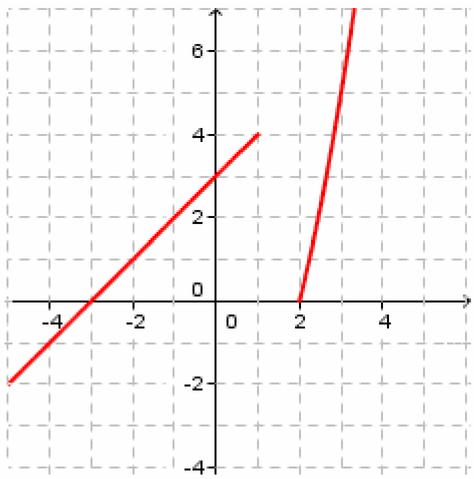
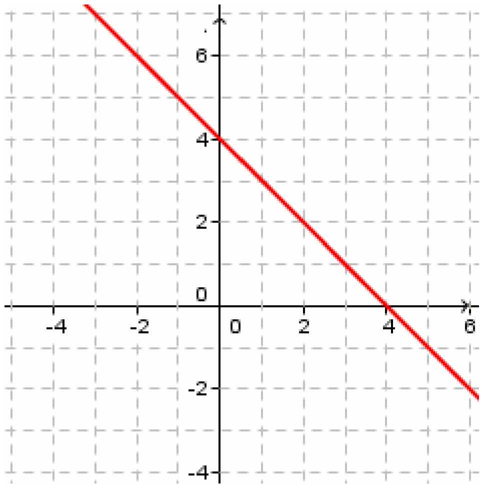
1	Dadas las funciones: $$f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-4 & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases} \qquad\qquad g(x)=4-x$$ a) Calcular sus dominios b) Representa gráficamente ambas funciones c) Calcular $f+g$, $f\cdot g$, f/g

SOLUCIÓN:

a) Dom f = $\mathbb{R}-[1,2]=(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ Dom g = $\mathbb{R}$





c) Función f + g

$$(f+g)(x)=\begin{cases} x+3+4-x & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-4+4-x & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases} \rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} 7 & \text{si} \quad x\le 1 \\ x^2-x & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

Función f · g

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases} (x+3)(4-x) & \text{si} \quad x\le 1 \\ (x^2-4)(4-x) & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

Función f /g

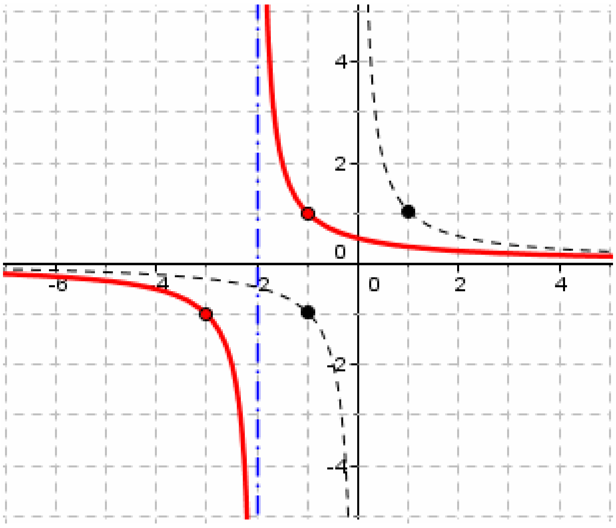
$$(f+g)(x)=\begin{cases} \dfrac{x+3}{4-x} & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{x^2-4}{4-x} & \text{si} \quad x\ge 2\end{cases}$$

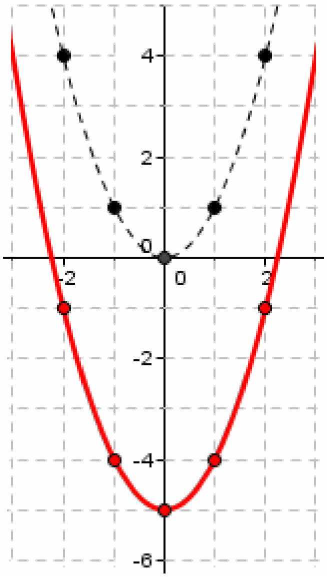
2	Dadas las funciones: $$f(x) = \frac{1}{x+2} \qquad g(x) = x^2 - 5$$ a) Calcular sus dominios b) Representa gráficamente ambas funciones c) Calcular $f+g$, $f \cdot g$, f/g, especificando sus dominios.

SOLUCIÓN:

a) Dom f = $\mathbb{R} - \{-2\}$ Dom g = $\mathbb{R}$

b) La función f es la transformada de $y = \frac{1}{x}$ (traslación horizontal 2 unidades a la izquierda)
La función g es la transformada de $y = x^2$ (traslación vertical 5 unidades hacia abajo)





c) Teniendo en cuanta los dominios de f y g:

- $(f + g)(x) = \frac{1}{x+2} + x^2 - 5$ Dom (f + g) = $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $(f \cdot g)(x) = \frac{x^2-5}{x+2}$ Dom (f · g) = $\mathbb{R} - \{-2\}$
- $(f/g)(x) = \frac{1}{(x+2)(x^2-5)}$ Dom (f /g) = $\mathbb{R} - \{-2, \pm\sqrt{5}\}$

3	Dadas las funciones: $$f(x) = \frac{2x}{x+2} \qquad\qquad g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$$ a) Calcular sus dominios b) Representa gráficamente ambas funciones c) Calcular $f+g$, $f \cdot g$, f/g, especificando sus dominios.

