i-2i-6i^2}{1-(3i)^2} = \frac{11+13i}{1-9i^2} = \frac{11}{10} + \frac{13}{10}i$

j) $(5-2i)^2 = 5^2 + (2i)^2 - 2 \cdot 5 \cdot 2i = 25 + 4i^2 - 20i = \underline{\underline{21-20i}}$

k) Binomio de Newton $\binom{3}{0} 3^3 (4i)^0 + \binom{3}{1} 3^2 (4i)^1 + \binom{3}{2} 3^1 (4i)^2 + \binom{3}{3} 3^0 (4i)^3$
 $= 1 \cdot 27 \cdot 1 + 3 \cdot 9 \cdot 4i + 3 \cdot 3 \cdot 16i^2 + 1 \cdot 1 \cdot 64i^3 = 27 + 108i - 144 + 64(-i) = \underline{\underline{-117 + 44i}}$

l) $(3i-2)^4 = \binom{4}{0} (3i)^4 (2)^0 - \binom{4}{1} (3i)^3 (2)^1 + \binom{4}{2} (3i)^2 (2)^2 - \binom{4}{3} (3i)^1 (2)^3 + \binom{4}{4} (3i)^0 (2)^4 =$

$= 1 \cdot 81i^4 - 4 \cdot 27i^3 \cdot 2 + 6 \cdot 9i^2 \cdot 4 - 4 \cdot 3i \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 16 =$

$= 81 + 216i - 216 - 96i + 16 =$

$\underline{\underline{-119 + 120i}}$

m) $i^{2019} = \frac{2019}{4} = 504 \text{ residuo } 3 = i^3 = \underline{\underline{-i}}$

$$\boxed{\begin{array}{l} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i \dots \end{array}}$$

Ejercicio 3.- Calcula el valor de a para que la multiplicación $(1+2i)(a-6i)$:

a) sea un número real,

b) sea un número imaginario puro

Hacemos la multiplicación:

$$\begin{aligned} a - 6i^2 + 2ai - 12i^2 \\ \hline (a+12) + (2a-6)i \end{aligned}$$

a) Si es real, no puede tener parte imaginaria, es decir:

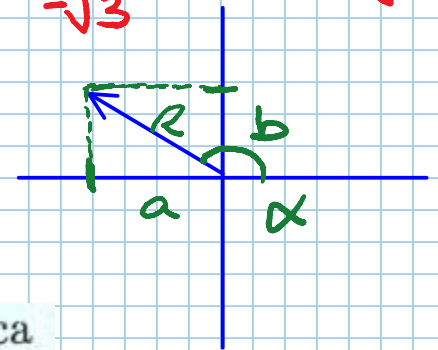
$$2a-6=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=3}}$$

b) Si es imaginario puro, no puede tener parte real, es decir:

$$a+12=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=-12}}$$

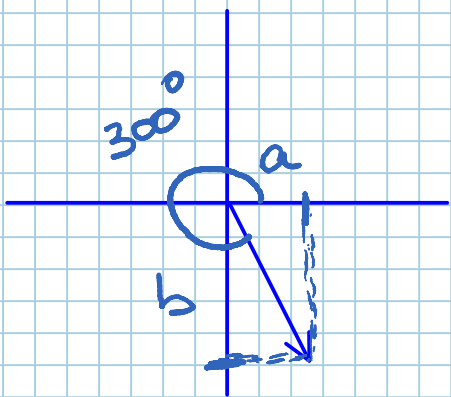
Ejercicio 4.- Expresa el complejo $-\sqrt{3}+i$ en forma polar y en forma trigonométrica

$$\begin{aligned} a &= -\sqrt{3} & r &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 & \alpha &= \arctan \frac{b}{a} = \arctan \frac{1}{-\sqrt{3}} = \arctan -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ b &= 1 & \alpha &= 135^\circ & \text{Forma polar} & 2_{135^\circ} \end{aligned}$$



Trigonométrica $2(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$

Ejercicio 5.- Expresa el complejo 3_{300° en forma trigonométrica y en forma binómica



$$\begin{aligned} a &= r \cos \alpha = 3 \cos 300^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ b &= i r \sin \alpha = 3 \sin 300^\circ i = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) i = -\frac{3\sqrt{3}}{2} i \\ \text{Binómica} &= \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} i & \text{Trigonométrica} & 3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) \end{aligned}$$

