FUNCIONES

1	Hallar el dominio de las siguientes funciones:
	a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$ b) $g(x) = \dfrac{7x-1}{x^2 - 3x + 2}$ c) $h(x) = \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-1}$

SOLUCIÓN:

a) Dom f = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^3 - 4x \geq 0\}$

Descomponemos el polinomio:

$$x^3 - 4x = x\,(x-2)\,(x+2)$$

Sus raíces son x = 0, x = -2, x = 2.

Representándolas en la recta real, dividimos a ésta en cuatro intervalos:

$$I_1 = (-\infty, -2) \qquad I_2 = (-2,0) \qquad I_3 = (0,2) \qquad I_4 = (2, +\infty)$$

Estudiamos el signo de $y = x^3 - 4x$ en cada intervalo, considerando un valor cualquiera de cada uno:

- $I_1 = (-\infty, -2)$, para x = -3 $\rightarrow y = (-3)^3 - 4\cdot(-3) = -27 + 12 < 0 \rightarrow y < 0$
- $I_2 = (-2,0)$, para x = -1 $\rightarrow y = (-1)^3 - 4\cdot(-1) = -1 + 4 > 0 \rightarrow y > 0$
- $I_3 = (0,2)$, para x = 1 $\rightarrow y = 1 - 4 < 0 \rightarrow y < 0$
- $I_4 = (2, +\infty)$, para x = 3 $\rightarrow y = 3^3 - 4\cdot 3 = 27 - 12 > 0 \rightarrow y > 0$

Por tanto, $x^3 - 4x \geq 0$ en los intervalos [-2,0] y $[2, +\infty)$

$$\text{Dom f} = [-2,0] \cup [2, +\infty)$$

b) Dom g = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 3x + 2 \neq 0\}$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow$ Descomponiendo en factores: $(x-2)(x-1) = 0 \rightarrow$ sus raíces son: x = 1, x = 2

Por tanto,

$$\text{Dom g} = \mathbb{R} - \{1,2\}$$

c) Dom h = $\left\{x \in \mathbb{R} \,/\, \dfrac{\sqrt{2x-4}}{x-1} \in \mathbb{R}\right\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x - 4 \geq 0 \text{ y } x - 1 \neq 0\}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 4 \geq 0 \rightarrow 2x \geq 4 \rightarrow x \geq 2 \\ x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Por tanto, dom h} = [2, +\infty)$$

2 Dadas las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad\qquad g(x) = x^2 + 3$$

a) Hallar las funciones f + g, f · g y f / g, calculando sus respectivos dominios

b) ¿Se cumple que $f \circ g = g \circ f$?

SOLUCIÓN:

En primer lugar, calculamos los dominios de las dos funciones f y g:

Dom f = $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$ Dom g = $\mathbb{R}$

a) $\Rightarrow$ *Función (f + g)*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x-1}{x+1} + x^2 + 3$$

Dom (f + g) = Dom f $\cap$ Dom g = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$\Rightarrow$ *Función (f ·g)*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) \cdot (x^2+3) = \frac{(x-1)\cdot(x^2+3)}{x+1}$$

Dom (f · g) = Dom f $\cap$ Dom g = $\mathbb{R} - \{-1\}$

$\Rightarrow$ Función (f / g)

$$(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{x-1}{x+1}\right) : (x^2+3) = \frac{(x-1)}{(x+1)\cdot(x^2+3)}$$

Dom (f /g) = Dom f $\cap$ Dom g $-$ $\{x \in \mathbb{R} \,/\, g(x) = 0\}$ = $\mathbb{R} - \{-1\}$

b) $$g \circ f\,(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 3 = \frac{(x-1)^2 + 3(x+1)^2}{(x+1)^2} = \frac{4x^2+4x+4}{(x+1)^2}$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = \frac{x^2+3-1}{x^2+3+1} = \frac{x^2+2}{x^2+4}$$

Por tanto, no son iguales

3 Dadas las funciones:

$$f(x) = \sqrt[3]{3x+1} \qquad g(x) = \frac{2x}{x-3}$$

a) Calcular sus dominios

b) Calcular $f \circ g$, $g^{-1} \circ f$

c) Determinar Im(f), Im(g)

SOLUCIÓN:

a) Dom f = $\left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \sqrt[3]{3x+1} \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}$

Dom g = $\left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \dfrac{2x}{x-3} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x-3 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{3\}$

b) $\Rightarrow f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{2x}{x-3}\right) = \sqrt[3]{\dfrac{6x}{x-3}+1} = \sqrt[3]{\dfrac{7x-3}{x-3}}$

$\Rightarrow$ Antes de calcular $g^{-1} \circ f$ (x), determinaremos la inversa de g.

