Posiciones relativas de rectas

1. Calcular la posición relativa de los siguientes pares de rectas y en caso de que sean secantes, hallar su punto de intersección y el ángulo que forman:

   a) $2x-3y+1=0$ y $-4x+6y-5=0$ b) $3x-5y+7=0$ y $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-5}$

   c) $5x-y-37=0$ y $y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$ d) $\frac{x-3}{3}=\frac{y+2}{-1}$ y $x-4=\frac{y-3}{5}$

---

2. Los puntos $A(2,7)$, $B(8,-3)$ y $C(0,-10)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo:

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice D.
b) Calcula las ecuaciones que soportan a las diagonales del paralelogramo.
c) Halla las coordenadas del punto en el que se cortan las diagonales.

---

3. Dadas las rectas $ax+2y+4=0$ y $10x+by-2=0$, calcular los valores de "a" y "b", para que ambas rectas se corten en el punto $(2,3)$.

---

4. Dadas las rectas : (r) $kx-(2k-2)y+1=0$ y (s) $(8k-3)x+(2-10k)y-1=0$, hallar el valor del parámetro "k", para que ambas rectas sean paralelas.

---

5. Calcular los valores de "a" y "b", para que la recta $2x-ay=7$, que pasa por el punto $A(2,1)$, sea paralela a la recta $bx-y+2=0$.

---

6. Calcular "k" para que los siguientes pares de rectas sean: 1) paralelas, 2) perpendiculares.

a) (r) $2x-3y-5=0$ y (s) $6x+ky-7=0$
b) (r) $y=-\frac{3}{5}x+\frac{7}{5}$ y (s) $6x+ky-1=0$
c) (r) $2x-ky-1=0$ y (s) $x+2y-5=0$

---

7. Calcular los valores de "a" y "b", para que las rectas: $ax-2y+3=0$ y $bx+8y-5=0$ sean perpendiculares, y además la segunda pase por el punto $P(-1,1)$.

---

8. Calcula la ecuación de la recta, que pasa por el punto de intersección de las rectas (r) y (s), y es paralela a la recta (t).

   (r) $4x+6y-5=0$ (s) $x-2y-3=0$ (t) $4x-5y-12=0$

Posiciones relativas de rectas

1. Calcular la posición relativa de los siguientes pares de rectas y en caso de que sean secantes, hallar su punto de intersección y el ángulo que forman:

a) $2x-3y+1=0 \quad y \quad -4x+6y-5=0$ b) $3x-5y+7=0 \quad y \quad \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-5}$

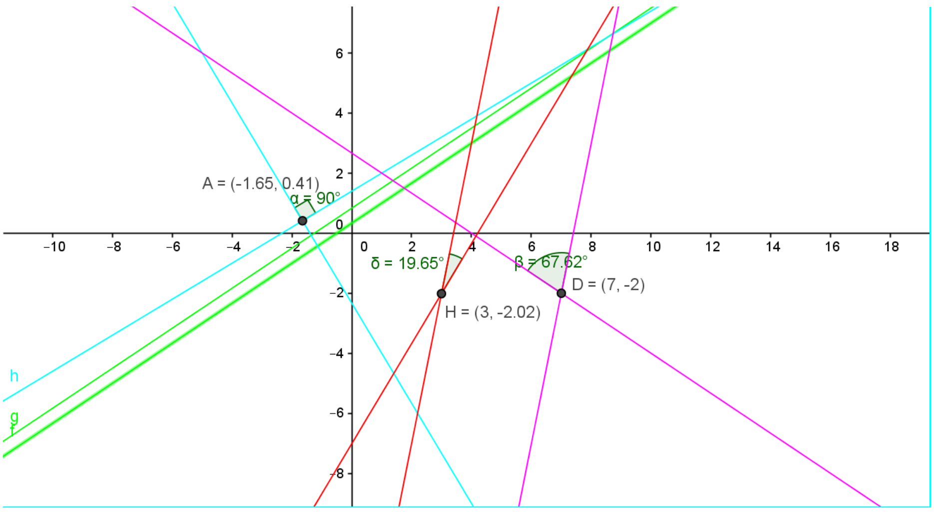
c) $5x-y-37=0 \quad y \quad y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{8}{3}$ d) $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+2}{-1} \quad y \quad x-4=\dfrac{y-3}{5}$

Primero comparamos los coeficientes de las ecuaciones generales o los vectores directores de las dos rectas (se supone que los sabemos obtener a partir de los diferentes tipos de ecuaciones). Así decidimos si son coincidentes, paralelas o perpendiculares. Si no se cumplen las condiciones de ninguna de las tres posiciones relativas anteriores, será que las rectas son secantes (perpendicularidad es un caso particular de secantes).