SOLUCIÓN:

a) Dom (f) = $\mathbb{R}-\{-2\}$ Dom (g) = $\mathbb{R}-\{-2,3\}$

b) La función f(x) = $\frac{2x}{x+2} = 2-\frac{4}{x+2}$.

Es la transformada de $y = -\frac{1}{x}$:

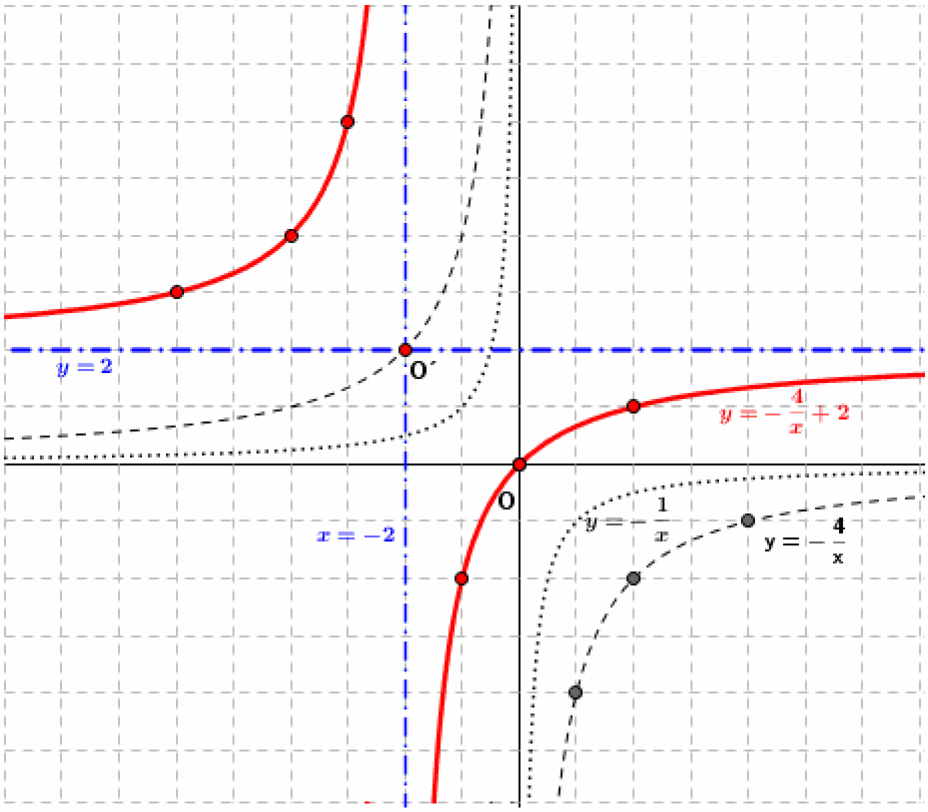
1º) $y = -\frac{1}{x} \rightarrow y = -\frac{4}{x}$ (dilatación, con los cual no hay variación en las asíntotas)

La parte positiva pasa por los puntos (4,-1), (1,-4) y (2,-2). (Recuerda: x · y = -4)

2º) $y = -\frac{4}{x} \rightarrow y = 2-\frac{4}{x+2}$ (traslación horizontal 2 unidades a la izquierda y vertical 2 unidades hacia arriba, con los cual las asíntotas son x = -2 e y = 2)

Trasladando los tres puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: (2,1), (-1. -2) y (0,0).

La otra rama se dibuja por simetría central (centro de la simetría es el punto de corte de las asíntotas)



b) La función $f(x) = \frac{3x-1}{x-3} = 3 + \frac{8}{x-3}$.