Calculamos $g^{-1}(x)$:

$y = \dfrac{2x}{x-3} \to$ y(x – 3) = 2x $\to$ yx – 3y = 2x $\to$ yx – 2x = 3y $\to$ x(y – 2) = 3y $\to$ x = $\dfrac{3y}{y-2}$

Luego, $g^{-1}(x) = \dfrac{3x}{x-2}$

$g^{-1} \circ f\ (x) = g^{-1}(f(x)) = g^{-1}\left(\sqrt[3]{3x+1}\right) = \dfrac{3\sqrt[3]{3x+1}}{\sqrt[3]{3x+1}-2}$

c) Para determinar la imagen de cada función hay que determinar previamente la función inversa ya que la imagen de una función es el dominio de su función inversa.

Inversa de f:

$y = \sqrt[3]{3x+1} \to y^3 = 3x + 1 \to 3x = y^3 - 1 \to x = \dfrac{y^3-1}{3}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{x^3-1}{3}$

Im (f) = Dom(f^{-1}) = $\mathbb{R}$, por ser una función polinómica.

Im (g) = Dom(g^{-1}) = $\left\{x \in \mathbb{R} \;/\; \dfrac{3x}{x-2} \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\; x-2 \neq 0\right\} = \mathbb{R} - \{2\}$

4 Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si} \quad x>0 \\ \dfrac{1}{2x+1} & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 5x+\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ x-4 & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$$

a) Calcular sus dominios

b) Calcular $f+g$, $f\cdot g$

c) Calcular $g\circ f(-2)$, $f\circ g(2)$

SOLUCIÓN:

a) Dominio de f:

Si $x > 0 \to f(x) = 3x + 1$, definida para cualquier valor real.

Si $x \le 0 \to f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, definida si $2x+1\neq 0 \leftrightarrow x\neq -\dfrac{1}{2}$, valor que está dentro del conjunto inicial.

Luego, Dom f $= \mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

Dominio de g:

Si $x > 0 \to g(x) = 5x+\dfrac{1}{x}$, definida para $\mathbb{R}-\{0\}$, que no está dentro del conjunto inicial.

Si $x \le 0 \to g(x) = x - 4$, definida para cualquier valor real.

Luego, Dom g $= \mathbb{R}$.

b) Función f + g

Si $x > 0 \to f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 5x+\dfrac{1}{x} \longrightarrow (f + g)(x) = 3x+1+5x+\dfrac{1}{x} = 8x+1+\dfrac{1}{x}$

Si $x \le 0 \to f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$, $g(x) = x - 4 \to (f + g)(x) = \dfrac{1}{2x+1}+x-4$.

Por tanto:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 8x+1+\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ \dfrac{1}{2x+1}+x-4 & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$$

Función f · g

Del mismo modo, se determina la función producto:

$$(f\cdot g)(x) = \begin{cases} (3x+1)\left(5x+\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x>0 \\ \left(\dfrac{1}{2x+1}\right)(x-4) & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases} \to (f\cdot g)(x) = \begin{cases} 15x^2+5x+3+\dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>0 \\ \dfrac{x-4}{2x+1} & \text{si} \quad x\le 0 \end{cases}$$

c) $g \circ f(-2) = g(f(-2)) = g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{13}{3}$

Si $x \le 0 \to f(x) = \frac{1}{2x+1} \to f(-2) = -\frac{1}{3}$

Si $x \le 0 \to g(x) = x - 4 \to g\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} - 4 = -\frac{13}{3}$

$f \circ g(2) = f(g(2)) = f\left(\frac{21}{2}\right) = \frac{65}{2}$

Si $x > 0 \to g(x) = 5x + \frac{1}{x} \to g(2) = 10 + \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$

