ACTIVIDADES FINALES

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

➀ Completa en tu cuaderno la siguiente tabla referida a la equivalencia de ángulos en los distintos sistemas de medida.

Vamos a hacer las equivalencias y después las vamos introduciendo en la tabla, teniendo en cuenta que:

$$\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}}$$

1) Como 180º son π rad, 90º que son la mitad serán π/2 rad.

2) Aunque en este es muy fácil razonar como en el anterior (¼ es la mitad de ½) para este tipo de ejercicios en que se nos da el ángulo en radianes en función de π, lo más rápido es sustituir π rad por 180º:

$$\frac{\pi}{4}\text{rad} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

3) Ahora resolvemos una sencilla proporción: $\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = \frac{120^\circ}{x} \Leftrightarrow x = \frac{120\pi}{180}\text{rad} = \frac{2\pi}{3}\text{rad}$.

4) $\frac{3\pi}{2}\text{rad} = \frac{3{\cdot}180^\circ}{2} = 270^\circ$.

5) $\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = \frac{225^\circ}{x} \Leftrightarrow x = \frac{225\pi}{180}\text{rad} = \frac{5\pi}{4}\text{rad}$.

6) $\frac{4\pi}{3}\text{rad} = \frac{4{\cdot}180^\circ}{3} = 240^\circ$.

7) $\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = \frac{39^\circ 42'}{x} \Leftrightarrow x = \frac{39^\circ 42'\,\pi}{180}\text{rad} = 0{,}693\ \text{rad}$

8) $\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = \frac{x}{1\,\text{rad}} \Leftrightarrow x = \frac{180^\circ}{\pi} = 57{,}29578^\circ = 57^\circ 17' 44''$.

9) $\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = \frac{135^\circ 22' 42''}{x} \Leftrightarrow x = \frac{135^\circ 22' 42''{\cdot}\pi}{180}\text{rad} = 2{,}36\ \text{rad}$.

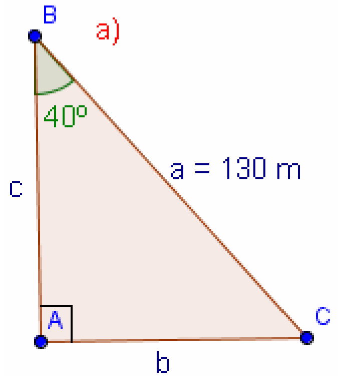
10) $\frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} = \frac{x}{2{,}5\ \text{rad}} \Leftrightarrow x = \frac{2{,}5{\cdot}180^\circ}{\pi} = 143{,}23945^\circ = 143^\circ 14'$.

1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)
90º	**45º**	120º	**270º**	225º	**240º**	39º 42’	**57º17’44”**	135º22’42”	**143º14’**
π/2 rad	π/4 rad	**2π/3 rad**	3π/2 rad	**5π/4rad**	4π/3 rad	**0,693 rad**	1 rad	**2,36 rad**	2,5 rad

➁ Resuelve los siguientes triángulos rectángulos:

Resolver un triángulo es conocer la amplitud de sus tres ángulos y la longitud de sus tres lados. Como son triángulos rectángulos, la suma de los ángulos agudos ha de ser 90º.

a) Como $\hat{B} = 40^{o}$, $\hat{C} = 90^{o} - \hat{B} = 90^{o} - 40^{o} = 50^{o}$

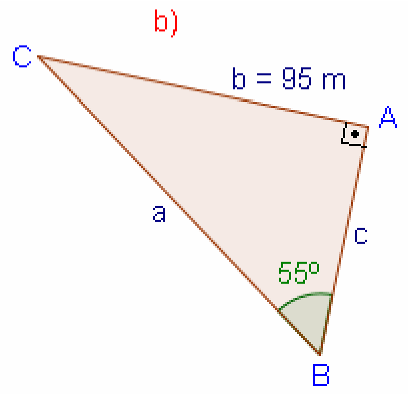


Para hallar las longitudes de los lados debemos usar, siempre que sea posible, datos del problema y no valores calculados para evitar acumular errores por aproximaciones sucesivas.

Del ángulo conocido $\hat{B}$, sabemos la hipotenusa (a) y hemos de hallar el cateto opuesto, b, (usamos el seno) y el cateto contiguo, c, (usamos el coseno):

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow b = a\cdot \operatorname{sen}\hat{B} = 130\text{m}\cdot \operatorname{sen}40^{o} \cong 83{,}56 \text{ m} \\ \cos\hat{B} = \dfrac{c}{a} \Leftrightarrow c = a\cdot \cos\hat{B} = 130\text{m}\cdot \cos 40^{o} \cong 99{,}59 \text{ m} \end{cases}$$

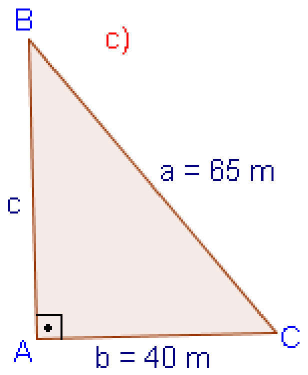
b) Como $\hat{B} = 55^{o}$, $\hat{C} = 90^{o} - \hat{B} = 90^{o} - 55^{o} = 35^{o}$



Como conocemos el cateto opuesto a $\hat{B}$, para hallar la hipotenusa (a) usamos el seno y para calcular el cateto contiguo (c) usamos la tangente:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\hat{B} = \dfrac{b}{a} \Leftrightarrow a = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \dfrac{95 \text{ m}}{\operatorname{sen}55^{o}} = 115{,}97 \text{ m} \\ \operatorname{tg}\hat{B} = \dfrac{b}{c} \Leftrightarrow c = \dfrac{b}{\operatorname{tg}\hat{B}} = \dfrac{95 \text{ m}}{\operatorname{tg}55^{o}} = 66{,}92 \text{ m} \end{cases}$$

c) En este triángulo conocemos la hipotenusa, a, y uno de los catetos, b, pero ningún ángulo, el cateto que nos falta es fácil de hallar, usamos el teorema de Pitágoras:



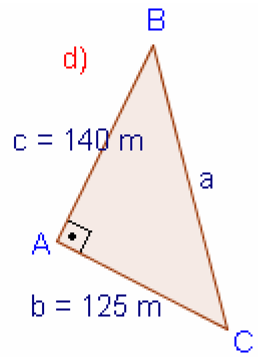
$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{65^2 - 40^2} = \sqrt{2625} \cong 51{,}23 \text{ m}$$

¿Cómo hallamos los dos ángulos que nos faltan?. Si somos capaces de calcular uno de los dos sabremos el otro ya que son complementarios (suman 90º). Hallemos $\hat{B}$, ¿qué razón trigonométrica de $\hat{B}$ relaciona la hipotenusa, a, con el cateto opuesto, b?, pues el seno, luego nos basta con calcular el ángulo cuyo seno es un valor conocido (b/a):

$$\operatorname{se}\hat{B} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \hat{B} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{40}{65}\right) = \operatorname{arc\,sen}(0{,}6153846) = 37^{o}\ 58'\ 46''$$

Conocido $\hat{B}$, sabemos que $\hat{C} = 90^{o} - \hat{B} = 90^{o} - 37^{o}\ 58'\ 46'' = 52^{o}\ 1'\ 14''$

d) Es similar al anterior pues conocemos dos lados pero ningún ángulo.

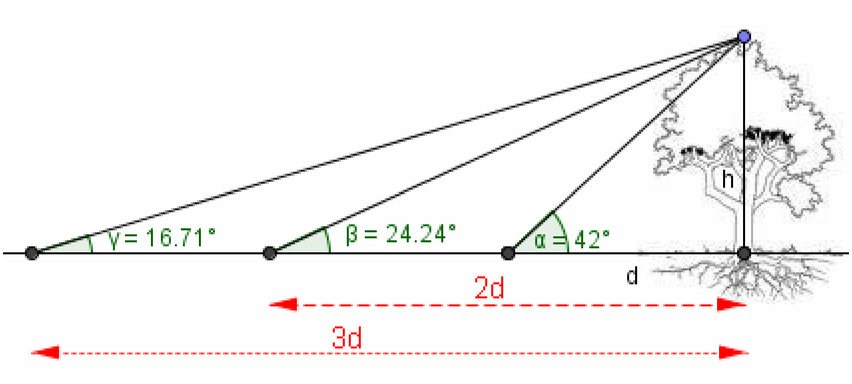


$$a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{125^2 - 140^2} \cong 187{,}68 \text{ m}$$

$$\operatorname{tg}\hat{B} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow \hat{B} = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{c}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{125}{140}\right) = 41^{o}\ 45'\ 37''$$

Luego $\hat{C} = 90^{o} - \hat{B} = 90^{o} - 41^{o}\ 45'\ 37'' = 48^{o}\ 14'\ 23''$

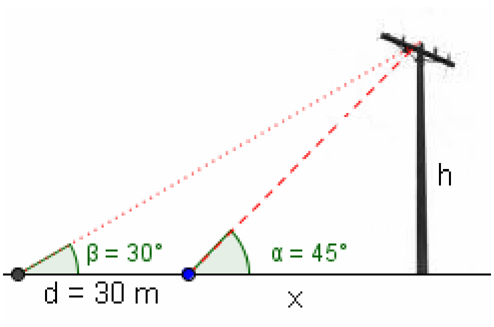
③ Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de 42°. ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿y colocándose a distancia triple?



El ángulo bajo el que se ve el árbol a una distancia d es α = 42º, luego escribiendo las tangentes de los desconocidos en función de la tangente del ángulo α podemos hallarlos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}42^\circ = \dfrac{h}{d} \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{h}{2d} = \dfrac{1}{2}\dfrac{h}{d} = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}42^\circ = 0{,}450202 \Rightarrow \beta = \operatorname{arc\,tg}0{,}450202 = 24^\circ\,14'\,14'' \\ \operatorname{tg}\gamma = \dfrac{h}{3d} = \dfrac{1}{3}\dfrac{h}{d} = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}42^\circ = 0{,}3001346 \Rightarrow \gamma = \operatorname{arc\,tg}0{,}3001346 = 16^\circ\,42'\,22'' \end{cases}$$

④ Calcula la altura de un poste, sabiendo que desde un cierto punto del suelo se ve este con un ángulo de 30° y, si nos acercamos 30 m, lo vemos con un ángulo de 45°.



Se trata de un ejercicio clásico de los denominados “de doble observación”, para resolverlos planteamos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a partir de la tangente de los dos ángulos conocidos:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{x} \Leftrightarrow h = x\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{h}{x+d} \Leftrightarrow h = (x+d)\operatorname{tg}\beta \end{cases}$$

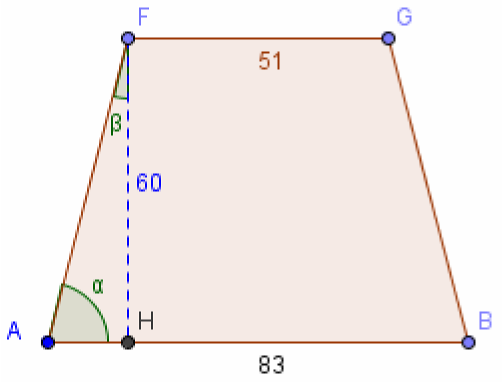
si resolvemos este sistema tendremos x y h, igualando h tenemos una ecuación en x, que resolvemos:

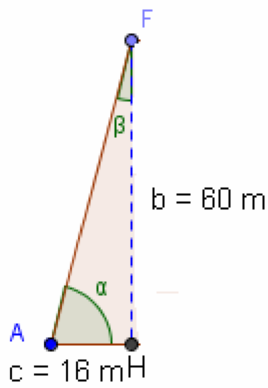
$x\operatorname{tg}\alpha = (x+d)\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x\operatorname{tg}\alpha = x\operatorname{tg}\beta + d\cdot\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x\operatorname{tg}\alpha - x\operatorname{tg}\beta = d\cdot\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = d\cdot\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x = \dfrac{d\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}$ y sustituyendo este valor de x en la primera igualdad para h, tenemos:

$$h = x\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{d\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{30\text{m}\cdot\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}30^\circ}{\operatorname{tg}45^\circ - \operatorname{tg}30^\circ} \cong 40{,}98\text{ m}$$ mide el poste.

Si tienes dificultades para operar con variables, sustituye valores al igualar h:
$x\operatorname{tg}\alpha = (x + d)\operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow x\cdot\operatorname{tg}45^\circ = (x+30)\cdot\operatorname{tg}30^\circ \Leftrightarrow x = (x + 30)\cdot 0{,}577 \Leftrightarrow x = 0{,}577x + 17{,}32$; etc.

⑤ Calcula los ángulos de un trapecio isósceles de altura 60 m cuyas bases miden 83 y 51 m.



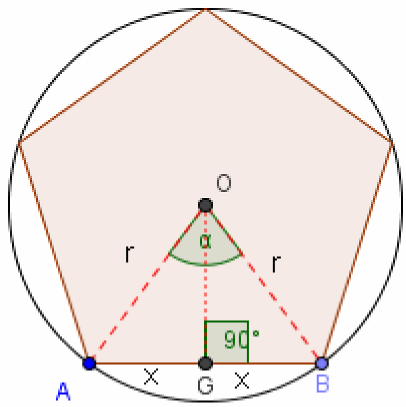


Se trata de hallar el ángulo $\alpha = \hat{A} = \hat{B}$, ya que conocido α, sabemos $\beta = 90^\circ - \alpha$, y por tanto los ángulos $\hat{F} = \hat{G} = 90^\circ + \beta = 90^\circ + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha$.