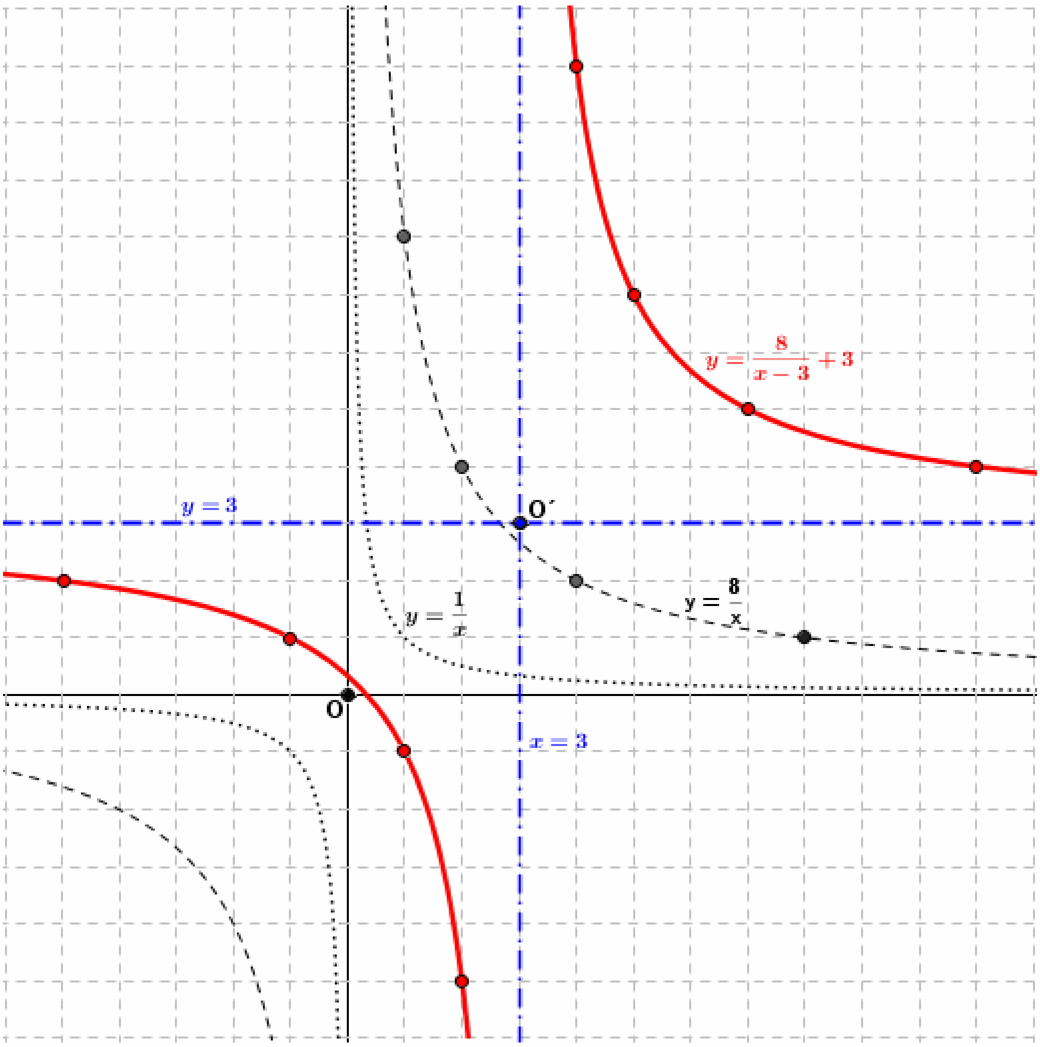
Es la transformada de $y = \frac{1}{x}$:

1º) $y = -\frac{1}{x} \to y = \frac{8}{x}$ (dilatación, con los cual no hay variación en las asíntotas)

La parte positiva pasa por los puntos (8,1), (1,8), (4,2) y (2,4). (Recuerda: $x \cdot y = 8$)

2º) $y = \frac{8}{x} \to y = 3 + \frac{8}{x-3}$ (traslación horizontal 3 unidades a la derecha y vertical 3 unidades hacia arriba, con los cual las asíntotas son x = 3 e y = 3)

Trasladando los 4 puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: (11,4), (4, 11), (7, 5) y (5,7).



c) $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ $g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$

- $(f+g)(x) = \frac{2x}{x+2} + \frac{3x-1}{x-3}$ Dom (f + g) = $\mathbb{R} - \{-2,3\}$
- $(f \cdot g)(x) = \frac{2x(3x-1)}{(x+2)(x-3)}$ Dom (f · g) = $\mathbb{R} - \{-2,3\}$
- $(f/g)(x) = \frac{2x(x-3)}{(x+2)(3x-1)}$ Dom (f /g) = $\mathbb{R} - \left\{-2,3,\frac{1}{3}\right\}$

4 Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Calcular sus dominios

b) Representa gráficamente ambas funciones

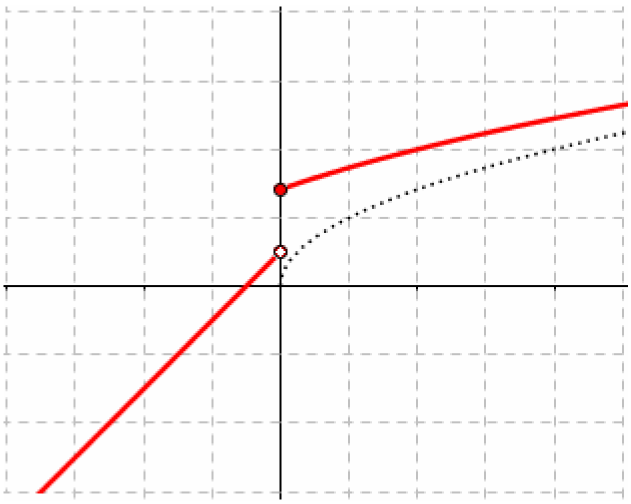
c) Calcular la expresión analítica de $f+g$, $f \cdot g$, f/g, especificando sus dominios

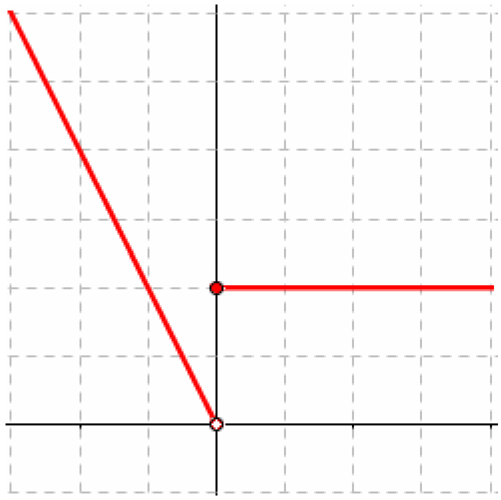
SOLUCIÓN:

a) Dom (f) = $\mathbb{R}$ ya que cada rama está bien definida en su intervalo correspondiente.