Si $x > 0 \to f(x) = 3x + 1 \to f\left(\frac{21}{2}\right) = f\left(\frac{21}{2}\right) = 3\left(\frac{21}{2}\right) + 1 = \frac{65}{2}$

5 Hallar las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ $\qquad$ $g(x) = x^2 + 4$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$ $\qquad$ $g(x) = (x + 2)^2$

c) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$ $\qquad$ $g(x) = 2x - 1$

d) $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$ $\qquad$ $g(x) = 1 + x^3$

SOLUCIÓN:

a) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 4) = \frac{2}{x^2+4}$ $\qquad$ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{2}{x}\right) = \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4 = \frac{4+4x^2}{x^2}$

b) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f[(x + 2)^2] = \sqrt{(x+2)^2 - 2} = \sqrt{x^2 + 4x + 2}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x-2}\right) = \left(\sqrt{x-2} + 2\right)^2 = x + 2 + 4\sqrt{x-2}$

c) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x - 1) = (2x-1)^2 + \sqrt{2x-1}$ $\qquad$ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(x^2 + \sqrt{x}\right) = 2\left(x^2 + \sqrt{x}\right) - 1$

d) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(1+x^3) = 3(1+x^3) - \frac{1}{1+x^3}$ $\qquad$ $g \circ f(x) = g(f(x)) = g\left(3x - \frac{1}{x}\right) = 1 + \left(3x - \frac{1}{x}\right)^3$

6 Calcular la expresión analítica de f + g, f · g y f / g, especificando sus dominios.

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x-2}}$

b) $f(x) = 2x - 1$ $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2+\dfrac{3}{x} & \text{si } x \geq 2 \\ x & \text{si } x<2 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x<1 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$ $g(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x-2}}$

- $(f+g)(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{5}{\sqrt{x-2}}$ Dom (f + g) = $(2,+\infty)$
- $(f \cdot g)(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x^2-4}}$ Dom (f · g) = $(2,+\infty)$
- $(f/g)(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{5\sqrt{x+2}}$ Dom (f /g) = $(2,+\infty)$

b) $f(x) = 2x - 1$ $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- $(f+g)(x) = \begin{cases} 4x-1 & \text{si } x<1 \\ \dfrac{1}{x}+2x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Dom (f + g) = $\mathbb{R}$
- $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 4x^2-2x & \text{si } x<1 \\ \dfrac{2x-1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Dom (f · g) = $\mathbb{R}$
- $(f/g)(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} & \text{si } x<1 \\ 2x^2-x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ Dom (f /g) = $\mathbb{R}-\{0\}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2+\dfrac{3}{x} & \text{si } x \geq 2 \\ x & \text{si } x < 2 \end{cases}$ $\qquad$ $g(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$

o $(f+g)(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 1 \\ 2x+2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 4+x+\dfrac{3}{x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad$ Dom (f + g) = $\mathbb{R}$

o $(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si } x < 1 \\ x^2+2x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ (2+x)\left(2+\dfrac{3}{x}\right) & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad$ Dom (f · g) = $\mathbb{R}$

o $(f/g)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x}{x+2} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{2x+3}{x^2+2x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ $\qquad$ Dom (f /g) = $\mathbb{R}-\{0\}$

7 Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4}$ $\qquad$ b) $f(x) = \dfrac{x^3-5}{2}$ $\qquad$ c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$

d) $f(x) = \dfrac{1+2x}{x-2}$ $\qquad$ e) $f(x) = \dfrac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}}$ $\qquad$ f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-2}}$

SOLUCIÓN:

a) $f(x) = \dfrac{2x}{x-4} \rightarrow y = \dfrac{2x}{x-4} \rightarrow yx - 4y = 2x \rightarrow yx - 2x = 4y \rightarrow x(y-2) = 4y \rightarrow x = \dfrac{4y}{y-2}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{4x}{x-2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3-5}{2} \rightarrow y = \dfrac{x^3-5}{2} \rightarrow 2y = x^3 - 5 \rightarrow 2y + 5 = x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{2y+5}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x+5}$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \rightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \rightarrow y^2 = \dfrac{1}{x-2} \rightarrow \dfrac{1}{y^2} = x-2 \rightarrow x = 2+\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{2y^2+1}{y^2}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{1+2x}{x-2} \to y = \frac{1+2x}{x-2} \to yx - 2y = 1 + 2x \to yx - 2x = 1 + 2y \to x(y-2) = 1 + 2y \to x = \frac{2y+1}{y-2}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

e) $f(x) = \frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}} \to y = \frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{x+8}} \to y^2 = \frac{9x}{x+8} \to y^2x + 8y^2 = 9x \to y^2x - 9x = -8y^2$