Para hallar el ángulo α, usamos el triángulo rectángulo AHF, en donde conocemos los dos catetos, la altura b = 60 m y AH = c = $\frac{\overline{AB}-\overline{FG}}{2} = \frac{83-51}{2} = 16$ m:

tg α = $\frac{b}{c} \Rightarrow \alpha = \text{arc tg}\left(\frac{b}{c}\right) = \text{arc tg}\left(\frac{60\text{m}}{16\text{m}}\right) =$ 75º 4' 6,9", luego $\hat{F} = \hat{G}$ = 180º - α = 180º - (75º 4' 6,9") = 104º 55' 54,1"

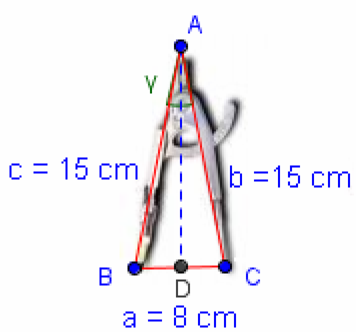
⑥ Calcula el perímetro de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de 30 cm de diámetro.

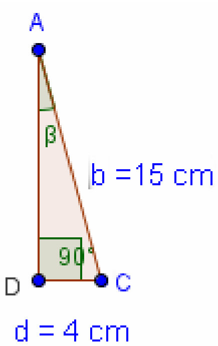


Para conocer el perímetro, p = 5L, hemos de hallar la longitud del lado, L = 2x. Partimos del triángulo rectángulo OGB, como los 360º grados de una circunferencia están divididos en 5 partes iguales, el ángulo α = 360º/5 = 72º, su mitad es la amplitud del ángulo con vértice en O del triángulo OGB, que llamamos β = 36º. De ese ángulo, en el triángulo rectángulo OGB, conocemos la hipotenusa r = 30 cm y queremos calcular el cateto opuesto x, utilizamos, pues, el seno de β:

$\text{sen}\beta = \frac{x}{r} \Leftrightarrow x = r\,\text{sen}\beta = 30\text{cm}\cdot\text{sen}36^\circ \cong 17{,}63$ cm, luego el lado del pentágono es L = 2x = 2·17,63 = 35,24 cm y su perímetro p = 5·L = 5·35,24 cm = 176,2 cm.

⑦ Si las puntas de un compás distan 8 cm y cada rama mide 15 cm, ¿qué ángulo forman?





Las ramas del compás forman un triángulo isósceles, si tomamos si trazamos la altura AD y tomamos el triángulo rectángulo ADC:

$$\text{sen}\beta = \frac{d}{b} \Rightarrow \beta = \text{arc sen}\left(\frac{d}{b}\right) = \text{arc sen}\left(\frac{4\text{cm}}{15\text{cm}}\right) = 15^\circ\, 27'\, 57''$$

Luego el ángulo pedido será el doble $\gamma = 2\beta$ = 2· 15º 27' 57" = 30º 55' 54".

⑧ Sabiendo que cos α =- 5/12 y que el ángulo está en el segundo cuadrante, halla las demás razones trigonométricas.

Despejamos el seno de la ecuación fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$:

$\text{sen}\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{25}{144}} = \sqrt{\frac{119}{144}} = \frac{\sqrt{119}}{12}$ en al estar en el 2º cuadrante hemos tomado el valor positivo de la raíz ya que en ese cuadrante el seno es positivo. El resto de las razones son:

$$\begin{cases} \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\sqrt{119}/12}{-5/12} = -\dfrac{\sqrt{119}}{5} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-5/12} = -\dfrac{12}{5} \\ \text{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\sqrt{119}/12} = \dfrac{12}{\sqrt{119}} = \dfrac{12\sqrt{119}}{119} \\ \text{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = -\dfrac{5\sqrt{119}}{119} \end{cases}$$

⑨ Sabiendo que tg x = 3 y que 180° < x < 270°, calcula las demás ángulos razones trigonométricas.

Podemos resolverlo de dos formas:

1) Usando una de las ecuaciones de la trigonometría $1 + \text{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$:

$\sec\alpha = -\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha} = -\sqrt{1+3^2} = -\sqrt{10} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} = \frac{1}{-\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ tomamos el valor negativo de la raíz ya que en el tercer cuadrante ambas razones trigonométricas son negativas.

Ahora hallamos las demás:

$$\begin{cases} \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \Leftarrow \text{sen}\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\alpha = -\dfrac{3\sqrt{10}}{10} \\ \text{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\text{sen}\alpha} = \dfrac{1}{-\dfrac{3\sqrt{10}}{10}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{3} \\ \text{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\text{tg}\alpha} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

2) Formando un sistema con la definición de la tangente y la ecuación fundamental:

$$\begin{cases} \text{tg}\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \text{sen}\alpha = \cos\alpha \cdot \text{tg}\alpha = 3\cos\alpha \\ \text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xrightarrow{\text{sustituyendo}} (3\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow 9\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 10\cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{10}} =$$

$= -\frac{\sqrt{10}}{10}$ que es el valor obtenido por el primer método.

⑩ Calcula las restantes razones trigonométricas de un ángulo A cuya tangente es positiva y sen A = -3/5

Si la tangente es positiva y el seno negativo es porque estamos en el tercer cuadrante, es decir 180º < A < 270º.

Despejamos el coseno de la ecuación fundamental de la trigonometría $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$:

$\cos\alpha = -\sqrt{1-sen^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ en al estar en el 3[er] cuadrante hemos tomado el valor negativo de la raíz ya que en ese cuadrante el coseno es negativo. El resto de las razones son:

$$\begin{cases} tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{-3/5}{-4/5} = \dfrac{3}{4} \\ \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{1}{-4/5} = -\dfrac{5}{4} \\ cosec\alpha = \dfrac{1}{sen\alpha} = \dfrac{1}{-3/5} = -\dfrac{5}{3} \\ cotg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

①① Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $$\frac{1+tg^2\alpha}{1+cotg^2\alpha} \overset{(1)}{=} \frac{1+\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}} \overset{(2)}{=} \frac{\dfrac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{sen^2\alpha}} \overset{(3)}{=} \frac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{1}{sen^2\alpha}} = \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha$$

(1) Sustituyendo $tg\alpha = sen\alpha/\cos\alpha$ y $cotg\alpha = \cos\alpha/sen\alpha$.
(2) Al sumar las fracciones del numerador y denominador.
(3) Según la ecuación fundamental de la trigonometría $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.

b) $$\frac{\cos^2\alpha}{1+sen\alpha} \overset{(1)}{=} \frac{1-sen^2\alpha}{1+sen\alpha} \overset{(2)}{=} \frac{(1+sen\alpha)\cdot(1-sen\alpha)}{1+sen\alpha} \overset{(3)}{=} 1-sen\alpha$$

(1) Sustituyendo $cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$ despejado de la ecuación $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$.
(2) Aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a - b)$, una diferencia de cuadrados es suma por diferencia.
(3) Simplificamos el factor común al numerador y denominador $(1 + sen\alpha)$.

c) $$\frac{\cos^2\alpha(1+tg^2\alpha)}{cotg\alpha} = \frac{\cos^2\alpha\left(1+\dfrac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha\left(\dfrac{\cos^2\alpha+sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}} = \frac{\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)}{\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}} = \frac{1}{\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}} = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$$

d) $sen\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(tg\alpha + cotg\alpha) = sen\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{sen\alpha}\right) = sen\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\left(\dfrac{sen^2\alpha+\cos^2\alpha}{sen\alpha\cdot\cos\alpha}\right) = 1$.

e) $sen^3\alpha + sen\alpha\cdot\cos^2\alpha = sen\alpha(sen^2\alpha+\cos^2\alpha) = sen\alpha$.

f) $\cos^3\alpha + sen^3\alpha + \cos^2\cdot sen\alpha + \cos\alpha\cdot sen^2\alpha \overset{(1)}{=} \cos\alpha(\cos^2\alpha + sen^2\alpha) + sen\alpha(sen^2\alpha+\cos^2\alpha) \overset{(2)}{=} sen\alpha + \cos\alpha$.

(1) Extrayendo factor común al $\cos\alpha$ en el primero y cueto términos y al $sen\alpha$ en el 2º y 3º.

(2) Ya que las expresiones entre paréntesis son la ecuación fundamental de la trigonometría, $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

g) $\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{1+\cos\alpha} \overset{(1)}{=} \dfrac{1-\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha} \overset{(2)}{=} \dfrac{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha} \overset{(3)}{=} 1-\cos\alpha$

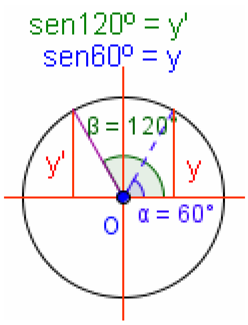
(1) Sustituyendo $\text{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ despejado de la ecuación $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.
(2) Aplicamos el producto notable $a^2 - b^2 = (a+b)\cdot(a-b)$, una diferencia de cuadrados es suma por diferencia.
(3) Simplificamos el factor común al numerador y denominador $(1 + \cos\alpha)$.

h) $\dfrac{\sec\alpha}{1+\text{tg}^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos^2\alpha+\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha} = \cos\alpha$.

i) $\text{tg}^2\,\alpha - \text{tg}^2\,\alpha\cdot\text{sen}^2\alpha = \text{tg}^2\,\alpha(1 - \text{sen}^2\alpha) = \dfrac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \text{sen}^2\alpha$.

j) $\text{sen}^4\alpha - \cos^4\alpha = (\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha)\cdot(\text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha) = \text{sen}^2\alpha - \cos^2\alpha = -\cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha$.

⓵⓶ Determina, sin hacer uso de la calculadora, las siguiente razones trigonométricas:



a) sen 120° = sen(180º - 60º) = sen60º = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) sen 1 215° = sen(3·360º+135) = sen(135º) = sen(180º - 45º) = sen45º = $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) cos 210° = cos(180º + 30º) = -cos30º = - $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

d) tg (-60°) = tg(360º - 60º) = - tg60º = $-\dfrac{\text{sen}60º}{\cos 60º} = -\dfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = -\sqrt{3}$.

e) tg 300° = tg (360º - 60º) = -tg60º= $-\sqrt{3}$

f) $\sec\dfrac{23\pi}{6} = \sec\dfrac{23\cdot 180º}{6} = \sec 690º = \sec(360º+330º) = \sec 330º = \sec(360º-30º) = \sec 30º = \dfrac{1}{\cos 30º} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

g) cotg 225° = cotg (180º + 45º) = cotg 45º = $\dfrac{\cos 45º}{\text{sen}45º} = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1$.

h) $\text{cosec}\,\dfrac{29\pi}{4} = \text{cosec}\dfrac{29\cdot 180º}{4} = \text{cosec}1305º = \text{cosec}(3\cdot 360º+225º) = \text{cosec}225º = \text{cosec}(180º+45º) = -\text{sen}45 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

⓵⓷ Sabiendo que sen α = 0,6 y que a es un ángulo del primer cuadrante, calcula:

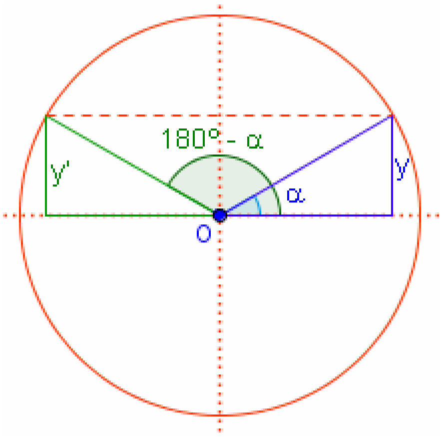
a) sen (180° - α) **c)** cos (180° + α) **e)** cos (90° - α)
b) tg (90° + α) **d)** sen (270° + α) **f)** cotg (360° - α)

Hallamos primero el coseno y la tangente de α:

Despejamos el coseno de la ecuación fundamental de la trigonometría $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$ y luego hallamos la tangente:

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-(0{,}6)^2} = \sqrt{1-0{,}36} = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8 \Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}6}{0{,}8} = \frac{3}{4}$$

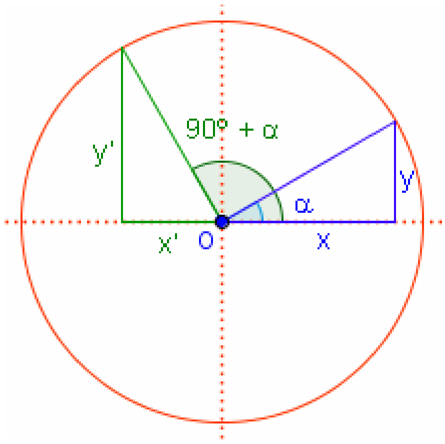
a) sen(180º - α)



Como vemos en el dibujo adjunto senα = y, sen(180º - α) = y', además como los triángulos azul y verde son iguales y = y' luego:

sen(180º - α) = y' = y = senα = 0,6.