Dom (g) = $\mathbb{R}$ ya que cada rama está bien definida en su intervalo correspondiente.

b) La función y = $\sqrt{x+2}$ es la transformada de y = $\sqrt{x}$ (traslación horizontal 2 unidades a la izquierda)





c) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ x + \dfrac{1}{3} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \geq 0 \\ -3x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

- $(f+g)(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ -x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Dom (f + g) = $\mathbb{R}$

- $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ -2x^2 - x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Dom (f · g) = $\mathbb{R}$

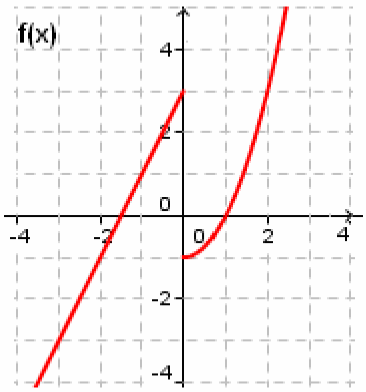
- $(f/g)(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{\sqrt{x+2}}{2} & \text{si } x \geq 0 \\ -\dfrac{2x+1}{4x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Dom (f /g) = $\mathbb{R}$

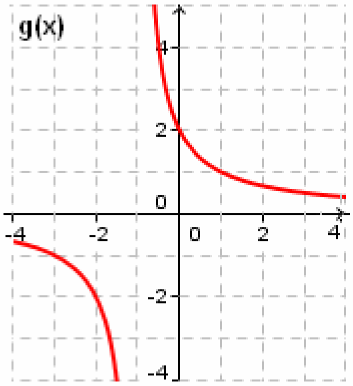
5	Se consideran las funciones: $f(x) = \begin{cases} 3+2x & \text{si } x \le 0 \\ x^2-1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $\qquad g(x) = \dfrac{2}{x+1}$ a) Representar gráficamente las dos funciones. b) Calcular el dominio y la imagen de la función g. c) Calcular: $(g \circ f)(3)$, $(g \circ f)(0)$, $(f \circ g)(-2)$, $(f \circ g)(1)$

SOLUCIÓN:

a) La función f está formada por una recta de pendiente 2 que pasa po (0,3) y la parábola $y = x^2$ trasladada verticalmente 1 unidad hacia abajo.

La función g es una hipérbola, la transformada de $y = \dfrac{1}{x}$, dilatada (k = 2, pasa por (2,1) y (1,2)) y, a continuación, trasladada verticalmente 2 unidades hacia arriba.





b) Dom g = $\mathbb{R} - \{-1\}$

Para determinar la imagen calculamos su función inversa:

Sea $y = \dfrac{2}{x+1}$, despejamos x

$$yx + y = 2 \ \rightarrow yx = 2 - y \ \rightarrow x = \frac{2-y}{y} \ \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{2-x}{x}$$

Por tanto, Im g = $\mathbb{R} - \{0\}$

c) $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(8) = \dfrac{2}{9}$

$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(3) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-2) = -1$

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 0$

6 Se consideran las funciones:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \qquad g(x) = \frac{1}{x-3}$$

a) Representar gráficamente ambas funciones.

b) Calcular el dominio de ambas funciones

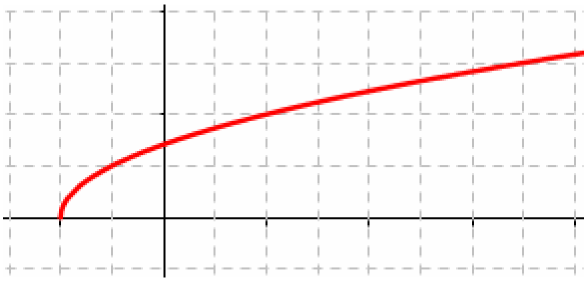
c) Determinar la expresión analítica de f + g, f · g y f / g, especificando sus dominios.

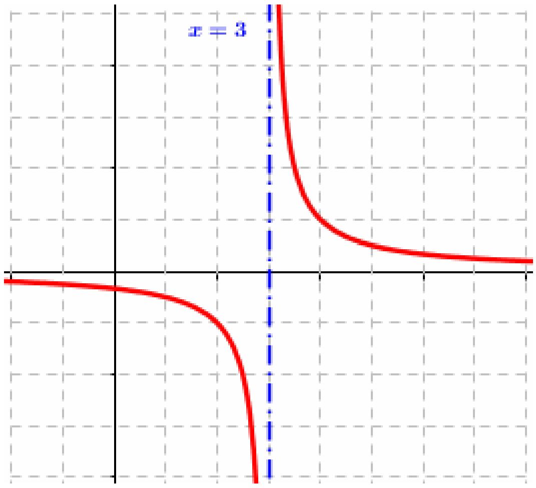
d) Hallar las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$

e) Calcular la imagen de las funciones f y g.

SOLUCIÓN:

a)





Dom f = $[-2,+\infty)$

Dom g = $\mathbb{R}-\{3\}$

b)

- $(f + g)(x) = \dfrac{1}{x-3}+\sqrt{x+2}$ Dom (f + g) = $[-2,3)\cup(3,+\infty)$
- $(f \cdot g)(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{x-3}$ Dom (f · g) = $[-2,3)\cup(3,+\infty)$
- $(f /g)(x) = (x-3)\sqrt{x+2}$ Dom (f /g) = $[-2,3)\cup(3,+\infty)$

c) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3}+2} = \sqrt{\dfrac{2x-5}{x-3}}$ $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+2}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-3}$

d) Para calcular la imagen de cada función vamos a calcular previamente su función inversa.