$x(y^2 - 9) = -8y^2 \to x = -\frac{8y^2}{y^2-9}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = -\frac{8x^2}{x^2-9}$

a) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \to y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-2}} \to y^3 = \frac{x+1}{x-2} \to y^3x - 2y^3 = x + 1 \to y^3x - x = 2y^3 + 1$

$x(y^3 - 1) = 2y^3 + 1 \to x = \frac{2y^3+1}{y^3-1}$

Por tanto, $f^{-1}(x) = \frac{2x^3+1}{x^3-1}$

8	Dadas las siguientes funciones: $f(x) = 2x + 3$ $\qquad$ $g(x) = 3x - 2$ Comprueba que $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

SOLUCIÓN:

Calculamos $(f \circ g)^{-1}$:

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x - 2) = 2(3x - 2) + 3 = 6x - 1$
- $(f \circ g)(x) = 6x - 1 \to y = 6x - 1 \to y + 1 = 6x \to x = \frac{y+1}{6} \to (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x+1}{6}$

Calculamos $g^{-1} \circ f^{-1}$:

- $g(x) = 3x - 2 \to y = 3x - 2 \to y + 2 = 3x \to x = \frac{y+2}{3} \to g^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$
- $f(x) = 2x + 3 \to y = 2x + 3 \to y - 3 = 2x \to x = \frac{y-3}{2} \to f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$
- $g^{-1} \circ f^{-1}(x) = g^{-1}\left(\frac{x-3}{2}\right) = \frac{\frac{x-3}{2}+2}{3} = \frac{x+1}{6}$

9

Se consideran las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 1 \\ cx & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad g(x) = \frac{3x+2}{2} \qquad h(x) = \frac{1}{x}$$

a) Calcular a, b y c para que f(0) = 0, f(-1) = 1, f(3) = 6.

b) Determinar el dominio de las tres funciones.

c) ¿Se puede calcular $(f \circ g)(0)$? ¿Cuándo se puede calcular $(f \circ g)(x)$?

d) Comprobar que $h^{-1}(x) = h(x)$. ¿Cuál será la expresión de $h^{-1} \circ h$?

e) Comprobar que $(g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1}$.

f) Calcular la función h / g, especificando su dominio.

SOLUCIÓN:

a) $f(0) = 0 \to b = 0$ $\qquad f(-1) = 1 \to a + b = 1 \to a = 1$ $\qquad f(3) = 6 \to 3c = 6 \to c = 2$

Por tanto, la función f es: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) Dom f = $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$ $\qquad$ Dom g = $\mathbb{R}$ $\qquad$ Dom h = $\mathbb{R} - \{0\}$

c) $(f \circ g)(0)$ = f(g(0)) = f(1) que no está definida., por tanto, no se puede calcular.

Para que se pueda calcular la función compuesta hay que exigir que g(x) $\in$ Dom f, es decir,

o $\frac{3x+2}{2} < 1 \to 3x + 2 < 2 \to x < 0$

o $\frac{3x+2}{2} > 2 \to 3x + 2 > 4 \to 3x > 2 \to x > \frac{2}{3}$

d) $h(x) = \frac{1}{x} \to y = \frac{1}{x} \to x = \frac{1}{y} \to h^{-1}(x) = \frac{1}{x}$

La composición de una función con su inversa es la función identidad i(x) = x

e) $(g \circ h)(x) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{3}{x} + 2}{2} = \frac{3+2x}{2x}$

Calculamos su inversa:

$$y = \frac{3+2x}{2x} \to 2xy = 3 + 2x \to 2xy - 2x = 3 \to x(2y-2) = 3 \to x = \frac{3}{2y-2} \to (g \circ h)^{-1}(x) = \frac{3}{2x-2}$$

Calculamos la inversa de g:

$$y = \frac{3x+2}{2} \to 2y = 3x + 2 \to 2y - 2 = 3x \to x = \frac{2y-2}{3} \to g^{-1}(x) = \frac{2x-2}{3}$$