Ejercicio 6.- Efectúa las siguientes operaciones y escribe el resultado en forma polar y en forma binómica.

a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ}$

b) $1_{33^\circ} \cdot 2_{16^\circ} \cdot 3_{41^\circ}$

c) $2_{106^\circ} : 1_{61^\circ}$

d) $9_{37^\circ} : 3_{97^\circ}$

a) $3_{45^\circ} \cdot 2_{15^\circ} = (3 \cdot 2)_{45+15} = 6_{60^\circ} \rightarrow \begin{cases} r=6 \rightarrow a=r \cos \alpha = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \\ \alpha=60^\circ \rightarrow b=r \sin \alpha = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Binómica $a+bi = 3+3\sqrt{3}i$

b) $(1 \cdot 2 \cdot 3)_{33+16+41} = 6_{90^\circ} \Rightarrow \begin{cases} a=r \cos \alpha = 6 \cos 90^\circ = 0 \\ b=r \sin \alpha = 6 \sin 90^\circ = 6 \end{cases} \quad \underline{\underline{z = 6i}}$

c) $(2/1)_{106-61} = 2_{45^\circ} \begin{cases} a=r \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \\ b=r \sin \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \end{cases} \quad \underline{\underline{z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i}}$

d) $(\frac{9}{3})_{37-97} = 3_{-60^\circ} = 3_{300^\circ} \begin{cases} a=3 \cos 300^\circ = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ b=3 \sin 300^\circ = 3 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \underline{\underline{z = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i}}$

Ejercicio 7.- Expresa $\cos(3a)$ y $\sin(3a)$ en función de $\sin a$ y $\cos a$.

Fórmula de Moivre
 $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

$$(\cos x + i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

Desarrollamos el cubo (Binomio de Newton)

$$\cos^3 x + 3 \cos^2 x \cdot i \sin x + 3 \cos x \cdot (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3 = \cos 3x + i \sin 3x$$

$$\cos^3 x + 3 \sin x \cos^2 x i + 3 \cos x \cdot i^2 \sin^2 x + i^3 \sin^3 x = \cos 3x + i \sin 3x$$

$$\cos^3 x + 3 \sin x \cos^2 x i - 3 \cos x \sin^2 x - \sin^3 x \cdot i = \cos 3x + i \sin 3x$$

$$(\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + (3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x) i = \cos 3x + i \sin 3x$$

Comparamos términos semejantes

$$\sin 3x = 3 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$$

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$$

Ejercicio 8.- Calcula:

a) $(1+i)^4$

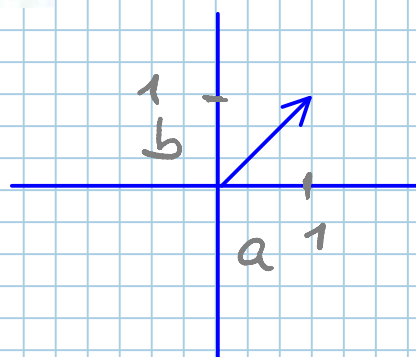
b) $(-1+i)^{30}$

c) $(1-i)^6$

Transformamos a polar:

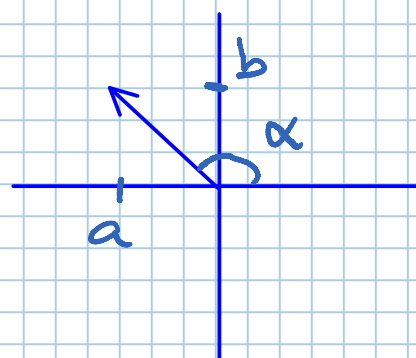
a) $(1+i)^4 \rightarrow a=1 \rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$
 $b=1$

$$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = \arctan 1 = 45^\circ$$



$$\left(\sqrt{2}_{45^\circ} \right)^4 = \left(\sqrt{2} \right)_{45 \cdot 4}^4 = \sqrt{16}_{180} = \underline{\underline{4_{180^\circ}}}$$