Inversa de f: $y = \sqrt{x+2} \rightarrow y^2 = x + 2 \rightarrow x = y^2 - 2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 2$

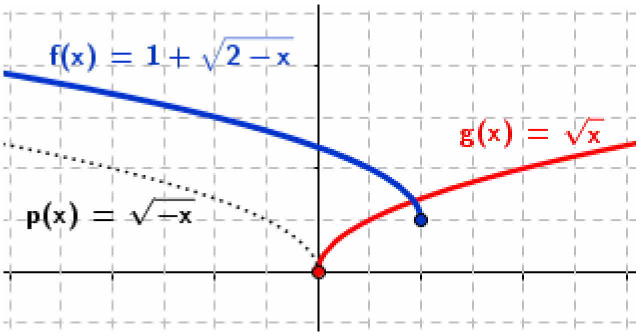
Por tanto, Dom $f^{-1} = \mathbb{R} \rightarrow$ Im f = $\mathbb{R}$

Inversa de g: $y = \dfrac{1}{x-3} \rightarrow yx - 3y = 1 \rightarrow yx = 1 + 3y \rightarrow x = \dfrac{1+3y}{y} \rightarrow g^{-1}(x) = \dfrac{1+3x}{x}$

Por tanto, Dom $g^{-1} = \mathbb{R}-\{0\} \rightarrow$ Im f = $\mathbb{R}-\{0\}$

7	Dada la función f(x) = $1+\sqrt{2-x}$, representa gráficamente la función y calcula: a) Su dominio definición. b) Su función inversa. c) Su imagen

SOLUCIÓN:



a) Dom (f) = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 2-x \geq 0\} = (-\infty, 2]$

b) $y = 1+\sqrt{2-x} \rightarrow y-1=\sqrt{2-x} \rightarrow (y-1)^2 = 2-x \rightarrow x = 2-(y-1)^2 = -y^2+2y+1$

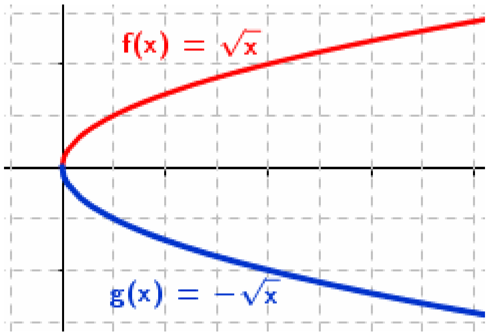
Por tanto, $f^{-1}(x) = -x^2+2x+1$

c) Im (f) = Dom(f^{-1}) = $\mathbb{R}$

8	Hallar el dominio de las funciones f(x) = $\sqrt{x}$ y g(x) = $\sqrt{-x}$. ¿Se puede obtener f + g?

SOLUCIÓN:

- Dom f = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq 0\} = [0, +\infty)$
- Dom g = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, -x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq 0\} = (-\infty, 0]$
- Dom (f + g) = Dom f $\cap$ Dom g = {0}
- Sólo existe la imagen de x = 0 para la función suma.



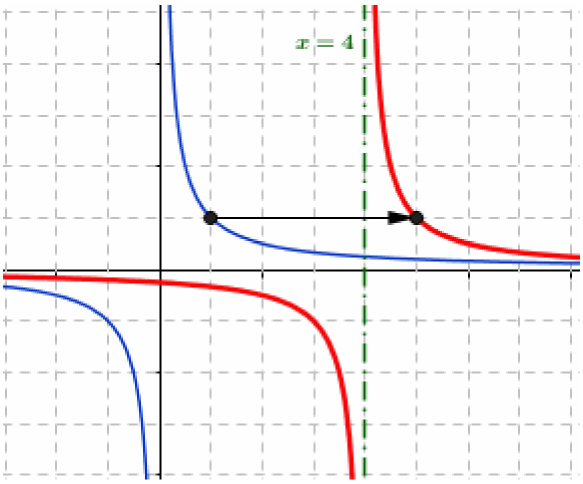
9 Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{1}{x-4} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

a) Representa en unos mismos ejes ambas funciones, indicando cómo se obtiene f a partir de g.

b) Calcular $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1} y sus respectivos dominios.

SOLUCIÓN:



La función f es la trasladada de g horizontalmente 4 unidades a la derecha.

Sus asíntotas son y = 0, x = 4.

Dom f = $\mathbb{R} - \{4\}$ Dom g = $\mathbb{R} - \{0\}$

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x} - 4} = \frac{x}{1-4x} \quad \rightarrow \text{Dom } (f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$$

$$(g \circ f)(x) = g\left(\frac{1}{x-4}\right) = x - 4 \quad \rightarrow \text{Dom } (g \circ f) = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$f^{-1}(x) = y \rightarrow y = \frac{1}{x-4} \rightarrow \frac{1}{y} = x - 4 \rightarrow \frac{1}{y} + 4 = x$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 4 \rightarrow \text{Dom } \left(f^{-1}\right) = \mathbb{R} - \{0\}$$

10

Representar la función $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$:

a) Comprobar que $g \circ g = I$, siendo I la función identidad.