Calculamos $h^{-1} \circ g^{-1}$: $\quad (h^{-1} \circ g^{-1})(x) = h^{-1}\left(\frac{2x-2}{3}\right) = \frac{3}{2x-2}$

f) $\left(\frac{h}{g}\right)(x) = \frac{1}{x} : \frac{3x+2}{2} = \frac{2}{3x^2+2x} \to \text{Dom}\left(\frac{h}{g}\right) = \mathbb{R} - \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$

10 Dada las funciones definida por:

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x-1} \qquad h(x) = 3x^3 + 2$$

determinar:

a) Dominio de cada función.

b) Expresión analítica de la función $h \circ g$.

c) Valor de $(h \circ f)(0)$

d) Expresión analítica de la función $g^{-1} - h$.

SOLUCIÓN:

a) Dominios:

- Dom f = $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 2x - 3 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1,3\}$ ya que $x^2 - 2x - 3 = 0$ si x = -1, x = 3
- Dom g = Dom h = $\mathbb{R}$

b) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h\left(\sqrt[3]{x-1}\right) = 3(x-1) + 2 = 3x - 1$

c) $(h \circ f)(0) = h(f(0)) = h\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2 = \frac{17}{9}$

d) $g(x) = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow y^3 = x - 1 \rightarrow x = 1 + y^3 \rightarrow g^{-1}(x) = 1 + x^3$

$(g^{-1} - h)(x) = x^3 + 1 - (3x^3 + 2) = -2x^3 - 1$

11 Dada las funciones definida por:

$$f(x) = 3x - 9 \qquad g(x) = 2x + k$$

a) Determinar k para que $f \circ g = g \circ f$

b) Hallar la función inversa de f y su dominio.

SOLUCIÓN:

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + k) = 3(2x + k) - 9 = 6x + 3k - 9$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 9) = 2(3x - 9) + k = 6x - 18 + k$

Para que $f \circ g = g \circ f$ debe cumplirse $6x + 3k - 9 = 6x - 18 + k \rightarrow 2k = -9 \rightarrow k = -9/2$

b) $f(x) = 3x - 9 \rightarrow y = 3x - 9 \rightarrow 3x = y - 9 \rightarrow x = \frac{y-9}{3} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + 3$

Su dominio es $\mathbb{R}$.

12 Dada la función definida por:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-4}{2x+6}}$$

a) Calcular su dominio.

b) Calcular su recíproca

SOLUCIÓN:

a) Dom f = $\left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x-4}{2x+6} \geq 0 \text{ y } 2x+6 \neq 0\right\}$

La función es la composición de una función racional y una función irracional:

$$x \in \mathbb{R} \to \frac{x-4}{2x+6} \to \sqrt{\frac{x-4}{2x+6}}$$

Por ello hay que imponer que el denominador de la función racional sea distinto de cero y que el radicando de la función irracional sea mayor o igual que cero.

- $2x+6 \neq 0$ si $x \neq 3$
- $\frac{x-4}{2x+6} \geq 0$ si $x \in (-\infty,-3) \cup [4,+\infty)$:

Estudiamos el signo del numerador y del denominador. Para ello seguimos los siguientes pasos:

1. Determinar los ceros del numerador y del denominador:
   - $x - 4 = 0$ si $x = 4$
   - $2x + 6 = 0$ si $x = -3$

2. Representamos dichos valores en la recta real dividiendo esta en tres intervalos:

$I_1 = (-\infty,-3)$ $I_2 = (-3,4)$ $I_3 = (4,+\infty)$

Estudiamos el signo de la fracción en cada intervalo obtenido:

- En $(-\infty,-3)$, tomando x = -4 $\to \frac{-4-4}{-8+6} > 0$
- En (-3,4), tomando x = 0 $\to \frac{-4}{+6} < 0$
- En $(4,+\infty)$, tomando x = 5 $\to \frac{5-4}{10+6} > 0$