b) $a=-1$ $r = \sqrt{2}$
 $b=1$ $\alpha = \arctan(-1) = 135^\circ$



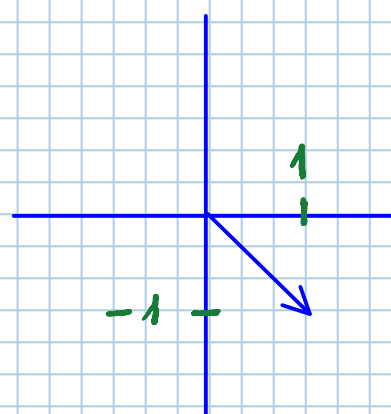
$$135 \cdot 30 = 4050 \begin{array}{r} 360 \\ 90 \end{array} 11$$

$$\left(\sqrt{2}_{135^\circ} \right)^{30} = \sqrt{2^{30}}_{135 \cdot 30} = \boxed{2^{15}_{90^\circ}}$$

c) $(1-i)^6 \Rightarrow a=1$ $b=-1$ $r = \sqrt{2}$

$$\alpha = \arctan(-1) = 315^\circ$$

$$\left(\sqrt{2}_{315^\circ} \right)^6 = \left(\sqrt{2} \right)_{315 \cdot 6}^6 = 2^3_{1890} = \underline{\underline{8_{90^\circ}}}$$



$$1890 \begin{array}{r} 360 \\ 90 \end{array} 3$$

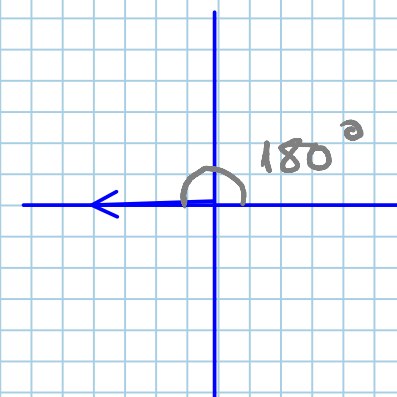
Ejercicio 9.- Calcula $\sqrt[4]{-1}$

$$a = -1 \quad b = 0$$

$$\alpha = \arccos 0 =$$

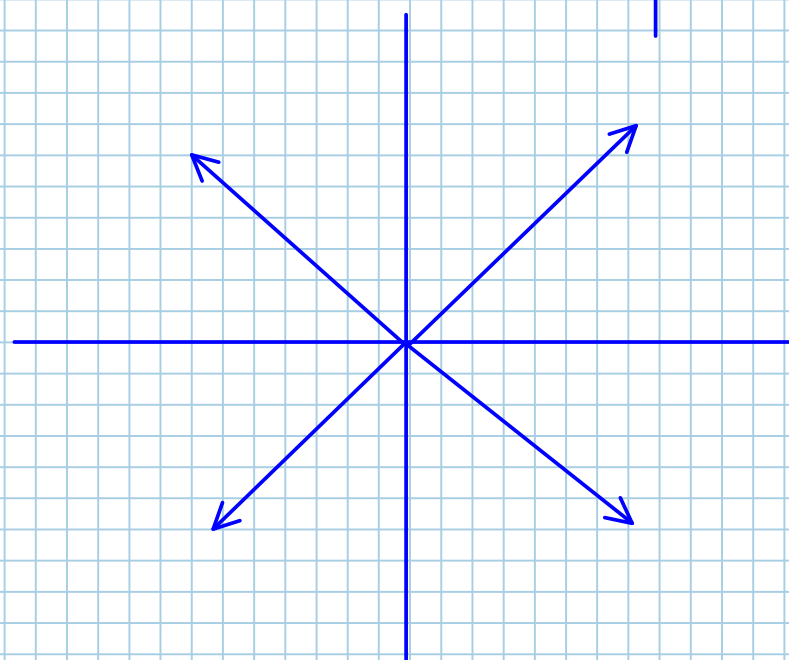
$$\alpha = 180^\circ$$

$$r = \sqrt{1} = 1$$



$$\sqrt[4]{1} \quad 180^\circ$$

$$\sqrt[4]{1} \quad 180^\circ = \begin{cases} \sqrt[4]{1} \frac{180 + 0 \cdot 360}{4} = 1_{45^\circ} \\ \sqrt[4]{1} \frac{180 + 1 \cdot 360}{4} = 1_{135^\circ} \\ \sqrt[4]{1} \frac{180 + 2 \cdot 360}{4} = 1_{225^\circ} \\ \sqrt[4]{1} \frac{180 + 3 \cdot 360}{4} = 1_{315^\circ} \end{cases}$$