Para salir de dudas (o si no lo vemos claro) se resuelve el sistema.

El ángulo se obtiene calculando el ángulo de los vectores directores, con la fórmula que vimos cuando expliqué el producto escalar.

a) Paralelas: los coeficientes x e y de la segunda ecuación se obtienen multiplicando por -2 los de la primera, los términos independientes no están en la misma proporción. Así que tienen la misma dirección pero no pasan por el mismo punto. Son paralelas.
b) Perpendiculares: el vector director de la primera es (5,3) y el de la segunda (3, -5). Como su producto escalar es cero, son perpendiculares. Resolviendo el sistema se llega a que el punto de corte es $A\left(-\frac{28}{17},\frac{7}{17}\right)$.
c) Secantes: No hay ninguna relación entre las pendientes de las dos rectas: la de la primera es 5, la de la segunda -2/3. Así que serán secantes. Resolviendo el sistema (es fácil por sustitución, porque nos dan la y despejada) se obtiene que el punto de corte es D (7, -2). El ángulo (se suele decir el menor) es 67,62º.
d) Secantes: no hay relación entre el vector director de la primera, que es (3,-1), y el de la segunda, (1,5), así que son secantes. Resolviendo el sistema se llega a que el punto de corte es el (3,-2) y con la fórmula del ángulo se llega a que éste es 19,65º.



2. Los puntos $A(2, 7)$, $B(8, -3)$ y $C(0, -10)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo:

a) Halla las coordenadas del cuarto vértice D.

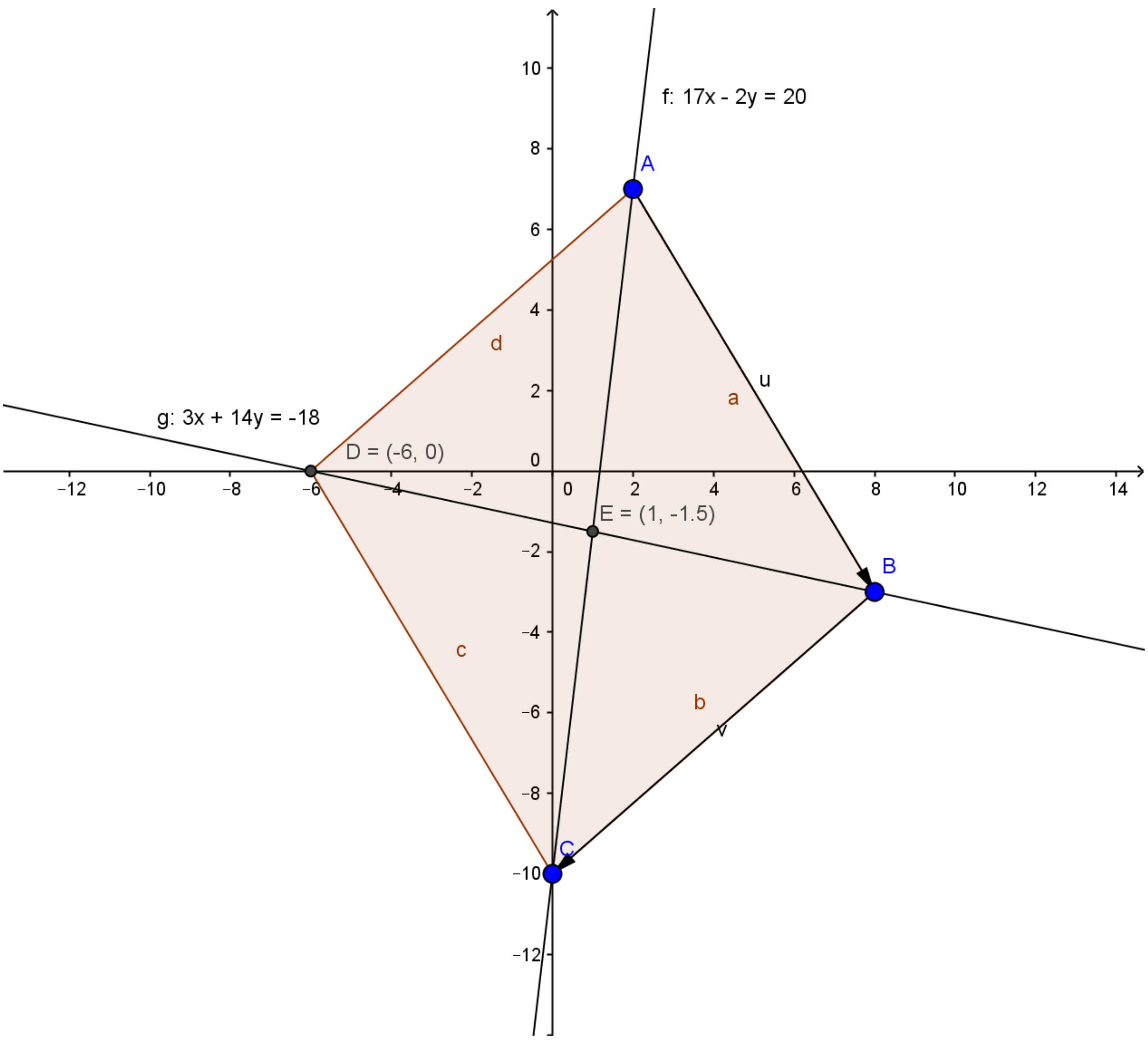
Se hace obligando a que los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AD}$ sean equipolentes. Las coordenadas son D(-6,0).