Luego, dom f = $(-\infty,-3) \cup [4,+\infty)$

b) Calculamos la función inversa, para ello despejamos x en la expresión de la función:

$$y = \sqrt{\frac{x-4}{2x+6}} \to y^2 = \frac{x-4}{2x+6} \to y^2(2x+6) = x-4 \to 2y^2x + 6y^2 = x-4 \to 2y^2x - x = -6y^2 - 4$$

$$x - 2y^2x = 6y^2 + 4 \to x(1-2y^2) = 6y^2 + 4 \to x = \frac{6y^2+4}{1-2y^2}$$

Por tanto, la función inversa es: $f^{-1}(x) = \frac{6x^2+4}{1-2x^2}$

13 Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ x+3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

a) Calcular $f \circ g$ y su dominio.

b) Determinar los valores: $(f \circ g)(1)$, $(f \circ g)(-3)$, $(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right)$, $(g \circ f)(3)$

SOLUCIÓN:

a) $$(f \circ g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x < 0 \\ f(x^2) & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2+3 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Dom $(f \circ g) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

b) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = 1+3 = 4$

$(f \circ g)(-3) = f(g(-3)) = f(-3) = -6 + 1 = -5$

$(g \circ f)\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left[f\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = g(0)$ no definido

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(6) = 6^2 = 36$

14 Dada las funciones definida por:

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-4} \qquad g(x) = \frac{x-5}{x^2+2x}$$

Hallar los dominios de f, g, f + g, f · g y f/g, sin realizar las operaciones con las funciones.

SOLUCIÓN:

- Dom f = $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \ne 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

  $x^2 - 4 = 0$ si x = -2, x = 2

- Dom g = $\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 2x \ne 0\} = \mathbb{R} - \{0, 2\}$

  $x^2 + 2x = 0$ si x = -2, x = 0

- Dom (f + g) = Dom (f · g) = Dom f $\cap$ Dom g = $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

- Dom (f/g) = Dom f $\cap$ Dom g $-$ $\{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$ = $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2, 5\}$

  $g(x) = 0$ si $x - 5 = 0 \rightarrow x = 5$

15	Dada las funciones definida por: $f(x) = \frac{x-1}{x+4}$ $g(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ $h(x) = \sqrt{4-x^2}$ determinar: a) Dom (f + g) , dom (g · h) , dom (h / f), sin calcular la expresión analítica de dichas funciones. b) Expresión analítica de las funciones $f \circ g$, $g \circ h$. c) Expresión analítica de las funciones inversas de f y h.

SOLUCIÓN:

a) Calculamos los dominios de las tres funciones f, g y h:

- Dom f = $\{x \in \mathbb{R} / x-4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{4\}$
- Dom g = $\{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2,2\}$
- Dom h = $\{x \in \mathbb{R} / 4-x^2 \geq 0\} = [-2,2]$
- Dom (f + g) = Dom f $\cap$ Dom g = $\mathbb{R} - \{-2,2,4\}$
- Dom (g · h) = Dom g $\cap$ Dom h = (-2,2)
- Dom (h/f) = Dom h $\cap$ Dom f $-$ $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\}$ = $[-2,2] - \{1\}$

b) $$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{2x}{x^2-4}\right) = \frac{\frac{2x}{x^2-4} - 1}{\frac{2x}{x^2-4} + 4} = \frac{2x - x^2 + 4}{2x + 4x^2 - 16}$$

$$(g \circ h)(x) = g\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{2\sqrt{4-x^2}}{4-x^2-4} = -\frac{2\sqrt{4-x^2}}{x^2}$$

c) Inversa de f:

$$y = \frac{x-1}{x+4} \rightarrow yx + 4y = x - 1 \rightarrow 4y + 1 = x - yx \rightarrow x(1-y) = 1 + 4y \rightarrow x = \frac{1+4y}{1-y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1+4x}{1-x}$$

Inversa de h:

$$y = \sqrt{4-x^2} \rightarrow y^2 = 4 - x^2 \rightarrow x^2 = 4 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{4-y^2}$$

$$h^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$$

16	Dadas las funciones: $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ $\qquad g(x) = \sqrt{9-x^2}$ $\qquad h(x) = x^2 - 9$ a) Calcular el dominio de las funciones f + g, h/f , g/h. b) Calcular $f \circ g$, $h \circ f$, $f \circ h$. c) Hallar las funciones inversas de f, g y h.