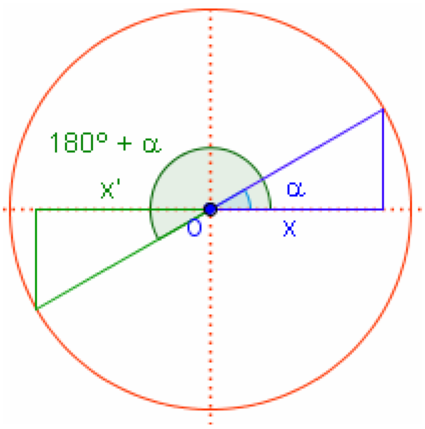
b) tg(90º + α)



$$\text{tg}(90º+\alpha) = \frac{\text{sen}(90º+\alpha)}{\cos(90º+\alpha)} = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{-y} = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen}\alpha} = -\text{cotg}\alpha = -\frac{4}{3}$$

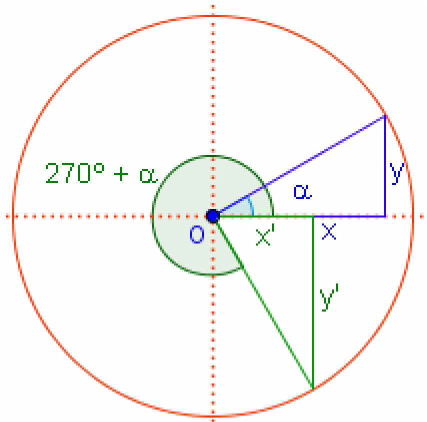
ya que ahora x = y' (x hacia la derecha e y hacia arriba) pero x' = - y pues x' es negativo.

c) cos(180º + α)



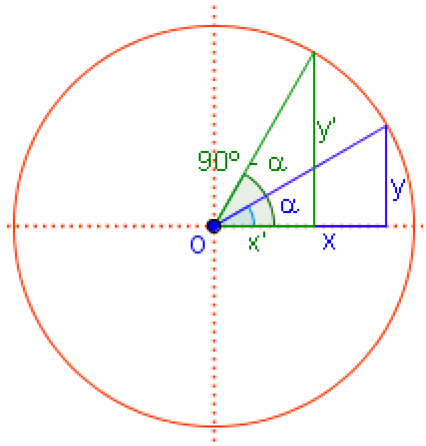
cos(180º + α) = x' = - x = -cos α = - 0,8, como puede verse en el dibujo de la izquierda, el cos(180º + α) es la longitud de x' que es opuesto a x ya que los triángulos azul y verde son iguales (son rectángulos y los ángulos opuestos por el vértice son iguales α, y la hipotenusa el el radio de la circunferencia goniométrica (R = 1) y x es el valor del cosα.

d) sen(270º + α)

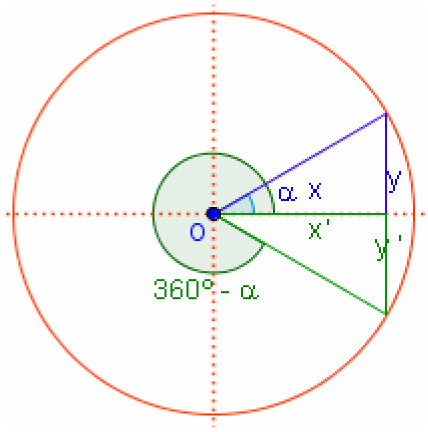


sen(270º + α) = y' = - x = - cosα, ya que el seno siempre se representa en vertical (y') y, como puede verse en el dibujo de la derecha el cateto grande en triángulo azul es x y en el verde es y', de la misma longitud pero de signo opuesto.

e) cos(90º - α)



$\cos(90º - \alpha) = x' = y = \text{sen}\alpha.$



f) cotg(360º - α)

$$\text{cotg}(360º - \alpha) = \frac{\cos(360º-\alpha)}{\text{sen}(360º-\alpha)} = \frac{x'}{y'} = \frac{x}{-y} = \frac{\cos\alpha}{-\text{sen}\alpha} = -\cot g\alpha$$

①④ Demuestra, de forma razonada, si son o no ciertas las siguientes igualdades:

Para demostrar la veracidad o falsedad de estas igualdades podemos partir de uno de los miembros y realizar transformaciones matemáticas hasta obtener el otro miembro de la igualdad o operar con los dos miembros hasta obtener expresiones que sean inequívocamente iguales o distintas.

a) $\dfrac{tga+tgb}{\cot ga+\cot gb} \overset{(1)}{=} \dfrac{tga+tgb}{\frac{1}{tga}+\frac{1}{tgb}} \overset{(2)}{=} \dfrac{tga+tgb}{\frac{tgb+tga}{tga\cdot tgb}} \overset{(3)}{=} \dfrac{1}{\frac{1}{tga\cdot tgb}} = tga\cdot tgb$, luego es cierta.

(1) Sustituimos las cotangentes como inversas de las tangentes respectivas.
(2) Sumamos las fracciones del denominador.
(3) Simplificamos el factor (tga + tgb) en el cociente.

b) $\text{sen}^4 x - \cos^4 x \overset{(1)}{=} (\text{sen}^2x + \cos^2x)\cdot(\text{sen}^2x - \cos^2x) \overset{(2)}{=} \text{sen}^2x - \cos^2x$, luego es verdadera.

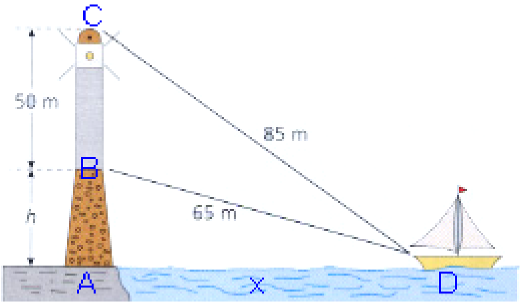
(1) Ya que una diferencia de cuadrados es suma por diferencia $(a^4 - b^4) = (a^2 + b^2)\cdot(a^2 - b^2)$.
(2) La ecuación fundamental $\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$.

c) $\dfrac{1-\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1+\text{sen}\alpha} \overset{(1)}{\Rightarrow} (1-\text{sen}\alpha)\cdot(1+\text{sen}\alpha) = co^2\alpha \overset{(2)}{\Rightarrow} 1-\text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$, igualdad evidente.
(1) Multiplicando en cruz, quitando denominadores.
(2) De nuevo el producto notable suma por diferencia que es diferencia de cuadrados.

d) $tg^2 x - tg^2x\cdot\text{sen}^2x \overset{(1)}{=} tg^2 x(1 - \text{sen}^2x) \overset{(2)}{=} tg^2x\cdot\cos^2 x \overset{(3)}{=} \dfrac{\text{sen}^2x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x \overset{(4)}{=} \text{sen}^2x$, es cierta.

(1) Extraemos factor común a tg^2x.
(2) Sustituimos $1 - \text{sen}^2 x = \cos^2x$, de acuerdo con la ecuación fundamental.
(3) Sustituimos la tangente por su cociente entre el seno y el coseno.
(4) Simplificamos $\cos^2x$ del numerador y denominador.

①⑤ En la figura aparece dibujado un faro de 50 m de altura situado sobre un promontorio. Las respectivas distancias desde los extremos superior e inferior del faro a un barco son de 85 y 65 m. Halla la altura del promontorio.



Aplicamos el teorema de Pitágoras a los dos triángulos rectángulos BAD y CAD:

$$\begin{cases} \overset{\Delta}{BAD} \Rightarrow \overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 65^2 = h^2 + x^2 \\ \overset{\Delta}{CAD} \Rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 85^2 = (50+h)^2 + x^2 \end{cases}$$

Si, ahora resolvemos el sistema anterior, por cualquier método obtenemos las incógnitas x y h. Vamos a resolverlo por reducción cambiando de signo la primera y sumando:

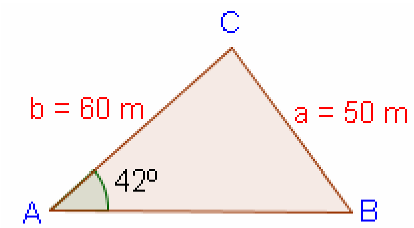
$$\begin{cases} -4225 = -h^2 - x^2 \\ 7225 = (50+h)^2 + x^2 \\ \hline 3000 = (50+h)^2 - h^2 \end{cases}$$

con lo que tenemos una ecuación en h que resolvemos: 3 000 = 2 500 + 100h + h^2 – h^2 ⇔ 3 000 – 2 500 = 100h ⇔ 500 = 100h ⇔ h = 500/100 = 5 m, mide el promontorio.

①⑥ Resuelve cada uno de los siguientes triángulos:

No son triángulos rectángulos luego ahora hemos de utilizar los **teoremas del seno y del coseno**.

a)



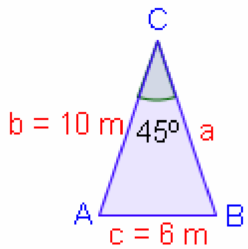
Primero utilizamos el **teorema del seno** para hallar el ángulo $\hat{B}$:

$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{a}\cdot\operatorname{sen}\hat{A} = \frac{60\text{m}}{50\text{m}}\cdot\operatorname{sen}42^\circ = 0{,}803$, luego $\hat{B}$ = arc sen 0,803 = 53º 24' 48". Ahora podemos hallar el ángulo que queda por diferencia hasta los 180º que suman los tres ángulos de cualquier triángulo, $\hat{C}$ = (180º - $\hat{A}$ – $\hat{B}$) = 180º - (42º + 53º 24' 48") = 84º 35' 12".

Para hallar el lado c utilizamos de nuevo el **teorema del seno**:

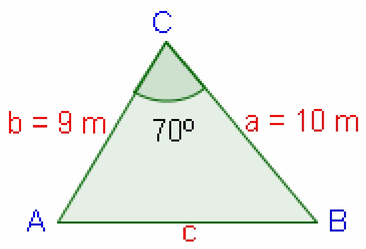
$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Leftrightarrow c = \frac{\operatorname{sen}\hat{C}}{\operatorname{sen}\hat{A}}\cdot a = \frac{\operatorname{sen}(84^\circ 35' 12'')}{\operatorname{sen}42^\circ}\cdot 50\text{m} = 74{,}4\text{ m}.$$

b) Aplicamos el **teorema del seno** para hallar el ángulo $\hat{B}$:



$\frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\hat{B} = \frac{b}{c}\cdot\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{10\text{m}}{6\text{m}}\cdot\operatorname{sen}45^\circ = 1{,}178$, como el seno del ángulo obtenido es mayor que la unidad (lo que no es posible) deducimos que no puede existir un triángulo con los datos que se proponen, es un triángulo de imposible construcción.

c)



Usamos el **teorema del coseno** para hallar el lado c:

$c^2 = a^2+b^2 - 2ab\cdot\cos\widehat{C} \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\widehat{C}} = \sqrt{10^2+9^2-2\cdot 10\cdot 9\cdot\cos 70^{\circ}}$

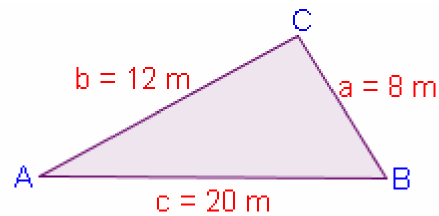
$= \sqrt{119{,}44} = 10{,}93$ m.

Y, ahora, el del **seno** para hallar el ángulo $\widehat{B}$:

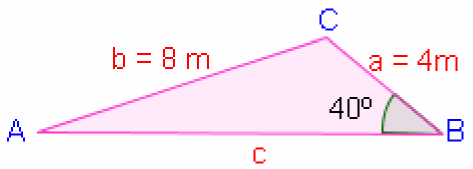
$\frac{c}{\mathrm{sen}\widehat{C}} = \frac{b}{\mathrm{sen}\widehat{B}} \Leftrightarrow \mathrm{sen}\widehat{B} = \frac{b}{c}\cdot\mathrm{sen}\widehat{C} = \frac{9\mathrm{m}}{10{,}93\mathrm{m}}\cdot\mathrm{sen}70^{\circ} = 0{,}7738$, luego $\widehat{B}$ = arc sen 0,7738 = 50º 41' 35".

Por último hallamos el ángulo A por diferencia hasta 180º: $\widehat{A}$ = 180º - ($\widehat{C}$ + $\widehat{B}$) = 180º - (70º + 50º 41' 35") = 59º 18' 25".

d) No hace falta hacer ninguna operación para darse cuenta que es otro triángulo imposible ya que el lado mayor (c = 20 m) no mide más que la suma de los otros dos sino igual (12 + 8 = 20), el dibujo sería un segmento, de 20 m, encima de otro de igual longitud y no como se dibuja.



e)



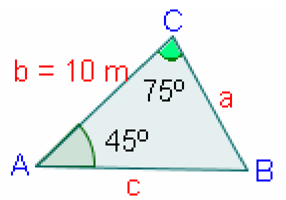
Teorema del seno:

$\frac{b}{\mathrm{sen}\widehat{B}} = \frac{a}{\mathrm{sen}\widehat{A}} \Leftrightarrow \mathrm{sen}\widehat{A} = \frac{a}{b}\cdot\mathrm{sen}\widehat{B} = \frac{4\mathrm{m}}{8\mathrm{m}}\cdot\mathrm{sen}40^{\circ} = 0{,}3124$, luego el ángulo $\widehat{A}$ = arc sen0,3124 = 18º 44' 50" y $\widehat{C}$ = 180º -($\widehat{A}$ +$\widehat{B}$) = 180º - (18º 44' 50" + 40º) = 121º 15' 10".

Para hallar la longitud del lado utilizamos de nuevo el teorema del seno:

$$\frac{b}{\mathrm{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\mathrm{sen}\widehat{C}} \Leftrightarrow c = \frac{\mathrm{sen}\widehat{C}}{\mathrm{sen}\widehat{B}}\cdot b = \frac{\mathrm{sen}(121^{\circ}15'10'')}{\mathrm{sen}40^{\circ}}\cdot 8\mathrm{m} = 10{,}64 \text{ m}.$$

f) $\widehat{B}$ = 180º - ($\widehat{A}$ + $\widehat{C}$) = 180º - (45º +75º) = 60º

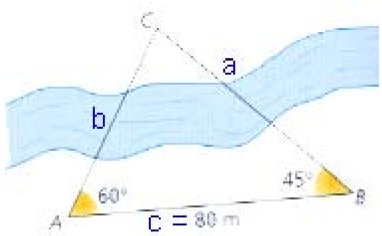


Ahora usando el teorema del seno hallamos la longitud los dos lados a y c que nos quedan:

$$\begin{cases} \frac{c}{\mathrm{sen}\widehat{C}} = \frac{b}{\mathrm{sen}\widehat{B}} \Leftrightarrow c = \frac{\mathrm{sen}\widehat{C}}{\mathrm{sen}\widehat{B}}\cdot b = \frac{\mathrm{sen}75^{\circ}}{\mathrm{sen}60^{\circ}}\cdot 10\mathrm{m} = 10{,}15 \text{ m.} \\ \frac{a}{\mathrm{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\mathrm{sen}\widehat{B}} \Leftrightarrow a = \frac{\mathrm{sen}\widehat{A}}{\mathrm{sen}\widehat{B}}\cdot b = \frac{\mathrm{sen}45^{\circ}}{\mathrm{sen}60^{\circ}}\cdot 10\mathrm{m} = 8{,}16 \text{ m.} \end{cases}$$

❂❂❂✲✲❀✲✲❂❂❂

①⑦ Desde dos puntos A y B situados en la misma orilla de un río y distantes entre sí 80 m, se observa un punto C, situado en la orilla opuesta, bajo ángulos de 60° y 45°, respectivamente. Calcula las distancias desde los puntos A y B hasta el punto C.