Ejercicio 10.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $z^2 - 4z + 8 = 0$

b) $z^3 + 4z^2 + 9z + 36 = 0$

c) $z^3 + 8i = 0$

a) $z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{4 \pm 4i}{2} = \boxed{2 \pm 2i}$

b)
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 9 & 36 \\ -4 & & -4 & 0 & -36 \\ \hline & 1 & 0 & 9 & 0 \end{array} = (x+4)(x^2+9) = \begin{cases} x = -4 \\ x^2+9=0 \Rightarrow x = \sqrt{-9} = \pm 3i \end{cases}$$

c) $z^3 + 8i = 0 \quad z^3 = -8i \quad z = \sqrt[3]{-8i}$ b) paso a polar

$$\sqrt[3]{8} \quad 270^\circ = \begin{cases} \sqrt[3]{8} \frac{270 + 0 \cdot 360}{3} = 2_{90^\circ} \rightarrow \begin{cases} a = r \cos \alpha = 0 \\ b = r \sin \alpha = 2 \end{cases} \quad \boxed{z_1 = 2i} \\ \sqrt[3]{8} \frac{270 + 1 \cdot 360}{3} = 2_{210^\circ} \rightarrow \begin{cases} a = r \cos \alpha = 2 \cos 210^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} \\ b = r \sin \alpha = 2 \sin 210^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases} \quad \boxed{z_2 = -\sqrt{3} - i} \\ \sqrt[3]{8} \frac{270 + 2 \cdot 360}{3} = 2_{330^\circ} \rightarrow \begin{cases} a = r \cos \alpha = 2 \cos 330^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ b = r \sin \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{cases} \quad \boxed{z_3 = \sqrt{3} - i} \end{cases}$$

Ejercicio 11.- Sabiendo que $u = 3 - 4i$, $v = -3i$, $w = 1 - i$, calcula:

a) u^2

b) w^3

c) $(u - v)^2$

d) $\frac{(u+v)^3}{w^2}$

a) $u^2 = (3 - 4i)^2 = 9 + 16i^2 - 24i = 9 - 16 - 24i = \underline{\underline{-7 - 24i}}$

b) $w^3 = (1 - i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot i + 3 \cdot 1 \cdot i^2 - i^3 = 1 - 3i - 3 + i = \underline{\underline{-2 - 2i}}$

c) $(u - v)^2 = [(3 - 4i) - (-3i)]^2 = (3 - i)^2 = 9 + i^2 - 6i = \underline{\underline{8 - 6i}}$

$$d) \frac{(u+v)^3}{w^2} = \left[\frac{(3-4i)+(-3i)}{(1-i)^2} \right]^3 = \frac{(3-7i)^3}{(1-i)^2} = \frac{9-189i+441i^2-343i^3}{1+i^2-2i} =$$

$$= \frac{9-189i-441+343i^2}{-2i} = \frac{-432-154i}{-2i} \cdot \frac{2i}{2i} = \frac{-864i-308i^2}{-4i^2} = \frac{308-864i}{4} = \underline{\underline{77-216i}}$$