b) Calcula las ecuaciones que soportan a las diagonales del paralelogramo.

Dados dos puntos, sabemos calcular las rectas que los soportan. No dice qué tipo de ecuación, pero como después hay que resolver el sistema, lo más aconsejable son ecuaciones generales.

c) Halla las coordenadas del punto en el que se cortan las diagonales.

Se obtienen resolviendo el sistema. Las coordenadas son $E\left(1, -\frac{3}{2}\right)$



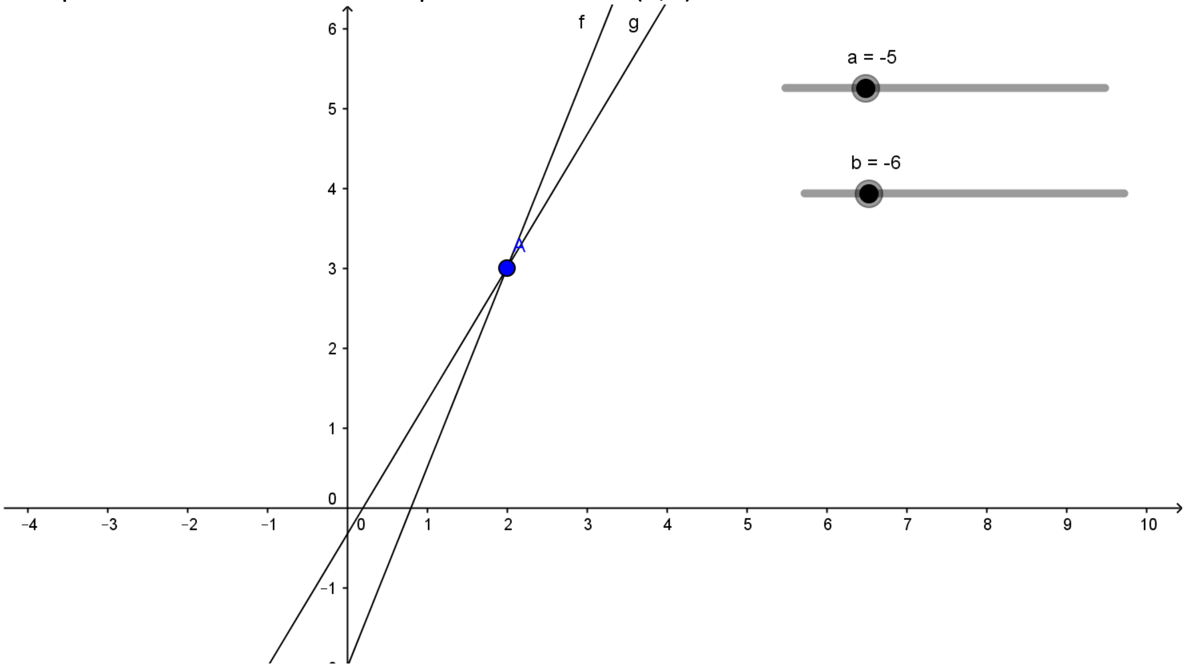
3. Dadas las rectas $ax+2y+4=0$ y $10x+by-2=0$, calcular los valores de "a" y "b", para que ambas rectas se corten en el punto $(2, 3)$.