❂❂❂✲✲❀✲✲❂❂❂

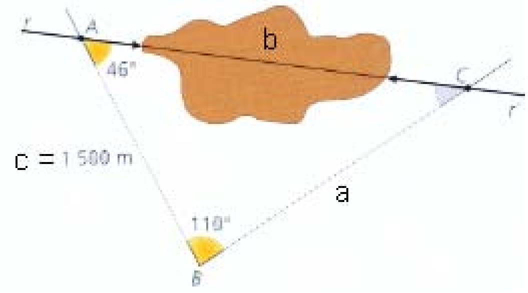
Hallamos primero el ángulo $\widehat{C}$ por diferencia hasta 180º:

$\widehat{C}$ = 180º - ($\widehat{A}$ + $\widehat{B}$) = 180º - (60º + 45º) = 180º - 105º = 75º

Y ahora usamos el teorema del seno para hallar la longitud de los lados a y b que nos quedan:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow b = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}} \cdot c = \dfrac{\operatorname{sen}45^\circ}{\operatorname{sen}75^\circ} \cdot 80\text{m} = 58{,}56\text{ m.} \\ \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Leftrightarrow a = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}} \cdot c = \dfrac{\operatorname{sen}60^\circ}{\operatorname{sen}75^\circ} \cdot 80\text{m} = 71{,}73\text{ m.} \end{cases}$$

18 La figura muestra la forma de construir un túnel que atraviesa una montaña perforando simultáneamente por ambas caras de la montaña. Fijamos la dirección de perforación ofrecida por r, por lo que el problema consiste en encontrar la dirección de perforación dada por r'. En la práctica, se procede de la forma siguiente: fijamos un punto A en la recta r . Elegimos un ángulo A, por ejemplo 46°, y medimos una distancia AB de 1 500 m, por ejemplo. En B tomamos un ángulo, por ejemplo, de 110°. Con estos datos podemos determinar el ángulo C y la distancia BC. A partir de ambos datos queda determinada la dirección r' de perforación. Calcula estos datos.



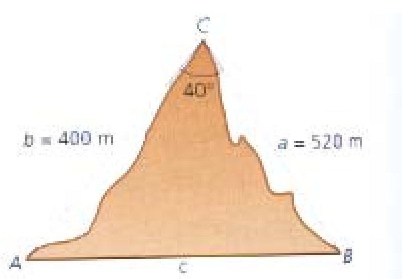
Hallamos primero el ángulo $\hat{C}$ por diferencia hasta 180º:

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (46^\circ + 110^\circ) = 24^\circ$$

Y ahora usamos el **teorema del seno** para hallar la longitud de los lados a y b que nos quedan:

$$\begin{cases} \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} \Leftrightarrow b = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{B}}{\operatorname{sen}\hat{C}} \cdot c = \dfrac{\operatorname{sen}110^\circ}{\operatorname{sen}24^\circ} \cdot 1500\text{m} = 3465{,}5\text{ m.} \\ \dfrac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \Leftrightarrow a = \dfrac{\operatorname{sen}\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{C}} \cdot c = \dfrac{\operatorname{sen}46^\circ}{\operatorname{sen}24^\circ} \cdot 1500\text{m} = 2652{,}9\text{ m.} \end{cases}$$

19 La figura muestra el corte transversal de una montaña en la que se quiere construir un túnel. La cima o punto C, visible desde A y B, se encuentra a 400 m de A y 520 m de 8, y el ángulo C mide 40°. Calcula la longitud del túnel AB.

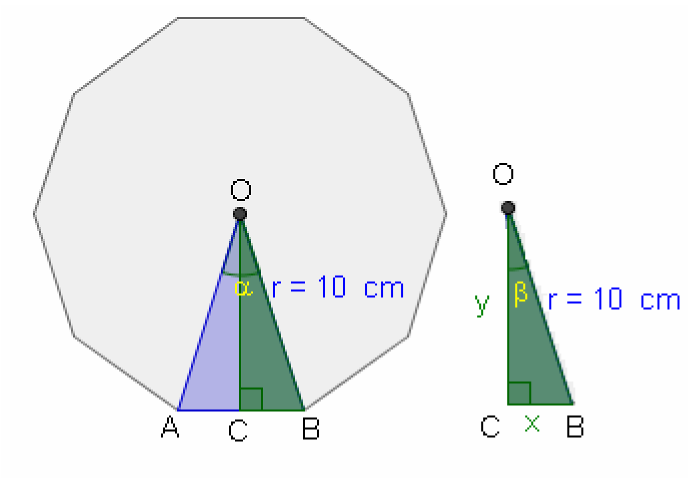


Ahora hemos de utilizar el teorema del coseno pues conocemos dos lados y el ángulo comprendido:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C} \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\hat{C}} = \sqrt{520^2 + 400^2 - 2 \cdot 520 \cdot 400 \cdot \cos 40^\circ} = 334{,}3$ m es la altura de la montaña.

②⓪ Halla el área de un decágono regular circunscrito a una circunferencia de 10 cm de radio.

✿✿✿✱✿✱✿✱✿✿✿



Llamamos a la apotema OC = y y a litad del lado CB = x. Como es un decágono regular cada uno de los diez triángulo tendrá un ángulo central α = 360º/10 = 36º y por tanto $\beta = \alpha/2$ = 18º.

En el triángulo OCB hallamos x e y:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\beta = \dfrac{x}{r} \Leftrightarrow x = r\cdot\operatorname{sen}\beta = 10\text{cm}\cdot\operatorname{sen}18^\circ = 3{,}09\text{ cm} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{r} \Leftrightarrow y = r\cdot\cos\beta = 10\text{cm}\cdot\cos 18^\circ = 9{,}51\text{ cm} \end{cases}$$

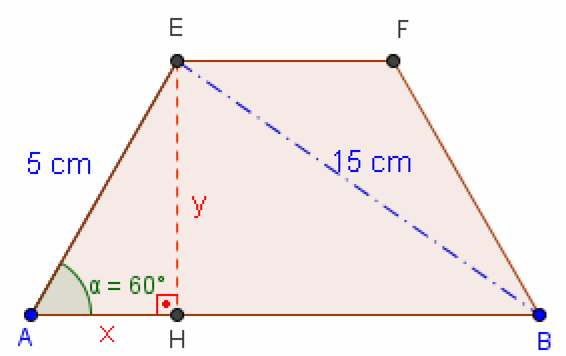
El perímetro = p = 10L = 10·AB = 20·CB = 20x = 20 ·3,09cm = 61,8 cm

Luego el área del polígono es:

$$A = \frac{p\cdot ap}{2} = \frac{p\cdot y}{2} = \frac{61{,}8\text{cm}\cdot 9{,}51\text{cm}}{2} = 293{,}86\text{ cm}^2$$

✿✿✿✱✿✱✿✱✿✿✿

②① En un trapecio isósceles conocemos la diagonal, que mide 15 cm; el lado oblicuo, que mide 5 cm; y el ángulo que este forma con la base mayor, que es de 60°.
Halla el área del trapecio.



✿✿✿✱✿✱✿✱✿✿✿

Como el área de un trapecio es la semisuma de las bases por la altura necesitamos hallar las longitudes de las bases, la mayor B = AB y la menor b = EF, y la altura y = EH.

En el triángulo rectángulo AHE hallamos x e y:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{y}{\overline{AE}} \Leftrightarrow y = \overline{AE}\cdot\operatorname{sen}\alpha = 5\text{ cm}\cdot\operatorname{sen}60^\circ = 4{,}33\text{ cm} \\ \cos\alpha = \dfrac{x}{\overline{AE}} \Leftrightarrow x = \overline{AE}\cdot\cos\alpha = 5\text{ cm}\cdot\cos 60^\circ = 2{,}5\text{ cm} \end{cases}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo EHB, tenemos:

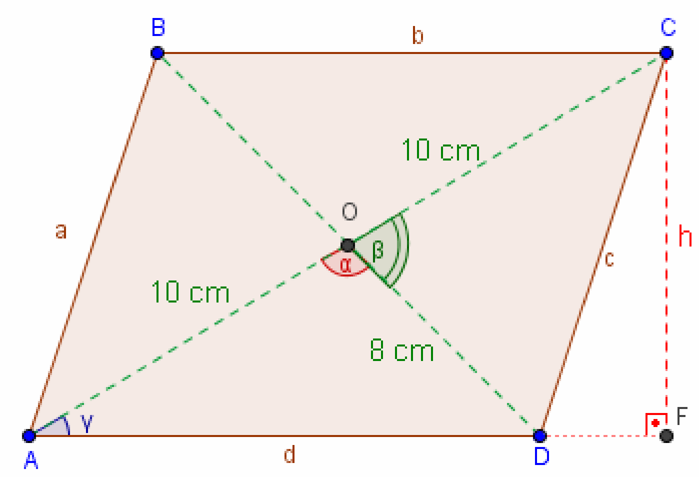
$$\overline{EB}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HB}^2 \Leftrightarrow \overline{HB} = \sqrt{\overline{EB}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{15^2 - 4{,}33^2} = 14{,}36\text{ cm}$$

Base mayor = B = AB = AH + HB = x + HB = 2,5 + 14,36 = 16,86 cm
Base menor = b = EF = AB – 2AH = HB – x = 14,36 – 2,5 = 11,86 cm

Luego el área pedida: $A = \dfrac{B+b}{2}\cdot h = \dfrac{B+b}{2}\cdot y = \dfrac{16{,}86\text{cm} + 11{,}86\text{cm}}{2}\cdot 4{,}33\text{cm} = 62{,}18\text{ cm}^2$

✿✿✿✱✿✱✿✱✿✿✿

②② Las diagonales de un paralelogramo miden 20 y 16 cm, respectivamente, y uno de los ángulos que forman al cortarse mide 120°. Halla el área y el perímetro del mismo.



✿✿✿✽✽❀✽✽✿✿✿

AO = OC = AC/2 = 20 cm/2 = 10 cm
DO = OB = BD/2 = 16 cm/2 = 8 cm.

Si α = 120º ⇒ β = 180º - α = 180º - 120º = 60º.

Hallemos primero las longitudes de los lados, para después calcular su perímetro.
En el triángulo AOD podemos hallar la longitud del lado AD = d aplicando el **teorema del coseno**:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{DO}^2 - 2\cdot\overline{AO}\cdot\overline{DO}\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow d = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2\cdot 10\cdot 8\cdot\cos 120^{o}} = 15{,}62 \text{ cm}$$

De manera análoga podemos hallar la longitud del lado DC = c en el triángulo DOC:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{DO}^2 - 2\cdot\overline{CO}\cdot\overline{DO}\cdot\cos\beta \Leftrightarrow c = \sqrt{10^2 + 8^2 - 2\cdot 10\cdot 8\cdot\cos 60^{o}} = 9{,}17 \text{ cm}$$

Luego el **perímetro** p = 2d + 2c = 2·15,62 cm + 2·9,17 cm = **49,58 cm**.

Para hallar el área necesitamos hallar primero la longitud de la altura h = CF, para lo cual en el triángulo rectángulo ACF, como conocemos la hipotenusa AC = 20 cm, para hallar la longitud h sólo hemos de saber el seno del ángulo γ, que calculamos mediante el **teorema del seno** aplicado al triángulo AOD:

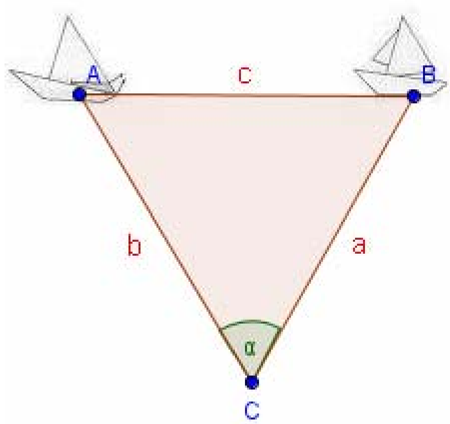
$$\frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{OD}}{\operatorname{sen}\gamma} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\gamma = \frac{\overline{OD}}{\overline{AD}}\cdot\operatorname{sen}\alpha = \frac{8\text{cm}}{15{,}62\text{cm}}\cdot\operatorname{sen}120^{o} = 0{,}4435469$$

Ahora en el triángulo ACF: $\operatorname{sen}\gamma = \frac{h}{AC} \Leftrightarrow h = AC\cdot\operatorname{sen}\gamma = 20\text{cm}\cdot 0{,}4435469 \cong 8{,}87$ cm.

Por último, **área** = A = d·h = 15,62 cm · 8,87 cm = **138,55 cm²**.

✿✿✿✽✽❀✽✽✿✿✿

②③ Dos barcos salen de un puerto, y desde un mismo punto, según dos rectas que forman entre sí un ángulo de 60°. Calcula la distancia que los separará al cabo de dos horas de navegación suponiendo que mantienen velocidades constantes de 50 y 65 km/h, respectivamente.



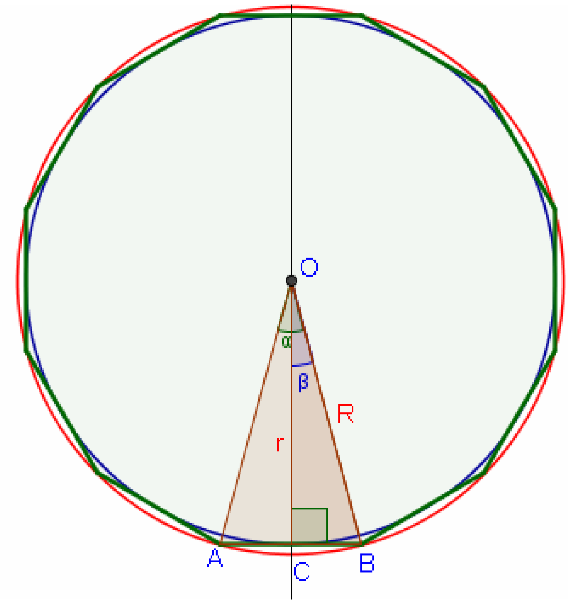
✿✿✿✽✽❀✽✽✿✿✿

Sabemos que α = 60º, que al cabo de 2 hr el barco A estará a b = 50 km/hr·2hr = 100 km del puerto y el barco B estará a una distancia a = 65 km/hr · 2hr = 130 km del puerto.