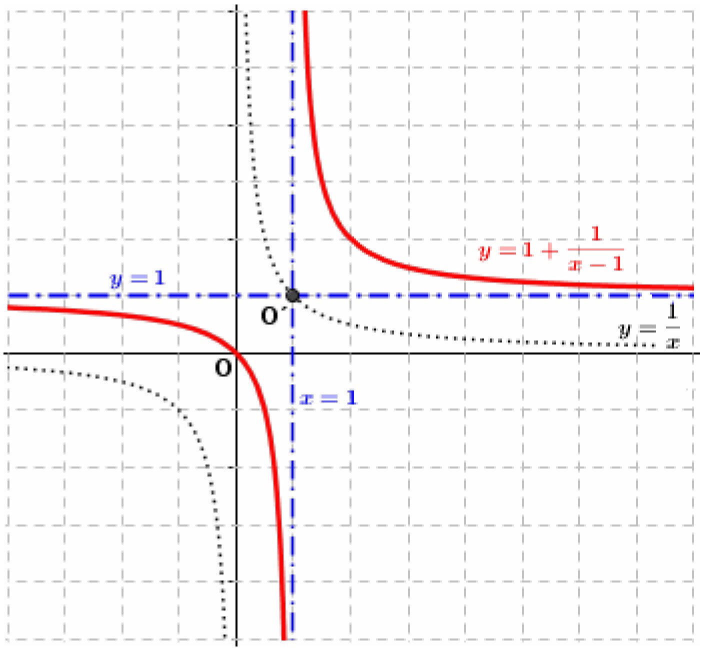
b) Hallar g^{-1}.

c) ¿Qué relación hay entre g y g^{-1}? ¿Por qué?

SOLUCIÓN:

$$y = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

La función es la transformada de $y = \dfrac{1}{x}$, trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha y verticalmente 1 unidad hacia arriba



a) $(g \circ g)(x) = g\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = \dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1} - 1} = \dfrac{x}{x - x + 1} = x$

Luego, se cumple la igualdad $g \circ g = I$

b) $g^{-1}(x) = y \rightarrow y = \dfrac{x}{x-1} \rightarrow yx - y = x \rightarrow yx - x = y \rightarrow x(y-1) = y \rightarrow x = \dfrac{y}{y-1}$

$g^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-1}$

c) Ambas funciones son iguales, porque se verifica $g \circ g = I$:

$g \circ g = I \rightarrow g \circ g \circ g^{-1} = I \circ g^{-1} \rightarrow g \circ I = I \circ g^{-1} \rightarrow g = g^{-1}$

11	Dada las funciones definida por: $$f(x) = \frac{x+1}{x-2} \qquad\qquad g(x) = \frac{x-3}{x+5}$$ a) Representar ambas funciones indicando las transformaciones realizadas a partir de $y = \frac{1}{x}$ b) Calcular: $g \circ f$, f^{-1}, Im(f)

SOLUCIÓN:

La función f(x) = $\frac{x-3}{x+5} = 1 - \frac{8}{x+5}$.

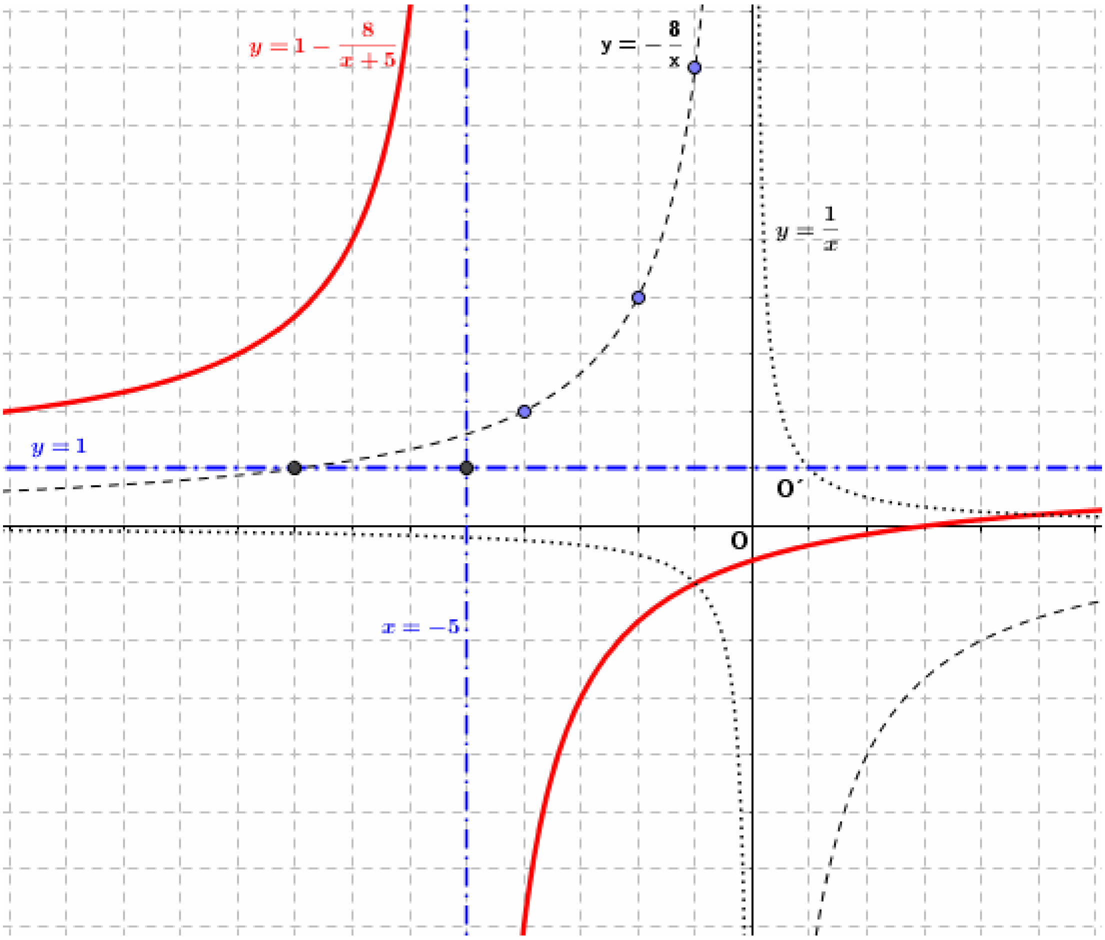
Es la transformada de y = $\frac{1}{x}$:

1º) $y = \frac{1}{x} \rightarrow y = -\frac{8}{x}$ (dilatación, con los cual no hay variación en las asíntotas)

Una de las ramas pasa por los puntos (-8,1), (-1,8), (-4,2) y (-2,4). (Recuerda: x · y = -8)

2º) $y = -\frac{8}{x} \rightarrow y = 1 - \frac{8}{x+5}$ (traslación vertical 1 unidad hacia arriba y horizontal 5 a la izquierda, con los cual las asíntotas son x = -5 e y = 1)

Trasladando los 4 puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: (-13,3), (-6,9), (-9,3) y (-7,5)



La función f(x) = $\frac{x+1}{x-2} = 1+\frac{3}{x-2}$.

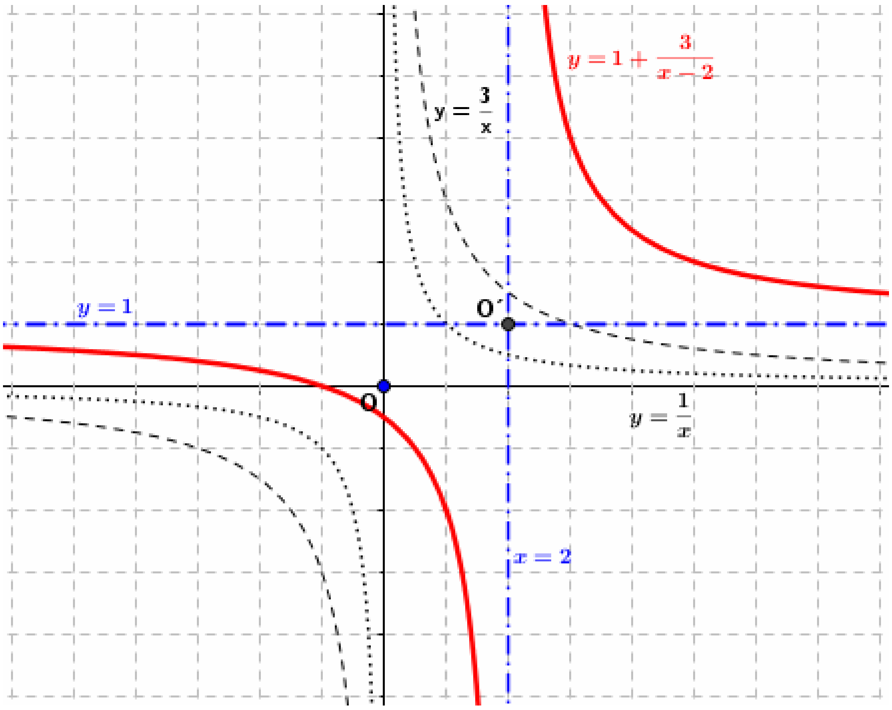
Es la transformada de y = $\frac{1}{x}$:

1º) y = $\frac{1}{x}$ $\rightarrow$ y = $\frac{3}{x}$ (dilatación, con los cual no hay variación en las asíntotas)

Una de las ramas pasa por los puntos (1,3) y (3,1). (Recuerda: x · y = 3)

2º) y = $\frac{2}{x}$ $\rightarrow$ $y = 1+\frac{3}{x-2}$ (traslación vertical 1 unidad hacia arriba y horizontal 2 a la derecha, con lo cual las asíntotas son x = 2 e y = 1)

Trasladando los 2 puntos anteriores, dibujamos una de las ramas: (2,5) y (4,3).



a) $(g\circ f)(x)$ = g(f(x)) = $g\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{\frac{x+1}{x-2}-3}{\frac{x+1}{x-2}+5} = \frac{-2x+7}{6x-9}$

b, c) Despejamos x en la expresión de la función:

y = $\frac{x+1}{x-2}$ $\rightarrow$ y(x – 2) = x + 1 $\rightarrow$ yx – 2y = x + 1 $\rightarrow$ yx – x = 1 + 2y $\rightarrow$ x(y – 1) = 1 + 2y $\rightarrow$ x = $\frac{1+2y}{y-1}$

Luego, $f^{-1}(x)$ = $\frac{1+2x}{x-1}$ $\rightarrow$ Im(f) = Dom (f^{-1}) = $\mathbb{R}-\{1\}$

12	Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{2x+1}{1-x} \qquad\qquad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \le 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