Como r y s son ecuaciones generales, de ambas podemos averiguar si el punto que nos han dado está o no en ellas. Para comprobarlo únicamente tenemos que sustituir el punto en ambas ecuaciones y despejar las incógnitas (a y b):

$ax+2y+4=0 \rightarrow a*2+2*3+4=0 \rightarrow 2a+10=0 \rightarrow a=-5 \rightarrow r: -5x+2y+4=0$

$10x+by-2=0 \rightarrow 10*2+b*3-2=0 \rightarrow 3b+18=0 \rightarrow b=-6 \rightarrow s: 10x-6y-2=0$

Si comparamos los vectores normales de las dos, vemos que las rectas son secantes y el único punto que tendrán en común será precisamente el (2,3).



---

4. Dadas las rectas : (r) $kx-(2k-2)y+1=0$ y (s) $(8k-3)x+(2-10k)y-1=0$, hallar el valor del parámetro "k", para que ambas rectas sean paralelas.

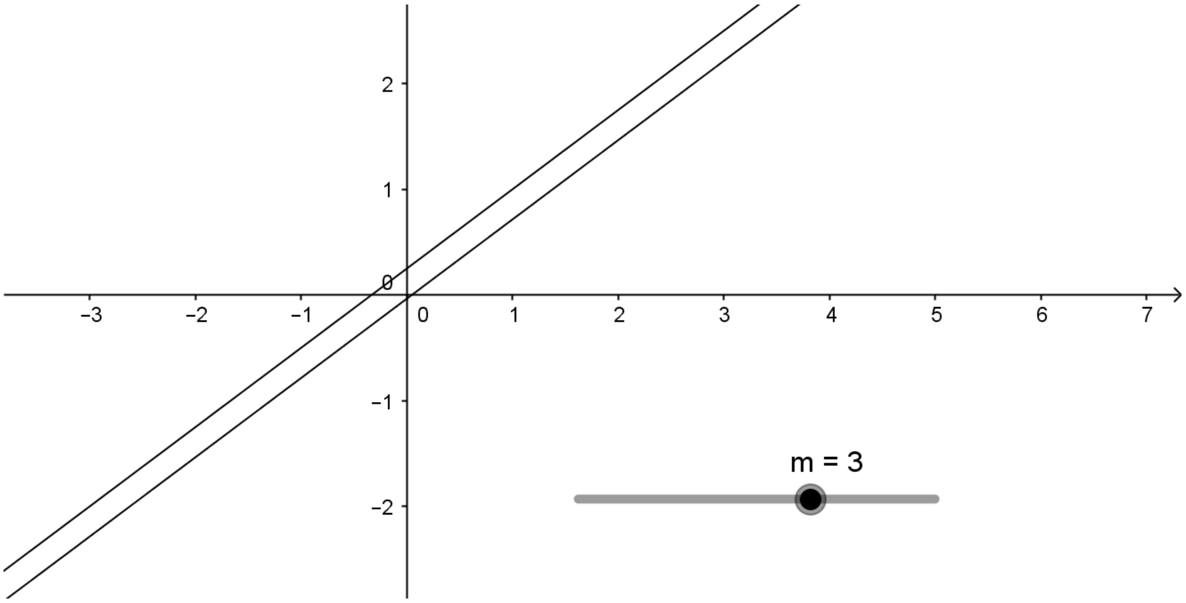
Para que sean paralelas se debe cumplir que los coeficientes de la x y la y sean proporcionales pero los términos independientes no, es decir:

PARALELAS → A/A=B/B≠ C/C

- (r)→ kx-(2k-2)y+1 =0
- (s)→(8k-3)x+(2-10k)y-1 =0

$$\frac{\mathrm{m}}{8\mathrm{k}-3}=-\frac{2\mathrm{k}-2}{2-10\mathrm{k}} \rightarrow \mathrm{k}(2-10\mathrm{k})=8\mathrm{k}-3(-2\mathrm{k}+2) \rightarrow$$

$$2\mathrm{k}-10\mathrm{k}^2 = -16\mathrm{k}^2+16\mathrm{k}+6\mathrm{k}-6 \rightarrow -6\mathrm{k}^2+20\mathrm{k}-6=0 \rightarrow \begin{cases} k_1=\frac{1}{3} \\ k_2=3 \end{cases}$$



---

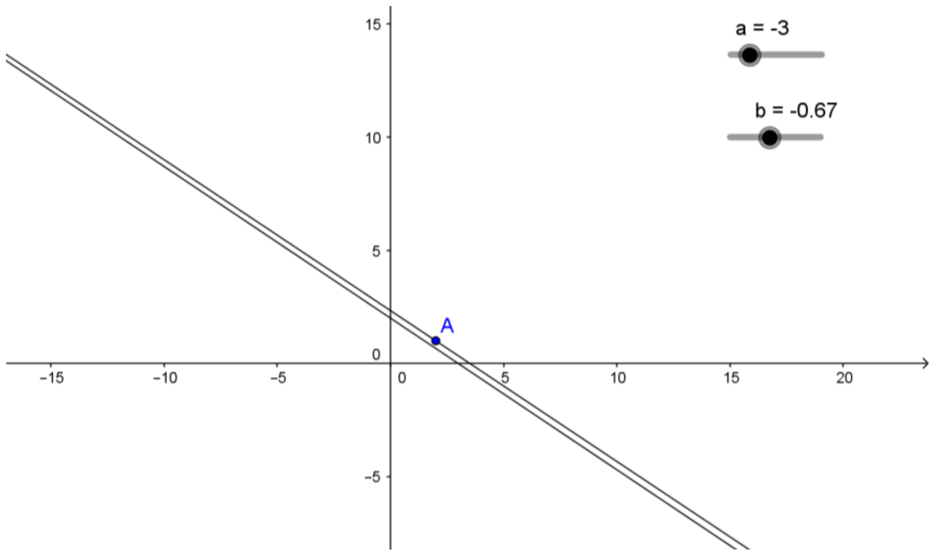
5. Calcular los valores de "a" y "b", para que la recta $2x - ay = 7$, que pasa por el punto $A(2,\ 1)$, sea paralela a la recta $bx - y + 2 = 0$.

1) Primero sustituimos en la recta 2x-ay=7 los valores del punto A:
A(2,1) 2 · 2 – a · 1 = 7 ; 4 – a = 7 ; 4 – 7 = a ; a = -3

2) El valor de a (-3) es sustituido en la recta 2x + 3y = 7

3) A partir de las dos ecuaciones generales, sacamos los vectores directores de las rectas y obligamos a que sus coordenadas sean proporcionales. Así las rectas serán paralelas.

$$\begin{cases} r: 2x + 3y = 7 \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-3,2) \\ s: bx - y + 2 = 0 \rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1,b) \end{cases} \rightarrow -\frac{3}{1} = \frac{2}{b} \rightarrow -3b = 2 \rightarrow b = -\frac{2}{3}$$



---

6. Calcular el valor de "m" para que los siguientes pares de rectas sean: 1) paralelas, 2) perpendiculares.

a) (r) $2x - 3y - 5 = 0$ y (s) $6x + my - 7 = 0$

b) (r) $y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$ y (s) $6x + my - 1 = 0$

c) (r) $2x - my - 1 = 0$ y (s) $x + 2y - 5 = 0$

a) 2x-3y-5=0 y 6x+my-7=0

- Perpendiculares:

    1) Sacamos los vectores normales de las rectas para que sean perpendiculares a las rectas dadas.