El problema se reduce, pues a hallar la distancia c a que se encuentran separados los barcos A y B al cabo de dos horas, lo que hacemos aplicando el teorema del coseno al triángulo ABC:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2a{\cdot}b{\cdot}\cos\alpha \Leftrightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a{\cdot}b{\cdot}\cos\alpha} = \sqrt{130^2 + 100^2 - 2{\cdot}130{\cdot}100{\cdot}\cos 60^{\circ}} \cong 117{,}9\text{ km}$ separan a los dos barcos al cabo de 2 horas.

②④ Calcula los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un dodecágono de 6 dm de lado.



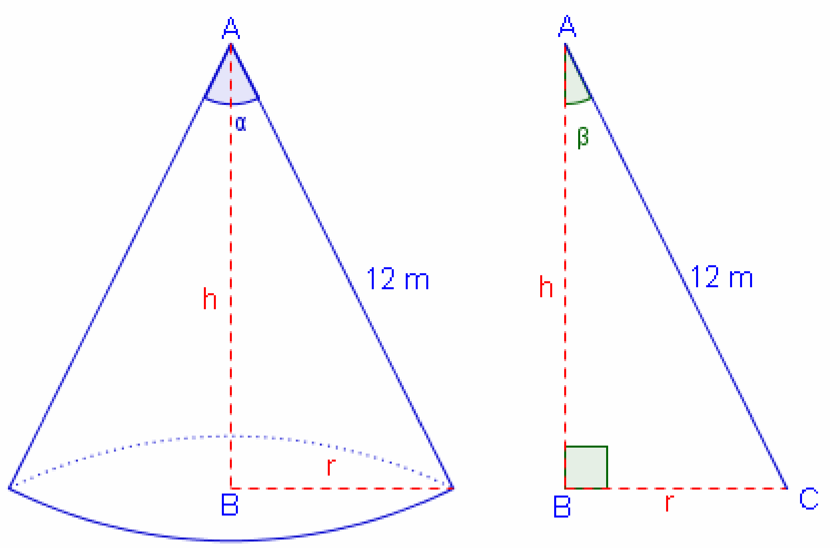
Los segmentos OA = OB = R son el radio de la circunferencia circunscrita (dibujada en color rojo) y OC = r el radio de la circunferencia inscrita (en color azul). El segmento AB (lado del dodecágono) mide 6 dm y, por tanto, AC = CB = 3 dm.

El ángulo AÔB = α = $\frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}$, luego el ángulo $\beta = \frac{\alpha}{2} = 15^{\circ}$.

Para calcular las longitudes de los radios pedidos nos fijamos en el triángulo rectángulo OCB:

$$\begin{cases} \text{sen}\beta = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \text{sen}15^{\circ} = \dfrac{3\text{dm}}{R} \Leftrightarrow R = \dfrac{3\text{ dm}}{\text{sen}15^{\circ}} = 11{,}59\text{ dm} \\ \text{tg}\beta = \dfrac{\overline{CB}}{\overline{OC}} \Leftrightarrow \text{tg}15^{\circ} = \dfrac{3\text{dm}}{r} \Leftrightarrow r = \dfrac{3\text{ dm}}{\text{tg}15^{\circ}} = 11{,}2\text{ dm} \end{cases}$$

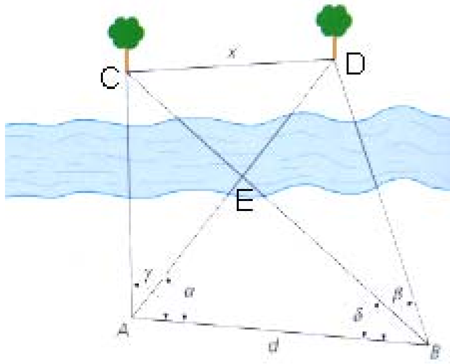
②⑤ El ángulo en el vértice de un cono de revolución mide 60° y la generatriz 12 m. Halla el volumen del cono.



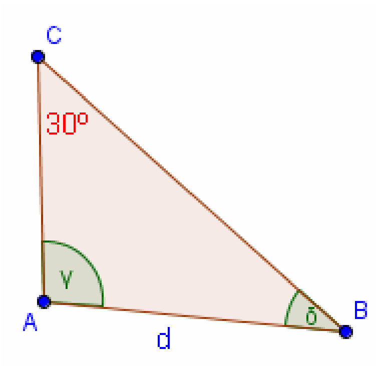
$$\begin{cases} \text{sen}\beta = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \text{sen}30^{\circ} = \dfrac{r}{12\text{m}} \Leftrightarrow r = 12\text{m}{\cdot}\text{se}30^{\circ} = 6\text{ m} \\ \cos\beta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \cos 30^{\circ} = \dfrac{h}{12\text{m}} \Leftrightarrow h = 12\text{m}{\cdot}\cos 30^{\circ} = 10{,}39\text{ m} \end{cases}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2{\cdot}h = \frac{1}{3}\pi{\cdot}(6\text{ m})^2{\cdot}10{,}39\text{ m} = 391{,}69\text{ m}^3.$$

②⑥ En la vida real se presentan muchas situaciones en las que se necesita conocer la distancia entre dos puntos inaccesibles. Este problema fue resuelto ya en el año 1615 por el sabio holandés Snelius. En la figura tenemos dos árboles a los que no podemos acceder, porque nos lo impide el río. Desde dos puntos A y 8 medimos los ángulos α, β, γ y δ, y la distancia d entre ambos puntos. Calcula la distancia x sabiendo que $\alpha = 50°$, $\beta = 75°$, $\gamma = 110°$, $\delta = 40°$ y d = 120 m.



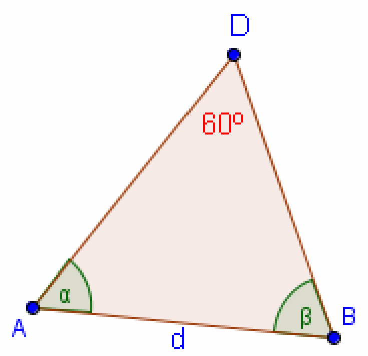
Para calcular x = CD vamos a usar el triángulo ACD, en donde necesitamos conocer las longitudes de los lados **AC** y **AD** y el ángulo $\theta = \gamma - \alpha = 110º - 50º = 60º$.



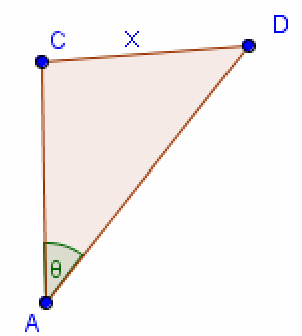
Para calcularla longitud del lado **AC** partimos del triángulo **ACB**, primero calculamos el ángulo $\hat{C} = 180º - (\gamma + \delta) = 180º - (110º + 40º) = 30º$ aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen}\delta} = \frac{\overline{AB}}{\text{sen}\hat{C}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\text{sen}40º} = \frac{d}{\text{sen}30º} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{\text{sen}40º}{\text{sen}30º}\cdot d = \frac{\text{sen}40º}{\text{sen}30º}\cdot 120 \text{ m} = \ 154{,}27 \text{ m.}$$

Ahora en el triángulo **ADB** calculamos la longitud del lado **AD**, sabiendo que $\hat{D} = 180º - (\alpha+\beta) = 180º - (\ 50º + 70º) = 60º$ y aplicando el teorema del seno:



$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen}\hat{D}} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen}\beta} \Leftrightarrow \frac{d}{\text{sen}60º} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen}70º} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{\text{sen}70º}{\text{sen}60º}\cdot d = \frac{\text{sen}70º}{\text{sen}60º}\cdot 120 \text{ m} = 130{,}21 \text{ m.}$$



Por último aplicando el teorema del coseno al triángulo **ACD**, calculamos x = **CD**:

$$x = \overline{CD} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AD}^2 - 2\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\cos\theta} = \sqrt{154{,}27^2 + 130{,}21^2 - 2\cdot 154{,}27\cdot 130{,}21\cdot\cos 60º} =$$

146,91 m.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

① Sabiendo que sen a = - 1 2/13 y tg b = 24/7 , y que 270° < a < 360° y 180° < b < 270°, calcula:

a) sen (a+ b) **b)** cos (a + b) **c)** tg (a + b).

Hallamos el resto de razones trigonométricas de los ángulos que se nos dan:

Partiendo de sen a = -12/13, a en el cuarto cuadrante:

$$\begin{cases} \cos a = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{1-\dfrac{144}{169}} = \sqrt{\dfrac{25}{169}} = \dfrac{5}{13} \\ \operatorname{tg} a = \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \dfrac{-12/13}{5/13} = -\dfrac{12}{5} \end{cases}$$

Partiendo de la tg b = 24/7 y b en el tercer cuadrante:

$$1+\operatorname{tg}^2 b=\sec^2 b \Leftrightarrow \sec b = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 b} = -\sqrt{1+\left(\dfrac{24}{7}\right)^2} = -\sqrt{1+\dfrac{576}{49}} = -\sqrt{\dfrac{625}{49}} = -\dfrac{25}{7} \Rightarrow \cos b = \dfrac{1}{\sec b} = \dfrac{1}{-25/7} = -\dfrac{7}{25}$$

Como tg b = senb/cosb ⇒ senb = cosb·tgb = $-\dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{24}{7} = -\dfrac{24}{25}$.

Ahora podemos hallar los valores de las razones de ángulos de adicción que se nos piden.

a) sen(a + b) = sena·cosb + senb·cosa = $-\dfrac{12}{13}\cdot(-\dfrac{7}{25})+(-\dfrac{24}{25})\cdot\dfrac{5}{13} = \dfrac{84}{325}-\dfrac{120}{325} = -\dfrac{36}{325}$.

b) cos(a + b) = cosa·cosb – sena·senb = $\dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{7}{25}\right)-\left(-\dfrac{12}{13}\right)\cdot\left(-\dfrac{24}{25}\right) = -\dfrac{35}{325}-\dfrac{288}{325} = -\dfrac{323}{325}$.

c) tg(a +b) =
$$\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \dfrac{-36/325}{-323/325} = \dfrac{36}{323} \\ = \dfrac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\cdot\operatorname{tg}b} = \dfrac{-\dfrac{12}{5}+\dfrac{24}{7}}{1-\left(\dfrac{-12}{5}\right)\cdot\dfrac{24}{7}} = \dfrac{36/35}{323/35} = \dfrac{36}{323} \end{cases}$$
usando las dos posibilidades.

② Partiendo de las razones trigonométricas de 30°, 45° y 60°, calcula:

a) sen 90° **b)** cos 90° **c)** sen 120° **d)** cos 120° **e)** tg 120° **f)** sen 105° **g)** cos 105° **h)** tg 105°

a) sen90º = $\begin{cases} \text{sen}(30º+60º) = \text{sen}30º\cdot\cos 60º+\cos 30º\cdot\text{sen}60º = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \text{sen}(2\cdot45º) = 2\text{sen}45º\cdot\cos 45º = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cdot\frac{2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$

b) cos90º = $\begin{cases} \cos(30º+60º) = \cos 30º\cdot\cos 60º-\text{sen}30º\cdot\text{sen}60º = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \\ \cos(2\cdot45º) = \cos^2 45º-\text{sen}^2 45º = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0 \end{cases}$.

c) sen120º = sen(2·60º) = 2sen60º·cos69º = $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) cos120º = cos(2·60º) = cos^{2}60º - sen^{2}60º = $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}-\frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$.

e) tg120º = $\frac{\text{sen}120º}{\cos 120º} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}$.

f) sen105º = sen(60º + 45º) = sen60º·cos45º+cos60º·sen45º = $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

g) cos105º = cos(60º + 45º) = cos60º·cos45º - sen60º·cos45º = $\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

h) tg105º = $\frac{\text{sen}105º}{\cos 105º} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})/4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2}-\sqrt{6})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{(\sqrt{6})^2+2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2} = \frac{8+2\sqrt{12}}{-4} =$

$= -\frac{8+2\cdot2\sqrt{3}}{4} = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

③ Sabiendo que el seno de un ángulo es sen a = 3/5 y π/2 < a < π, halla las razones trigonométricas de a - 30º.