Ejercicio 12.- Calcula:

a) $i + i^2 + i^3 + \dots + i^{20}$

c) $1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2000}$

e) $i^{-1} + i^{-2} + i^{-3} + \dots + i^{-40}$

b) $\frac{i^{298}}{i^{481} - i^{275}}$

d) $\frac{(3+2i) \cdot i^{17}}{i^{243} \cdot (1-i^7)}$

f) $\frac{(2-i) \cdot (3+2i)^2}{(1+i^{12}) \cdot i^{20}}$

a) $i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{20}$
 $\underbrace{i - 1 - i + 1}_{\text{Cero}}$ Cada 4 potencias de $i = 0$, por lo tanto la solución es cero

b) $\frac{i^{298}}{i^{481} - i^{275}} = \frac{18 \overline{4} 74}{2} \quad \frac{48 \overline{1} 14}{08 \overline{0} 120} \quad \frac{275 \overline{4}}{35 \overline{3} 68} = \frac{i^2}{i - i^3} = \frac{i^2}{i + i} = \frac{-1}{2i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i}{2i^2} = \frac{-i}{-2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}i}}$

c) vale 1 (ver apartado a)

d) $\frac{(3+2i) \cdot i^{17}}{i^{243} (1-i^7)} = \frac{17 \overline{4}}{1 \overline{4}} \quad \frac{243 \overline{4}}{03 \overline{3} 60} = \frac{(3+2i) \cdot i}{i^3 (1-i^3)} = \frac{3i+2i^2}{-i(1+i)} = \frac{-2+3i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} =$

$$= \frac{-2-2i+3i+3i^2}{1-i^2} = \frac{-5+i}{2} = \underline{\underline{-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}i}}$$

e) $i^{-1} + i^{-2} + \dots + i^{-40} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \dots = \underbrace{\frac{1}{i} - 1 - \frac{1}{i} + 1 + \dots}_{\text{Cero}} = \underline{\underline{\text{Cero}}}$

f) $\frac{(2-i)(9+4i^2+12i)}{(1+i) \cdot 1} = \frac{(2-i)(5+12i)}{2} = \frac{10+24i-5i^2-12i^2}{2} = \frac{22+19i}{2} = \underline{\underline{11 + \frac{19}{2}i}}$

Ejercicio 13.- Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla b con la condición de que $(2+bi)^2$ sea un número real.

b) Determine b para que $(3+2i)(-5+bi)$ tenga su afijo en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

c) Halla los valores de a y b para que el producto de los complejos $a+3i$ y $2-bi$ sea igual a $23-14i$.

d) Determina el valor de a para que el cociente $\frac{4+2ai}{3a+i}$ sea un número imaginario puro.

a) $(2+bi)^2 = 4 + b^2i^2 + 4bi = (4-b^2) + (4b)i \rightarrow \text{real} \rightarrow 4b=0$

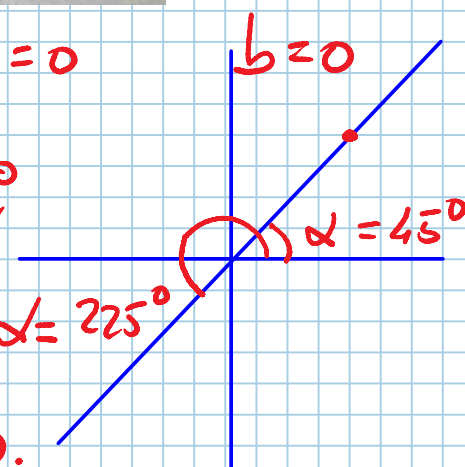
b) $(3+2i)(-5+bi) = -15 + 3bi - 10i + 2bi^2 = (-15-2b) + (3b-10)i$

$\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{3b-10}{-15-2b} = \frac{1}{-1}$

$3b-10 = -15-2b \Rightarrow 5b = -5$

$\boxed{b = -1}$

Si lo hacemos con 225° , da lo mismo.



Ejercicio 13.- Resuelve las siguientes cuestiones:

- Halla b con la condición de que $(2 + bi)^2$ sea un número real.
- Determine b para que $(3 + 2i)(-5 + bi)$ tenga su afijo en la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
- Halla los valores de a y b para que el producto de los complejos $a + 3i$ y $2 - bi$ sea igual a $23 - 14i$.
- Determina el valor de a para que el cociente $\frac{4+2ai}{3a+i}$ sea un número imaginario puro.