       (2,-3) y (6,m)

    2) Establecemos la igualdad, obligando a que ambos sean perpendiculares, es decir, a que el producto escalar sea cero, y resolvemos para m.
       ~~2/6=-3/m → m=-9~~

       2·6 – 3m = 0 → 3m =12 → **m = 4**

- Paralelas:

    1) Sacamos los vectores directores de las rectas (elegimos los mismos para que sea más fácil, pero se puede coger cualquier otro siempre y cuando sea proporcional).

       (3,2) y (m,-6)

    2) Establecemos la igualdad y resolvemos para m.

       3/m=2/-6→m=-9

b) y=-3x/5+7/5 y 0=6x+my-1

Antes de hacer nada pasamos la primera ecuación a su forma general.

$$\frac{3}{5}x + y - \frac{7}{5} = 0 \rightarrow 3x + 5y - 7 = 0$$

- Perpendiculares:

    1) Sacamos los vectores normales de las rectas para que sean perpendiculares a las rectas dadas.

       (3/5,1) y (6,m)

2) Establecemos la igualdad, obligando a que el producto escalar sea cero y resolvemos para m.

~~(3/5)/6=1/m →m=18/5~~

$$\frac{3}{5}\cdot 6+m=0\Rightarrow m=-\frac{18}{5}$$

- Paralelas:

1) Sacamos los vectores directores de las rectas.

(-1, 3/5) y (m,-6)

2) Establecemos la igualdad y resolvemos para m.

$$-\frac{1}{m}=\frac{\frac{3}{5}}{-6}\rightarrow m=\frac{6}{\frac{3}{5}}=\frac{30}{3}\rightarrow \boldsymbol{m=10}$$

c) 2x-my=0 y x+2y-5=0

- Perpendiculares:

1) Sacamos los vectores normales de las rectas para que sean perpendiculares a las rectas dadas.

(2,-m) y (1,2)

2) Establecemos la igualdad, obligando a que el producto escalar sea cero, y resolvemos para m.

~~2/1=-m/2 →m=-4~~
2 – 2m = 0 → **m = 1**

- Paralelas:

1) Sacamos los vectores directores de las rectas.

(m,2) y (-2,1)

2) Establecemos la igualdad y resolvemos para m.

m/-2=2/1→m=-4

7. Calcular los valores de "a" y "b", para que las rectas: $ax-2y+3=0$ y $bx+8y-5=0$ sean perpendiculares, y además la segunda pase por el punto $P(-1,1)$.

$$ax-2y+3=0$$
$$bx+8y-5=0$$

Primero calculamos b, sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación:

$$-1b+8\cdot 1-5=0 \qquad -1b+8-5=0 \qquad -1b=-3 \qquad \boxed{b=3}$$

Después calculamos a, obligando a que los vectores normales sean perpendiculares entre sí:

$$(a,-2)\cdot(3,8)=0 \rightarrow 3a-16=0 \rightarrow \boxed{a=\frac{16}{3}}$$

---

8. Calcula la ecuación de la recta, que pasa por el punto de intersección de las rectas (r) y (s), y es paralela a la recta (t).

(r) $4x+6y-5=0$ (s) $x-2y-3=0$ (t) $4x-5y-12=0$

Primero calculamos el punto de intersección de r y s, resolviendo el sistema formado por sus dos ecuaciones generales:

$$\begin{cases}4x+6y-5=0\\ x-2y-3=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\mathrm{x}=2\mathrm{y}+3\\ 4(2\mathrm{y}+3)+6\mathrm{y}-5=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\mathrm{x}=2\mathrm{y}+3\\ 8\mathrm{y}+12+6\mathrm{y}-5=0\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases}\mathrm{x}=2\mathrm{y}+3\\ 14\mathrm{y}+7=0;\ 14\mathrm{y}=-7\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\mathrm{x}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3=2\\ \mathbf{y}=-\frac{1}{2}\end{cases} \rightarrow P(2,-\frac{1}{2})$$