Calculamos primero la razones trigonométricas del ángulo a que faltan:

$$\begin{cases} \cos a = -\sqrt{1-\text{sen}^2 a} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \\ \text{tga} = \frac{\text{sena}}{\cos a} = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

sen(a – 30º) = sena·cos30º - cosa·sen30º = $\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{10}+\frac{4}{10} = \frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

cos(a – 30º) = cosa·cos30º + sena·sen30º = $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{4\sqrt{3}}{10}+\frac{3}{10} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$.

$$\text{tg(a -30º)}=\begin{cases} \dfrac{\text{sen}(a-30^\circ)}{\cos(a-30)}=\dfrac{(4+3\sqrt{3})/10}{(3-4\sqrt{3})/10}=\dfrac{4+3\sqrt{3}}{3-4\sqrt{3}}=\dfrac{(4+3\sqrt{3})\cdot(3+4\sqrt{3})}{(3-4\sqrt{3})\cdot(3+4\sqrt{3})}=\dfrac{12+16\sqrt{3}+9\sqrt{3}+36}{9-48}=\dfrac{48+25\sqrt{3}}{-39} \\ =\dfrac{\text{tga}-\text{tg}30^\circ}{1+\text{tga}\cdot\text{tg}30^\circ}=\dfrac{-\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{-(9+4\sqrt{3})/12}{(12-3\sqrt{3})/12}=\dfrac{-(9+4\sqrt{3})}{12-3\sqrt{3}}=-\dfrac{(9+4\sqrt{3})\cdot(12+3\sqrt{3})}{(12-3\sqrt{3})\cdot(12-3\sqrt{3})}=-\dfrac{144+75\sqrt{3}}{117}=\dfrac{48+25\sqrt{3}}{-39}. \end{cases}$$

④ Justifica las siguientes igualdades:

a) sen (180° + a) = -sen a

b) tg (π/ 2 + a) = -cotg a

c) sen (270° + a) = -cos a

d) tg (π + 2a) = tg 2a

e) cos (90° + a) = -sen a

f) tg (270° + a) = -cotg a

a) sen(180º + a) = sen180º·cosa + cos180º·sena = 0·cosa + (-1)·sena = -sena.

b) $$\text{tg}\left(\frac{\pi}{2}+a\right)=\frac{\text{tg}\frac{\pi}{2}+\text{tga}}{1-\text{tg}\frac{\pi}{2}\cdot\text{tga}}=\frac{\dfrac{\text{tg}\frac{\pi}{2}+\text{tga}}{\text{tg}\frac{\pi}{2}}}{\dfrac{1-\text{tg}\frac{\pi}{2}\cdot\text{tga}}{\text{tg}\frac{\pi}{2}}}=\frac{1+\dfrac{\text{tga}}{\text{tg}\frac{\pi}{2}}}{\dfrac{1}{\text{tg}\frac{\pi}{2}}-\text{tga}}=\frac{1+\dfrac{\text{tga}}{\infty}}{\dfrac{1}{\infty}-\text{tga}}=\frac{1}{-\text{tga}}=-\cot\text{ga}\text{, ya que }\frac{K}{\infty}=0.$$

c) sen(270º + a) = sen270º·cosa + cos270º·sena = (-1)·cosa + 0·sena = -cosa.

d) $$\text{tg}(\pi+2a)=\frac{\text{tg}\pi+\text{tg}2a}{1-\text{tg}\pi\cdot\text{tg}2a}=\frac{0+\text{tg}2a}{1-0\cdot\text{tg}2a}=\frac{\text{tg}2a}{1}=\text{tg}2a.$$

e) cos(90º + a) = cos90º·cosa – sen90º·sena = 0·cosa – 1·sena = - sena.

f) $$\text{tg}(270^\circ+a)=\frac{\text{tg}270^\circ+\text{tga}}{1-\text{tg}270^\circ\cdot\text{tga}}=\frac{\dfrac{\text{tg}270^\circ+\text{tga}}{\text{tg}270^\circ}}{\dfrac{1-\text{tg}270^\circ\cdot\text{tga}}{\text{tg}270^\circ}}=\frac{1+\dfrac{\text{tga}}{\text{tg}270^\circ}}{\dfrac{1}{\text{tg}270^\circ}-\text{tga}}=\frac{1+\dfrac{\text{tga}}{-\infty}}{\dfrac{1}{-\infty}-\text{tga}}=\frac{1}{-\text{tga}}=-\cot\text{ga}.$$

⑤ Calcula el valor de la siguiente expresión: sena ·sen (b - c) - sen b · sen (a - c) + sen c · sen (a-b)

sena sen (b - c) - sen b - sen (a - c) + sen c . sen (a-b) = sena·(senb·cosc –cosb·senc) – senb(sena·cosc – cosa·senc) + senc(sena·cosb –cosa·senb) = sena·senb·cosc $^{(1)}$ – sena·cosb·senc$^{(2)}$ – sena·senb·cosc$^{(1)}$ + senb·cosa·senc $^{(3)}$ + senc·sena·cosb $^{(2)}$ – senc·cosa·senb $^{(3)}$ = 0 ya que las expresiones con subíndices iguales son opuestas.

⑥ Demuestra que $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \text{sen}^2 a$.

$\cos(a + b)\cos(a - b) = (\cos a\cdot\cos b - \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b)(\cos a\cdot\cos b + \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b) = (\cos a\cdot\cos b)^2 - (\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b)^2$ $= \cos^2 a\cdot\cos^2 b - \text{sen}^2 a\cdot\text{sen}^2 b \overset{(1)}{=} \cos^2 a(1 - \text{sen}^2 b) - (1 - \cos^2 a)\cdot\text{sen}^2 b = \cos^2 a \cancel{- \cos^2 a\cdot\text{sen}^2 b} - \text{sen}^2 b + \cancel{\cos^2 a\cdot\text{sen}^2 b} = \mathbf{\cos^2 a - \text{sen}^2 b}$.

(1) en donde hemos sustituido $\cos^2 b = 1 - \text{sen}^2 b$ y $\text{sen}^2 a = 1 - \cos^2 a$ para llegar a la primera igualdad.

Si la sustitución la hacemos $\cos^2 a = 1 - \text{sen}^2 a$ y $\text{sen}^2 b = 1 - \cos^2 b$, tenemos:

$\cos(a + b)\cos(a - b) = (\cos a\cdot\cos b - \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b)(\cos a\cdot\cos b + \text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b) = (\cos a\cdot\cos b)^2 - (\text{sen}\,a\cdot\text{sen}\,b)^2$ $= \cos^2 a\cdot\cos^2 b - \text{sen}^2 a\cdot\text{sen}^2 b = (1 - \text{sen}^2 a)\cos^2 b - \text{sen}^2 a(1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \text{sen}^2 a\cdot\cos^2 b - \text{sen}^2 a + \text{sen}^2 a\cdot\cos^2 b = \mathbf{\cos^2 b - \text{sen}^2 a}$

⑦ Demuestra que $\text{sen}(a + b)\,\text{sen}(a - b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

$\text{sen}(a + b)\,\text{sen}(a - b) = (\text{sen}\,a\cdot\cos b + \cos a\cdot\text{sen}\,b)\cdot(\text{sen}\,a\cdot\cos b + \cos a\cdot\text{sen}\,b) = (\text{sen}\,a\cdot\cos b)^2 - (\cos a\cdot\text{sen}\,b)^2 = \text{sen}^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot\text{sen}^2 b$, a partir de aquí, como en el ejercicio anterior, tenemos dos caminos:

(1) $\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot\text{sen}^2 b = \text{sen}^2 a\cdot(1 - \text{sen}^2 b) - (1 - \text{sen}^2 a)\cdot\text{sen}^2 b = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a\cdot\text{sen}^2 b - \text{sen}^2 b + \text{sen}^2 a\cdot\text{sen}^2 b = \mathbf{\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b}$, que demuestra la primera igualdad.

(2) $\text{sen}^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot\text{sen}^2 b = (1 - \cos^2 a)\cdot\cos^2 b - \cos^2 a\cdot(1 - \cos^2 b) = \cos^2 b - \cos^2 a\cdot\cos^2 b - \cos^2 a + \cos^2 a\cdot\cos^2 b = \mathbf{\cos^2 b - \cos^2 a}$ que demuestra la segunda igualdad.

⑧ Halla las expresiones que se piden usando los teoremas de adición:

a) $\cos 3a$ en función de $\cos a$ **b)** $\text{sen}\,4a$ en función de $\text{sen}\,a$

a) $\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a\cdot\cos a - \text{sen}\,2a\cdot\text{sen}\,a = (\cos^2 a - \text{sen}^2 a)\cdot\cos a - (2\text{sen}\,a\cdot\cos a)\cdot\text{sen}\,a = \cos^3 a - \text{sen}^2 a\cdot\cos a - 2\text{sen}^2 a\cdot\cos a = \cos^3 a - 3\text{sen}^2 a\cdot\cos a = \cos^3 a - 3(1 - \text{co}^2 a)\cdot\cos a = \mathbf{4\cos^3 a - 3\cos a}$.

b) $\text{sen}(4a) = \text{sen}(2\cdot 2a) = 2\,\text{sen}\,2a\cdot\cos 2a = 2(2\text{sen}\,a\cdot\cos a)(\cos^2 a - \text{sen}^2 a) = 4\text{sen}\,a\cdot\cos^3 a - 4\text{sen}^3 a\cdot\cos a = 4\text{sen}\,a\cdot\cos a(\cos^2 a - \text{sen}^2 a) = 4\text{sen}\,a\cdot\cos a\,(1 - \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 a) = 4\text{sen}\,a\cdot\cos a(1 - 2\text{sen}^2 a) =$

$= 4\text{sen}\,a\sqrt{1 - \text{sen}^2 a}(1 - 2\text{sen}^2 a)$.

⑨ Sabiendo que tg a = $\sqrt{24}$, y que a es un ángulo cuyo seno y coseno son negativos, calcula las razones trigonométricas del ángulo 2a.

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

Hallamos primero las razones trigonométricas de las razones que faltan:

$$1+tg^2a=sec^2a \Leftrightarrow \sec a = -\sqrt{1+tg^2a} = -\sqrt{1+\sqrt{24}^2} = -5 \Rightarrow \cos a = \frac{1}{\sec a} = -\frac{1}{5}$$

Como tg a = sena/cosa ⇒ sena = cosa·tga = $-\frac{1}{5}\cdot\sqrt{24} = -\frac{\sqrt{24}}{5}$.

Ahora las razones trigonométricas del ángulo doble:

$$\begin{cases} sen2a = 2sena\cdot\cos a = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\sqrt{24}}{25} \\ \cos 2a = \cos^2 a - sen^2 a = \left(-\frac{1}{5}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{24}}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} - \frac{24}{25} = -\frac{23}{25} \\ tg2a = \begin{cases} \frac{sen2a}{\cos 2a} = \frac{2\sqrt{24}/25}{-23/25} = -\frac{2\sqrt{24}}{23} \\ = \frac{2tga}{1-tg^2a} = \frac{2\cdot\sqrt{24}}{1-\left(\sqrt{24}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{24}}{1-24} = -\frac{2\sqrt{24}}{23} \end{cases} \end{cases}$$

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

⑩ Sabiendo que tg 2a = $\sqrt{3}$, halla tg a

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

$tg2a = \sqrt{3} = \frac{2tga}{1-tg^2a} \Leftrightarrow \sqrt{3}(1-tg^2a) = 2tga \Leftrightarrow -\sqrt{3}tg^2a - 2tga + \sqrt{3} = 0$ ecuación de segundo grado en tga que resolvemos:

$$tga = \frac{2 \pm \sqrt{4-4(-\sqrt{3})\sqrt{3}}}{-2\sqrt{3}} = \frac{2\pm 4}{-2\sqrt{3}} = \begin{cases} -\frac{6}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

⑪ Simplifica las expresiones:

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

a) $\frac{sen2a}{1+\cos 2a} = \frac{2sena\cdot\cos a}{1+\cos^2 a - sen^2a} = \frac{2sena\cdot\cos a}{\cos^2 a + \cos^2 a} = \frac{2sena\cdot\cos a}{2\cos^2 a} = \frac{sena}{\cos a} = tga$.

b) $\frac{\text{sen}2a}{\text{sena}}:\frac{1+\cos 2a}{\cos a}=\frac{\cos a\cdot\text{sen}2a}{\text{sena}(1+\cos 2a)}=\frac{\cos a\cdot 2\text{sena}\cdot\cos a}{\text{sena}(1+\cos^2 a-\text{sen}^2 a)}=\frac{2\cos^2 a}{1+\cos^2 a-\text{sen}^2 a}=\frac{2\cos^2 a}{2\cos^2 a}=1.$

①② Demuestra que tg x = cotg x - 2 cotg 2x.

Partimos del segundo miembro con intención de obtener el primero:

$$\text{cotgx}-2\text{ cotg }2x=\frac{1}{\text{tgx}}-\frac{2}{\text{tg}2x}=\frac{1}{\text{tgx}}-\frac{2}{\frac{2\text{tgx}}{1-\text{tg}^2x}}=\frac{1}{\text{tgx}}-\frac{1-\text{tg}^2x}{\text{tgx}}=\frac{1-1+\text{tg}^2x}{\text{tgx}}=\frac{\text{tg}^2x}{\text{tgx}}=\text{tgx},\ \text{Q.E.D.}$$

①③ Comprueba que: $\frac{\text{tga}}{\text{tg}2a-\text{tga}}=\cos 2a$

$$\frac{\text{tga}}{\text{tg}2a-\text{tga}}=\frac{\frac{\text{tga}}{\text{tga}}}{\frac{\text{tg}2a-\text{tga}}{\text{tga}}}=\frac{1}{\frac{\text{tg}2a}{\text{tga}}-1}=\frac{1}{\frac{\frac{2\text{tga}}{1-\text{tg}^2a}}{\text{tga}}-1}=\frac{1}{\frac{2}{1-\text{tg}^2a}-1}=\frac{1}{\frac{1+\text{tg}^2a}{1-\text{tg}^2a}}=\frac{1-\text{tg}^2a}{1+\text{tg}^2a}=\frac{1-\frac{\text{sen}^2a}{\cos^2 a}}{\sec^2 a}=\frac{\frac{\cos^2 a-\text{sen}^2a}{\cos^2 a}}{\frac{1}{\cos^2 a}}=$$

$= \cos^2 a - \text{sen}^2 a = \cos 2a$, Q.E.D.

①④ Calcula las razones trigonométricas de 22° 30' y las de 75°. En ambos casos, utiliza las expresiones del ángulo mitad.

$$\begin{cases}\text{sen}22°30'=\text{sen}\frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt2}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt2}\\ \cos 22°30'=\cos\frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt2}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt2}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt2}\\ \text{tg}22°30'=\text{tg}\frac{45°}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{1+\cos 45°}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt2}{2}}{1+\frac{\sqrt2}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt2}{2+\sqrt2}}=\sqrt{\frac{(2-\sqrt2)^2}{(2+\sqrt2)(2-\sqrt2)}}=\sqrt{\frac{6-4\sqrt2}{2}}=\sqrt{3-2\sqrt2}\end{cases}$$

$$\begin{cases} sen75^o = sen\frac{150^o}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 150^o}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \cos 75^o = \cos\frac{150^o}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 150^o}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos 30^o}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \\ tg75^o = tg\frac{150^o}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 150^o}{1+\cos 150^o}} = \sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{1-\cos 30^o}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{7+4\sqrt{3}}{1}} = \sqrt{7+4\sqrt{3}} \end{cases}$$

❂❂❂✽✽❁✽✽❂❂❂

①⑤ Sabiendo que cotg a = -2 y a es el mayor ángulo negativo que verifica esta igualdad, calcula las razones trigonométricas del ángulo mitad.