$$c) (a+3i)(2-bi) = (23-14i) \Rightarrow (2a - abi^2 + 6i^2 - 3bi^2) = (-14i)$$

$$(2a+3b) + (6-ab)i = 24-14i$$

$$2a+3b=23$$

$$6-ab=-14$$

$$20 = ab \Rightarrow a = \frac{20}{b}$$

$$2\left(\frac{20}{b}\right) + 3b = 23 \Rightarrow \frac{40}{b} + 3b = 23 \Rightarrow 40 + 3b^2 = 23b \Rightarrow 3b^2 - 23b + 40 = 0$$

$$b = \frac{23 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{23 \pm 7}{6} = \begin{cases} 5 \\ \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$b_1 = 5$$

$$b_2 = \frac{8}{3}$$

$$a_1 = \frac{20}{5} = 4$$

$$a_2 = 20 : \frac{8}{3} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

$$a_2 = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

$$d) \frac{4+2ai}{3a+i} \cdot \frac{3a-i}{3a-i} = \frac{12a - 4i + 6a^2i - 2ai^2}{9a^2 - i^2} = \frac{(14a) + (6a^2-4)i}{9a^2-1}$$

$$= \frac{14a}{9a^2-1} + \frac{6a^2-4}{9a^2-1}i$$

para que sea imaginario puro, la parte real ha de ser cero.

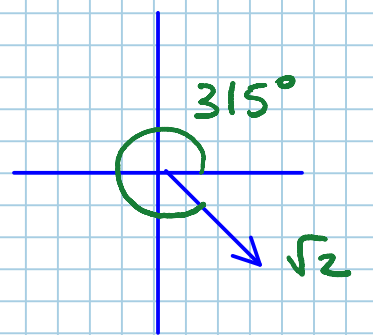
$$\frac{14a}{9a^2-1} = 0$$

$$14a = 0$$

$$a = 0$$

Ejercicio 14.- Completa la siguiente tabla:

Afijo	Forma Binómica	Forma polar	Forma trigonométrica
(2, 2)	$2 + 2i$	$2\sqrt{2} \ 45^\circ$	$2\sqrt{2}(\cos 45 + i \operatorname{sen} 45)$
(1, -1)	$1 - i$	$\sqrt{2} \ 315^\circ$	$\sqrt{2}(\cos 315 + i \operatorname{sen} 315)$
$(2\sqrt{3}, 2)$	$2\sqrt{3} + 2i$	4_{30}	$4(\cos 30 + i \operatorname{sen} 30)$
$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$	$2 \ 225^\circ$	$2(\cos 225 + i \operatorname{sen} 225)$



$$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

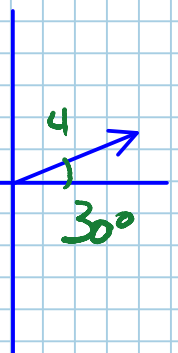
$$a = 4 \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\alpha = \arctan \frac{2}{2} = 45^\circ$$

$$\alpha = \arctan \frac{-1}{-1} \Rightarrow \alpha = 315^\circ \quad b = 4 \operatorname{sen} 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$a = 2 \cos 225^\circ = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$b = 2 \operatorname{sen} 225^\circ = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$$



Ejercicio 15.- Efectúa las siguientes operaciones, expresando los resultados en forma binómica:

a) $2_{25^\circ} \cdot 3_{20^\circ}$

b) $16_{76^\circ} : 4_{46^\circ}$

c) $12_{93^\circ} : 3_{33^\circ}$

d) $(1_{30^\circ})^3$

e) $(4_{225^\circ})^2$

f) $[6(\cos 130^\circ + i \sin 130^\circ)] \cdot [3(\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)]$

g) $[4(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)]^3$

h) $\frac{4(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)}{2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)}$

a) $2_{25^\circ} \cdot 3_{20^\circ} = 6_{(20+25)} = 6_{45^\circ}$ $a = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$ $b = 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$

b) $16_{76^\circ} : 4_{46^\circ} = \left(\frac{16}{4}\right)_{76-46} = 4_{30^\circ}$ $a = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ $b = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

$2\sqrt{3} + 2i$

c) $12_{93^\circ} : 3_{33^\circ} = 4_{60^\circ}$ $a = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ $b = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