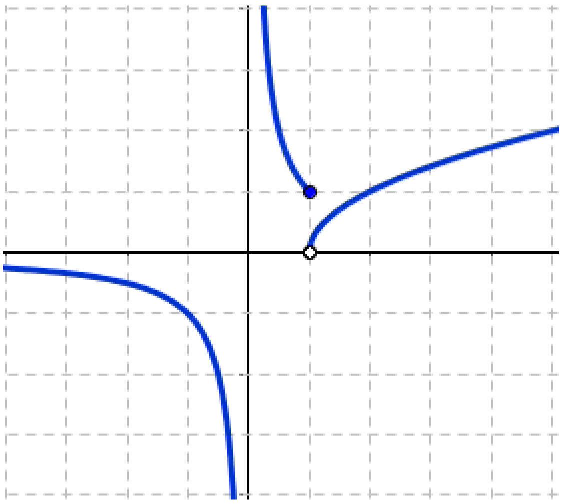
a) Represéntalas, calculando sus dominios.

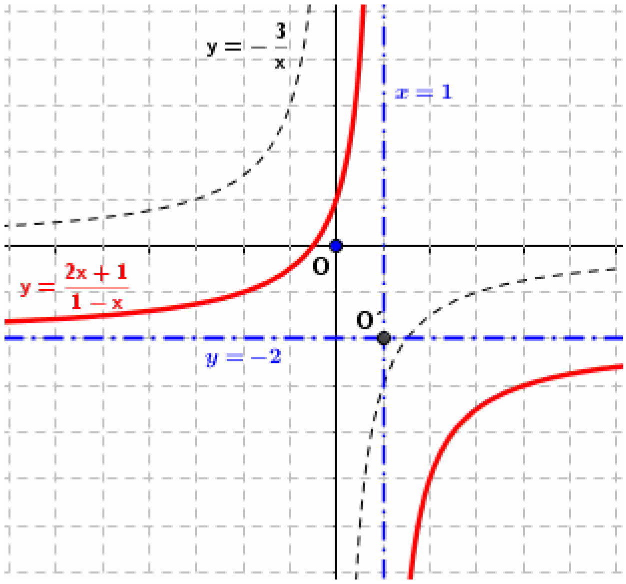
b) Calcular el dominio de las funciones $f+g$, $f \cdot g$, f / g

c) Determina f^{-1} y calcula Im(f)

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \frac{2x+1}{1-x} = -2+\frac{3}{1-x} = -2-\frac{3}{x-1}$$





a) Dom (f) = $\{x \in \mathbb{R} \,/ 1-x \neq 0\} = \mathbb{R}-\{1\}$

Dom g = $\mathbb{R}-\{0\}$

- o Si x > 1 $\rightarrow$ g(x) = $\sqrt{x-1}$ definida en este intervalo.
- o Si $x \le 1 \rightarrow$ g(x) = $\frac{1}{x}$ no definida si x = 0

b) Dom (f + g) = Dom f $\cap$ Dom g = $\mathbb{R}-\{0,1\}$

Dom (f · g) = Dom f $\cap$ Dom g = $\mathbb{R}-\{0,1\}$

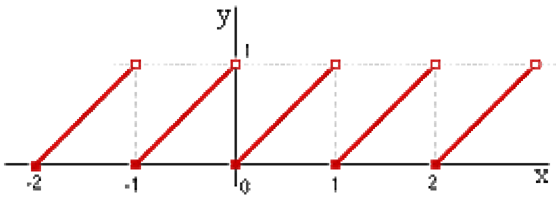
Dom (f /g) = Dom f $\cap$ Dom g – $\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x)=0\} = \mathbb{R}-\{0,1\}$

c) y = $\frac{2x+1}{1-x} \rightarrow$ y – xy = 2x + 1 $\rightarrow$ y – 1 = 2x + xy $\rightarrow$ y – 1 = x(2 + y) $\rightarrow$ x = $\frac{y-1}{2+y}$

Por tanto, $f^{-1}(x)$ $\frac{x-1}{2+x}$ $\rightarrow$ Im f = Dom f^{-1} = $\{x \in \mathbb{R} \,/ 2+x \neq 0\} = \mathbb{R}-\{-2\}$

13	La **función decimal o mantisa**, en la que a cada número x se le asigna su parte decimal: $f(x) = dec(x) = x - E(x)$, siendo E(x) la función parte entera de x Representa la función decimal y razona si: a) Es periódica b) Está acotada superior e inferiormente c) Tiene máximo y mínimo.

SOLUCIÓN:



a. **Es periódica o no**.

La parte decimal de un número real es una función que toma siempre valores comprendidos entre 0 y 1: cada vez que incrementamos un número real en una unidad, se repite la misma imagen (sólo varía su parte entera). Es, por tanto, una función periódica de período ***T* = 1**.

b. **Está acotada superiormente e inferiormente**.

Al tomar siempre valores comprendidos entre 0 y 1, la función $f(x) = dec(x)$ estará acotada superior e inferiormente; luego, estará acotada:

Cotas superiores = {valores mayores o iguales que 1}

Cotas inferiores = {valores menores o iguales que 0}

c. **Tiene extremo superior y extremo inferior**.

$\sup(f) =$ **{**menor cota superior**} = 1**

$\inf(f) =$ **{**mayor cota inferior**} = 0**

d. **Tiene máximo y mínimo**.

No tiene máximo puesto que el valor 1 no lo alcanza en ningún punto mientras que si tiene mínimo ya que el valor cero se alcanza en cualquier punto de abscisa entera.