❂❂❂✽✽❁✽✽❂❂❂

Estamos en el segundo cuadrante ya que dice que es ángulo negativo mayor que verifica que la cotangente es negativa. Necesitamos el cosa:

$$1 + \cot g^2 a = \operatorname{cosec}^2 a \Leftrightarrow \operatorname{coseca} = \sqrt{1+\cot g^2 a} = \sqrt{1+(-2)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow sena = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot ga = \frac{\cos a}{sena} \Leftrightarrow \cos a = sena \cdot \cot ga = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Calculamos las razones, directas, del ángulo mitad

$$\begin{cases} sen\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}} \\ \cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{5-2\sqrt{5}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}} \\ tg\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} = \sqrt{\frac{\frac{5+2\sqrt{5}}{10}}{\frac{5-2\sqrt{5}}{10}}} = \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5-2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{(5+2\sqrt{5})^2}{(5-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}} = \sqrt{\frac{45-4\sqrt{5}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{45-4\sqrt{5}} \end{cases}$$

❂❂❂✽✽❁✽✽❂❂❂

①⑥ Expresa, en función de una razón trigonométrica del ángulo mitad:

a) $\frac{1-\cos a}{sena} = \frac{1-\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}} = \frac{2sen^2\frac{a}{2}}{\sqrt{(1-\cos a)(1+\cos a)}} = \frac{2sen^2\frac{a}{2}}{\sqrt{2sen^2\frac{a}{2}\cdot 2\cos^2\frac{a}{2}}} = \frac{2sen^2\frac{a}{2}}{2sen\frac{a}{2}\cdot\cos\frac{a}{2}} = \frac{sen\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = tg\frac{a}{2}$.

b)

$$\frac{sen2a}{1+\cos 2a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a}=\frac{2sena\cdot\cos a}{2\cos^2 a}\cdot\frac{\cos a}{1+\cos a}=\frac{sena}{1+\cos a}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{1+\cos a}=\frac{\sqrt{(1+\cos a)(1-\cos a)}}{1+\cos a}=\sqrt{\frac{(1+\cos a)(1-\cos a)}{(1+\cos a)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}}=tg\frac{a}{2}.$$

①⑦ Sabiendo que cos x/2 = - 2/3 y que x es un ángulo del tercer cuadrante, halla sen x, cos x.

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{2}{3}=-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\Leftrightarrow\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{4}{9}=\frac{1+\cos x}{2}\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{9}$$

$$senx=-\sqrt{1-\cos^2 x}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{9}\right)^2}=-\sqrt{\frac{80}{81}}=-\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

①⑧ Simplifica las expresiones siguientes:

a) $$\frac{sen40^o+sen20^o}{\cos 40^o+\cos 20^o}=\frac{2sen\left(\frac{40^o+20^o}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{40^o-20^o}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{40^o+20^o}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{40^o-20^o}{2}\right)}=\frac{sen30^o\cdot\cos 10^o}{\cos 30^o\cdot\cos 10^o}=\frac{sen30^o}{\cos 30^o}=tg30^o=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b) $$\frac{sen195^o-sen75^o}{sen195^o+sen75^o}=\frac{2\cos\left(\frac{195^o+75^o}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{195^o-75^o}{2}\right)}{2sen\left(\frac{195^o+75^o}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{195^o-75^o}{2}\right)}=\frac{\cos 135^o\cdot sen60^o}{sen135^o\cdot\cos 60^o}=\frac{tg60^o}{tg135^o}=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$$

c) $$\frac{\cos 60^o-\cos 40^o}{sen60^o-sen40^o}=\frac{-2sen\left(\frac{60^o+40^o}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{60^o-40^o}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{60^o+40^o}{2}\right)\cdot sen\left(\frac{60^o-40^o}{2}\right)}=-\frac{sen50^o\cdot sen10^o}{\cos 50^o\cdot sen10^o}=-\frac{sen50^o}{\cos 50^o}=-tg50^o.$$

①⑨ Demuestra que $\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}=tgy$

$$\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{sen(x+y)+sen(x-y)}=\frac{-2sen\frac{(x-y)+(x+y)}{2}\cdot sen\frac{(x-y)-(x+y)}{2}}{2sen\frac{(x-y)+(x+y)}{2}\cdot\cos\frac{(x-y)-(x+y)}{2}}=-\frac{senx\cdot sen(-y)}{senx\cdot\cos(-y)}=-\frac{-seny}{\cos y}=\frac{seny}{\cos y}=tgy$$ Q.E.

D.

②⓪ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}+2x\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{24}+\pi k\\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{5\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{5\pi}{24}+\pi k\end{cases}$.

ya que el ángulo cuyo seno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mide 60º = π/3 rad en el primer cuadrante y 120º = 2π/3 rad en el segundo.

b) $\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 3x=\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{11\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{11\pi}{24}+\pi k\\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow 3x=\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+2\pi k=\frac{19\pi}{12}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{19\pi}{24}+\pi k\end{cases}$

ya que el ángulo cuyo coseno es -1/2 mide 120º = 2π/3 rad en el 2º cuadrante y 240º = 2π/3 rad en el tercero.

c) $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\begin{cases}\frac{2\pi}{3}+\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k=\frac{\pi}{3}+\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k\\ \frac{5\pi}{3}+\pi k \Rightarrow 2x=\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)+\pi k=\frac{4\pi}{3}+\pi k \Rightarrow x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}k\end{cases}$

ya que el ángulo cuya tangente es $-\sqrt{3}$ mide 120º = 2π/3 rad en el 2º cuadrante y 300º = 5π/3 rad en el 4º.

d) $\cos\left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}(x+\pi)\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow \frac{1}{2}x=\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow x=-\frac{4\pi}{3}+4\pi k=\frac{2\pi}{3}+4\pi k\\ \frac{11\pi}{6}+2\pi k \Rightarrow \frac{1}{2}x=\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)+2\pi k=\frac{8\pi}{3}+2\pi k \Rightarrow x=\frac{16\pi}{3}+4\pi k=\frac{4\pi}{3}+4\pi k\end{cases}$

ya que el ángulo cuyo coseno es $\frac{\sqrt{3}}{2}$ mide 30º = π/6 rad en el primer cuadrante y 330º = 11π/6 rad en el 4º.

e) sen 3x – sen30º = 0 ⇔ sen 3x = sen30º ⇔ sen 3x = ½ ⇒ $3x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 360^\circ \Rightarrow x=10^\circ+k\cdot 120^\circ\\ 150^\circ+k\cdot 360^\circ \Rightarrow x=50^\circ+k\cdot 120^\circ\end{cases}$.

f) $\cot g\left(\frac{x+45^\circ}{2}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow \left(\frac{x+45^\circ}{2}\right)=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 180^\circ \Rightarrow x+45^\circ=60^\circ+k\cdot 360^\circ \Leftrightarrow x=15^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 210^\circ+k\cdot 180^\circ \Rightarrow x+45^\circ=420^\circ+k\cdot 360^\circ \Leftrightarrow x=375^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$.

ya que el ángulo cuya cotangente es $\sqrt{3}$ mide 30º en el primer cuadrante y 210º en el 3º. Como la primera solución incluye la segunda, tomamos la primera.

②① Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen 2x = 2 cos x
b) sen x + sen 3x = cos x
c) sen 4x = sen 2x
d) cos 2x - cos 6x = sen 5x + sen 3x
e) sen 2x - cos x = 6 sena x
f) 2 sen x = tg x

a) sen2x = 2cosx ⇔ 2senx·cosx – 2cosx = 0 ⇔ 2cosx(senx – 1) = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 90^o + k\cdot 180^o \\ \text{senx} - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{senx} = 1 \end{cases}$, la solución de la segunda x = 90º + k·360º ya está incluida en la primera.

b) senx + sen3x = cosx $\Leftrightarrow 2\text{sen}\frac{x+3x}{2}\cdot\cos\frac{x-3x}{2} = \cos x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x\cdot\cos(-x) = \cos x \Leftrightarrow 2\text{sen}2x\cdot\cos x - \cos x = 0$;

cosx(2sen2x – 1) = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 90^o + k\cdot 180^o \\ 2\text{sen}2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{sen}2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 30^o + k\cdot 360^o \Rightarrow x = 15^o + k\cdot 180^o \\ 150^o + k\cdot 360^o \Rightarrow x = 75^o + k\cdot 180^o \end{cases} \end{cases}$

c) sen4x = sen2x ⇔ 2sen2x·cos2x = sen2x ⇔ 2sen2x·cos2x - sen2x = 0 ⇔ sen2x(2cos2x -1) = 0, e igualando cada factor a cero:

$$\begin{cases} \text{sen}2x = 0 \Rightarrow 2x = 0^o + k\cdot 180^o \Leftrightarrow x = 0^o + k\cdot 90^o \\ 2\cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \begin{cases} 60^o + k\cdot 360^o \\ 120^o + k\cdot 360^o \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^o + k\cdot 180^o \\ 60^o + k\cdot 180^o \end{cases} \end{cases}$$

d) cos2x – cos6x = sen5x + sen3x $\overset{(1)}{\Leftrightarrow} -2\text{sen}\frac{2x+6x}{2}\cdot\text{sen}\frac{2x-6x}{2} = 2\text{sen}\frac{5x+3x}{2}\cdot\cos\frac{5x-3x}{2} \Leftrightarrow$ - sen4x·sen(-2x) = sen4x·cosx $\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$ sen4x·sen2x – sen4x·cosx = 0 ⇔ sen4x(sen2x – cosx) = 0, ahora igualamos cada factor a cero:

$$\begin{cases} \text{sen}4x = 0 \Rightarrow 4x = 0^o + k\cdot 180^o \Leftrightarrow x = 0^o + k\cdot 90^o \\ \text{sen}2x - \cos x = 0 \Leftrightarrow 2\text{senx}\cos x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\text{senx} - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = 90^o + k\cdot 180^o \\ 2\text{senx} - 1 = 0 \Leftrightarrow \text{senx} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \begin{cases} 30^o + k\cdot 360^o \\ 150^o + k\cdot 360^o \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

(1) Aplicamos las fórmulas de adición para convertir sumas (o diferencias) en productos.
(2) sen(-2x) = -sen2x y pasamos al primer miembro todo.

e) sen2x ·cosx = 6sen^{3}x ⇔ 2senx·cosx – 6sen^{3}x = 0 ⇔ 2senx(cosx – 3sen^{2}x) = 0, ahora ya podemos igualar cada factor a cero:

2senx = 0 ⇒ x = 0º + k·180º.

$\cos x - 3\text{sen}^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 3(1-\cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos^2 x + \cos x - 3 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+36}}{6} = \begin{cases} 0{,}847127 \\ -1{,}18046 \end{cases}$, la segunda solución no es válida ya que el coseno no puede ser menor que -1 y para que cosx = 0,847127; x = 32º 5' 58" +k·360º ó x = 327º 54' 2" + k·360º.

f) 2senx = tgx $2\text{senx} - \text{tgx} = 0 \Leftrightarrow 2\text{senx} - \frac{\text{senx}}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \text{senx}\left(2 - \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{senx} = 0 \Rightarrow x = 0^o + 180^o k \\ 2 - \frac{1}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \end{cases}$

la segunda ecuación tiene por soluciones x = 60º + k·360º ó x = 300º + k·360º.

㉒ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) sen x = 1 + 2 cos^2 x
b) sec x + tg x = 0
c) 6 cos2 (x/2) + cos x = 1
d) 6 cos^{2}x + 6 sen^{2}x = 5 + sen x
e) tg 2x tg x = 1
f) cos^{2}x = 3 sen^{2}x

a) senx = 1 + 2cos^{2}x ⇔ senx = 1 + 2(1 – sen^{2}x) ⇔ senx = 1 + 2 – 2sen^{2}x ⇔ 2sen^{2}x + senx – 3 = 0, ecuación de segundo grado en senx que resolvemos:

$\text{senx} = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \frac{-1\pm 5}{4} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{3}{2} \end{cases}$, la segunda no es válida ya que el seno no puede ser menor que -1 y de la primera obtenemos x = 90º + k·360º.

b) secx + tgx = 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} + \frac{\text{senx}}{\cos x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}(1+\text{senx}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos x} = 0 \Rightarrow \text{No válida} \\ 1+\text{senx} = 0 \Leftrightarrow \text{senx} = -1 \Leftrightarrow x = 270º+k·360º \end{cases}$

c) $6\cos^2\frac{x}{2} + \cos x = 1 \Leftrightarrow 6\left(\frac{1+\cos x}{2}\right) + \cos x = 1 \Leftrightarrow 3 + 3\cos x + \cos x = 1 \Leftrightarrow 4\cos x = -2 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$ cuyas soluciones son x = 120º + k·360º ó x = 240º + k·360º.

d) 6cos^{2}x + 6sen^2 x = 5 + senx ⇔ 6(1 – sen^{2}x) + 6sen^2 x = 5 + senx ⇔ 6 – 6sen^{2}x + 6sen^2 x = 5 + senx ⇔ senx = 1 ⇒ x = 90º + k·360º.

e) tg2x·tgx = 1 $\Leftrightarrow \frac{2\text{tgx}}{1-\text{tg}^2x}·\text{tgx} = 1 \Leftrightarrow 2\text{tg}^2x = 1-\text{tg}^2x \Leftrightarrow 3\text{tg}^2x = 1 \Leftrightarrow \text{tgx} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, de tener en cuenta los dos signos tenemos: $\begin{cases} \text{tgx} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150º+k·180º \\ \text{tgx} = +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º+k·180º \end{cases}$.

f) cos^{2}x = 3sen^{2}x $\Leftrightarrow \frac{\text{sen}^2x}{\cos^2 x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tg}^2x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \text{tgx} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ cuyas soluciones ya hemos hallado en el ejercicio anterior: $\begin{cases} \text{tgx} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 150º+k·180º \\ \text{tgx} = +\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 30º+k·180º \end{cases}$.