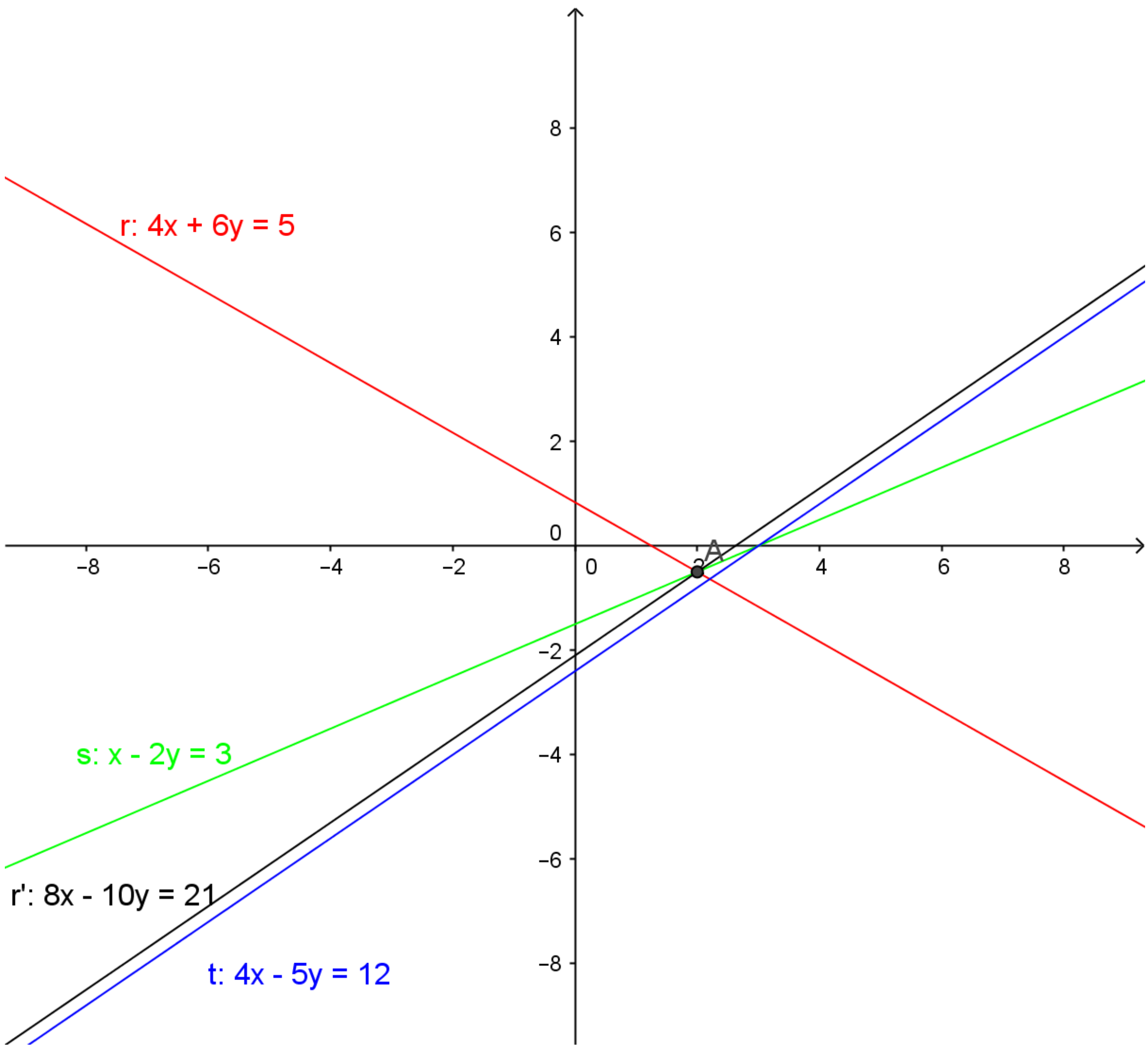
Una vez tengamos el punto de intersección, lo sustituimos en la ecuación de un plano paralelo

4x-5y-c=0

4x-5y=-c; 4·2-5($-\frac{1}{2}$)=-c

8+5/2=-c; 21/2=-c; **c=-21/2**

Solución: $4\mathrm{x}-5\mathrm{y}+\frac{21}{2}=0 \rightarrow 8\mathrm{x}-10\mathrm{y}+21=0$


r: 4x + 6y = 5
s: x - 2y = 3
r': 8x - 10y = 21
t: 4x - 5y = 12
A