$2 + 2\sqrt{3}i$

d) $(1_{30^\circ})^3 = 1_{(30 \cdot 3)} = 1_{90^\circ}$ $a = 0$ $b = 1$

i

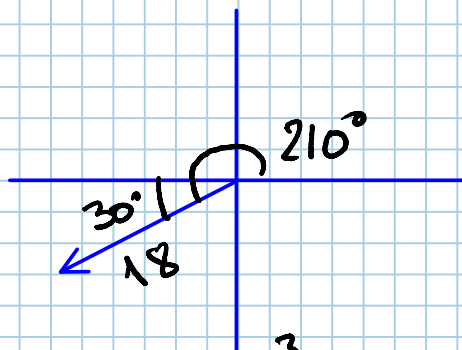
e) $(4_{225^\circ})^2 = 4_{225 \cdot 2} = 16_{450^\circ} = 16_{90^\circ}$ $a = 0$ $b = 16$

$16i$

f) $6_{130^\circ} \cdot 3_{80^\circ} = 18_{210^\circ}$ $a = 18 \cos 210^\circ = 18 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -9\sqrt{3}$

$-9\sqrt{3} - 9i$

$b = 18 \sin 210^\circ = 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -9$



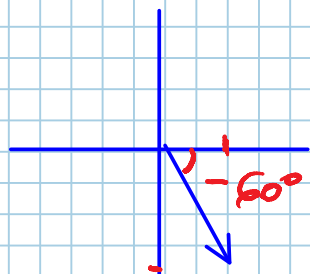
g) $(4_{20^\circ})^3 = 4_{20 \cdot 3} = 64_{60^\circ}$

$a = 64 \cdot \frac{1}{2} = 32$

$32 + 32\sqrt{3}i$

$b = 64 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$

h) $\frac{4_{330^\circ}}{2_{30^\circ}} = 2_{300^\circ}$



$a = 2 \cos 300^\circ = 1$

$1 - \sqrt{3}i$

$b = 2 \sin 300^\circ = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$

Ejercicio 16.- Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(1-i)^7 \cdot (-2+2i)^5$

c) $(i^8 + i^5) : (\sqrt{2}i)$

e) $i^{39} \cdot (-4 - 4\sqrt{3}i)^7$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

d) $\left(\frac{4-4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$

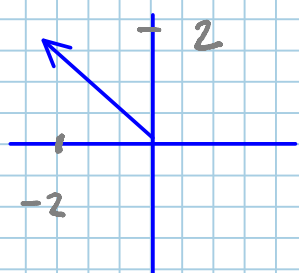
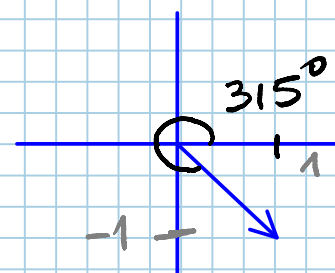
f) $i^{-73} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)$

a) $1-i$ $r = \sqrt{2}$

$-2+2i$

$r = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}_{315})^7 \cdot (2\sqrt{2}_{135})^5 =$



$\alpha = 135^\circ$

$= \sqrt{2}^7_{315 \cdot 7} \cdot 2^5 \sqrt{2}^5_{135 \cdot 5} = 2^3 \sqrt{2}_{2205} \cdot 2^7 \sqrt{2}_{675}$

$= 2^{11}_{2880} = \underline{\underline{2^{11}_0}}$

$2880 \overline{) 360}$
 $\underline{0} \quad 8$

Ejercicio 16.- Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(1 - i)^7 \cdot (-2 + 2i)^5$

c) $(i^8 + i^5) : (\sqrt{2}i)$

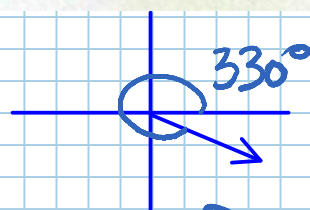
e) $i^{39} \cdot (-4 - 4\sqrt{3}i)^7$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{20}$

d) $\left(\frac{4-4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i}\right)^6$

f) $i^{-73} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i\right)$

b) $r = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$



$(1_{330})^{20} = 1_{330 \cdot 20} = 1_{6600}$

$\alpha = \arctan \frac{b}{a} = \arctan\left(-\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{array}{r} 6600 \overline{) 360} \\ 120 \end{array}$$

$= 1_{120}$

c)