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

②③ Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) senx + $\sqrt{3}$ cosx = 2 **b)** senx + cosx = $\sqrt{2}$ **c)** sen x + cos x = 5/2

✪✪✪✻✻❁✻✻✪✪✪

En estas ecuaciones hay que aplicar los teoremas de adición.

a) $\text{senx} + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{senx} + \frac{\sqrt{3}}{2}·\cos x = 1 \Leftrightarrow \text{senx}·\cos 60º + \cos x·\text{sen}60º = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(x+60º) = 1 \Rightarrow$ x + 60º = 90º + k·360º ⇔ x = 30º + k·360º .

b) $\text{senx} + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\text{senx} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \text{senx}·\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos x·\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \Leftrightarrow \text{sen}(x+45º) = 1 \Rightarrow$ x + 45º = 90º + k·360º ⇔ x = 45º + k·360º .

c) $\operatorname{sen}x+\cos x=\frac{5}{2}\Leftrightarrow \operatorname{sen}x+\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}=(5-2\operatorname{sen}x)\Leftrightarrow\left(2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2x}\right)^2=(5-2\operatorname{sen}x)^2\Leftrightarrow$ $4(1-\operatorname{sen}^2x)=25-20\operatorname{sen}x+4\operatorname{sen}^2x\Leftrightarrow 8\operatorname{sen}^2x-20\operatorname{sen}x+21=0$, ecuación de 2º grado en senx que resolvemos:

$\operatorname{sen}x=\frac{20\pm\sqrt{400-672}}{16}$ que no tiene soluciones reales.

②④ Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l}x+\operatorname{sen}^2y=2\\ x+\cos^2y=1\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{reducción}}\left.\begin{array}{r}-x-\operatorname{sen}^2y=-2\\ x+\cos^2y=1\\ \hline \cos^2y-\operatorname{sen}^2y=-1\end{array}\right\}\Rightarrow\cos^2y-\operatorname{sen}^2y=-1\Leftrightarrow\cos 2y=-1\Rightarrow 2y=180º+k\cdot 360º\Leftrightarrow$

y = 90º + k·360º, sustituyendo en la primera x + sen²(90º + k·360º) = 2 ⇔ x + 1 = 2 ⇔ x = 1.

b) $\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x\cdot\cos y=\frac{3}{4}\\ \cos x\cdot\operatorname{sen}y=\frac{1}{4}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{sumando}\\ \text{restando}\end{array}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}x\cdot\cos y+\cos x\cdot\operatorname{sen}y=1\\ \operatorname{sen}x\cdot\cos y-\cos x\cdot\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\operatorname{sen}(x+y)=1\\ \operatorname{sen}(x-y)=\frac{1}{2}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}x+y=90º\\ x-y=\begin{cases}30º\\150º\end{cases}\end{array}\right\}$ luego tenemos dos sistemas posibles (considerando sólo una vuelta a la circunferencia):

$$\begin{cases}\left.\begin{array}{l}x+y=90º\\ x-y=30º\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{sumando}}2x=120º\Leftrightarrow x=60º\Rightarrow y=30º\\ \left.\begin{array}{l}x+y=90º\\ x-y=150º\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{sumando}}2x=240º\Leftrightarrow x=120º\Rightarrow y=330º\end{cases}$$

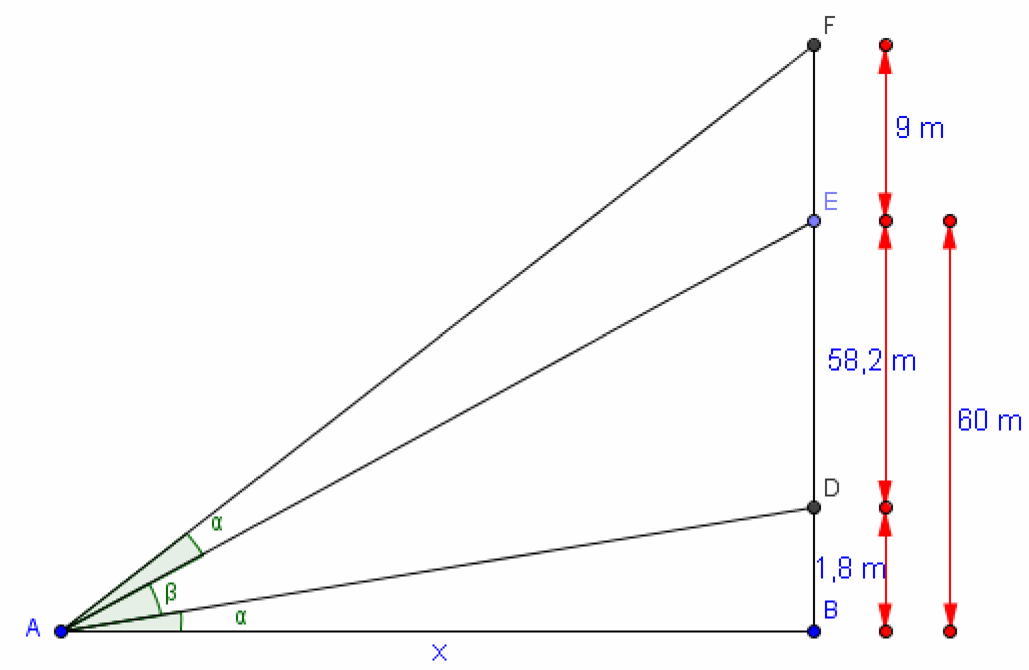
c) $\left.\begin{array}{l}\cos x+\cos y=1\\ \cos(x+y)=1\end{array}\right\}$ de la segunda se deduce que x + y = 0º, luego y = -x que sustituida en la primera nos da: cosx + cos(-x) = 1⇔ cosx + cosx = 1⇔ 2cosx = 1 ⇔ cosx = ½ ⇒ x = 60º + k·360º ó x = 120º + k·360º, la y, por tanto, es y = - x = -60º = 300º + k·360º ó y = -120º = 240º + k·360º

d) $\left.\begin{array}{l}x+y=\frac{\pi}{2}\\ \operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y=\frac{\sqrt{6}}{2}\end{array}\right\}$ de la primera se deduce y = π/2 – x que sustituido en la segunda arroja senx + sen(π/2 – x) = $\frac{\sqrt{6}}{2}$ que convertimos en producto mediante la fórmula de adición:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\frac{A+B}{2}\cdot\cos\frac{A-B}{2}\Rightarrow\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\operatorname{sen}\frac{x+\frac{\pi}{2}-x}{2}\cdot\cos\frac{x-\frac{\pi}{2}+x}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cdot\cos(x-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}\Leftrightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}=\begin{cases}30º=\frac{\pi}{6}\\ 330º=\frac{11\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow x=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}\\ \frac{11\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{25\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\end{cases}$ luego los valores de y son: $\begin{cases}y=\frac{\pi}{2}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{12}\\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{25\pi}{12}=-\frac{19\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}\end{cases}$, da valores cambiados: para x = 5π/12, y = π/12 y viceversa.

②⑤ En una de las orillas de un río hay un pedestal de 60 m de altura sobre el que se apoya una estatua de 9 m de alzada. Halla la anchura x del río, sabiendo que desde un punto A, situado en la orilla opuesta al pedestal, se ve la estatua bajo el mismo ángulo que se vería a un hombre de 1,80 m situado delante del pedestal.



$$\begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1{,}8}{x} \\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{60}{x} \\ \operatorname{tg}(2\alpha+\beta) = \dfrac{69}{x} \end{cases}$$ resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tenemos x = 32,17 m.

②⑥ Sabiendo que tg (A/2) = $-\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ y que A es un ángulo cuyo seno es menor que su coseno, halla cos 3A - cos A.

En el ejercicio ⑧ hallamos $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, en función del cos A.

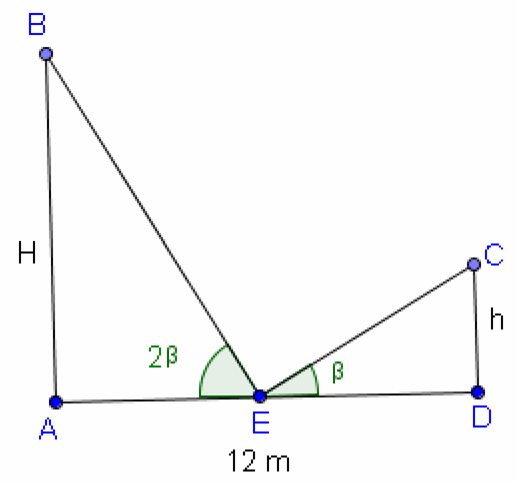
A partir de la tangente del ángulo mitad hallamos el valor de cosA:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = -\sqrt{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}\right)^2 = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{1+\cos A} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2-2\cos A = 3+3\cos A \Leftrightarrow 5\cos A = -1$$

$\Leftrightarrow \cos A = -\dfrac{1}{5}$, ahora podemos hallar el valor de la expresión pedida:

$$\cos 3A - \cos A = 4\cos^3 A - 3\cos A - \cos A = 4\cos^3 A - 4\cos A = 4\left(\left(-\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5}\right) = 4\left(-\frac{1}{125}+\frac{1}{5}\right) = \frac{96}{125}.$$

②⑦ Una calle mide 12 m de ancha. Desde el punto medio de la misma se observan los aleros de sendos edificios de alturas H y h bajo ángulos 2β y β , respectivamente.
En el caso de que los ángulos sean de 60° y 30°, calcula H y h. Encuentra la relación general que liga a las alturas H y h, y comprueba que las alturas calculadas anteriormente verifican la relación general.



AE = ED = x = 6 m

$$\begin{cases} tg\beta = tg30° = \dfrac{h}{6m} \Leftrightarrow h = 6m \cdot tg30° \cong 3{,}46m \\ tg2\beta = tg60° = \dfrac{H}{6m} \Leftrightarrow H = 6m \cdot tg60° \cong 10{,}39m \end{cases}$$

En general:

$$\begin{cases} tg\beta = \dfrac{h}{6} \\ tg2\beta = \dfrac{H}{6} = \dfrac{2tg\beta}{1-tg^2\beta} = \dfrac{2\cdot\frac{h}{6}}{1-\left(\frac{h}{6}\right)^2} = \dfrac{12h}{36-h^2} \Rightarrow \dfrac{H}{6} = \dfrac{12h}{36-h^2} \Leftrightarrow H = \dfrac{72h}{36-h^2} = \dfrac{2h}{1-\left(\frac{h}{6}\right)^2} \end{cases}$$

Comprobemos la relación anterior:

$$H = \frac{72h}{36-h^2} = \frac{72 \cdot 6 \cdot tg30°}{36-(6tg30°)^2} \cong 10{,}39$$

✪✪✪✾✾❁✾✾✪✪✪

②⑧ Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo, demuestra que:

$$tg\ A + tg\ B + tg\ C = tg\ A \cdot tg\ B \cdot tg\ C$$

Nota: ayúdate del desarrollo de tg (A + B + C), y recuerda que A + B + C = 180°.

✪✪✪✾✾❁✾✾✪✪✪

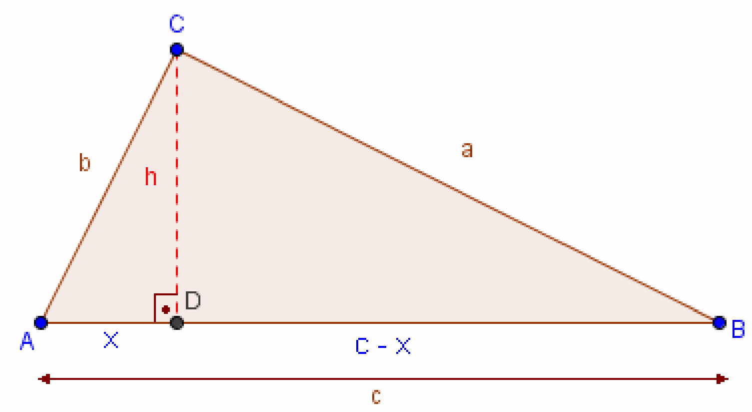
A + B + C = 180º ⇔ A + B = 180º - C ⇔ tg(A+B) = tg(180º-C) ⇔ $\dfrac{tgA + tgB}{1-tgA \cdot tgB} = -tgC$ ⇔ tgA + tgB = -tgC(1 – tgA·tgB) ⇔ tgA + tgB = -tgC + tgA·tgB·tgC ⇔ **tgA + tgB +tgC = tgA·tgB·tgC** Q.E.D.

✪✪✪✾✾❁✾✾✪✪✪

②⑨ En los manuales de agrimensura aparece la siguiente fórmula para calcular el área de un triángulo, siempre que se conozcan los elementos que en ella aparecen:

$$S=\frac{1}{2}\cdot c^2\cdot\frac{tgA\cdot tgB}{tgA+tgB}$$

Ayudándote de la altura correspondiente al vertice C, demuestra la fórmula anterior.



En el triángulo rectángulo ADC tenemos:

$$tgA=\frac{h}{x}$$

En el triángulo rectángulo CDB tenemos:

$$tgB=\frac{h}{c-x}$$

Si despejemos h del sistema formado por las dos expresiones anteriores:

$$tgA=\frac{h}{x}\Leftrightarrow x=\frac{h}{tgA}$$

$$tgB=\frac{h}{c-x}\Leftrightarrow c-x=\frac{h}{tgB}\Leftrightarrow x=c-\frac{h}{tgB}$$

Igualando x: $\frac{h}{tgA}=c-\frac{h}{tgB}\Leftrightarrow\frac{h}{tgA}+\frac{h}{tgB}=c\Leftrightarrow h\left(\frac{1}{tgA}+\frac{1}{tgB}\right)=c\Rightarrow h=\frac{c}{\frac{1}{tgA}+\frac{1}{tgB}}=\frac{c}{\frac{tgB+tgA}{tgA\cdot tgB}}=c\frac{tgA\cdot tgB}{tgB+tgA}$

El área del triángulo es S = $\frac{1}{2}c\cdot h=\frac{1}{2}c\cdot c\cdot\frac{tgA\cdot tgB}{tgB+tgA}=\frac{1}{2}c^2\frac{tgA\cdot tgB}{tgB+tgA}$ Q.E.D.

En donde hemos sustituido h por la expresión obtenida más arriba.