SOLUCIÓN:

a) Determinamos los dominios de las tres funciones:

Dom f = $\mathbb{R} - \{3\}$ $\qquad$ Dom g = [-3,3] $\qquad$ Dom h = $\mathbb{R}$

- Dom (f + g) = Dom f $\cap$ Dom g = [-3, 3)
- Dom (h/f) = Dom h $\cap$ Dom f – $\{x \in \mathbb{R} / f(x) = 0\} = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

  f(x) = 0 si x + 1 = 0 $\rightarrow$ x = -1
- Dom (g/h) = Dom g $\cap$ Dom h – $\{x \in \mathbb{R} / h(x) = 0\}$ = (-3,3)

  h(x) = 0 si $9 - x^2 = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 3$

b) $(h \circ f)(x) = h\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right) = \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2 - 9 = \dfrac{x^2 + 2x + 1 - 9(x^2 - 6x + 9)}{x^2 - 6x + 9} = \dfrac{-8x^2 + 56x - 80}{x^2 - 6x + 9}$

$(h \circ g)(x) = h\left(\sqrt{9 - x^2}\right) = 9 - x^2 - 9 = -x^2$

$(f \circ h)(x) = f(x^2 - 9) = \dfrac{x^2 - 9 + 1}{x^2 - 9 - 3} = \dfrac{x^2 - 8}{x^2 - 12}$

c) Inversa de f:

$y = \dfrac{x+1}{x-3} \rightarrow yx - 3y = x + 1 \rightarrow yx - x = 1 + 3y \rightarrow x(y-1) = 1 + 3y \rightarrow x = \dfrac{1+3y}{y-1} \rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{1+3x}{x-1}$

Inversa de g:

$y = \sqrt{9 - x^2} \rightarrow y^2 = 9 - x^2 \rightarrow x^2 = 9 - y^2 \rightarrow x = \sqrt{9 - y^2} \rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{9 - x^2}$

Inversa de h:

$y = x^2 - 9 \rightarrow y + 9 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y + 9} \rightarrow h^{-1}(x) = \sqrt{x + 9}$

17	Calcular el dominio, ceros y simetrías de las siguientes funciones: a) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-1}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$ c) $f(x)=L(x^2+1)$

SOLUCIÓN:

a) $f(x)=\frac{x-2}{x^2-1}$

Dominio: Al ser una función racional su dominio será el conjunto de números reales salvo los puntos que anulan el denominador. Por tanto:

$$Dom(f)=R-\{-1,+1\}$$

Ceros: Para calcular los ceros de la función igualamos a cero:

$$\mathrm{f(x)=0} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{x-2}}{\mathrm{x^2-1}}=0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x-2=0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x=2}$$

Simetría: calculamos $f(-x)$ para compararlo con $f(x)$

$$f(-x)=\frac{(-x)-2}{(-x)^2-1}=\frac{-x-2}{x^2-1}=-\frac{x+2}{x^2-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(-x)\neq f(x) \\ f(-x)\neq -f(x) \end{cases}$$

Por tanto, no tiene simetría respecto del eje *OY* ni respecto del origen.

b) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}$

Dominio: $Dom(f)=\{x\in R / x^2-6x+8\geq 0\}$ Veamos cuales son estos puntos:

$$\mathrm{x^2-6x+8\geq 0} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{(x-2)(x-4)\geq 0} \quad \Rightarrow \mathrm{x\geq 4, x\leq 2}$$

Por tanto, $Dom(f)=(-\infty,2]\cup[4,+\infty)$

Ceros:

$$f(x)=\sqrt{x^2-6x+8}=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-6x+8=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=2 \\ x=4 \end{cases}$$

Simetría: calculamos $f(-x)$ para compararlo con $f(x)$

$$\mathrm{f(-x)=\sqrt{(-x)^2-6(-x)+8}=\sqrt{(-x)^2+6x+8}\neq f(x)} \longrightarrow \text{No es simétrica}$$

c) $f(x)=L(x^2+1)$

Dominio: el dominio de la función logarítmica es el conjunto de puntos que hacen el argumento estrictamente positivo. Entonces:

$Dom(f)=\{x\in\mathbb{R} / x^2+1>0\}=\mathbb{R}$ puesto que x^2+1 siempre es estrictamente mayor que cero.

Ceros: $f(x)=0 \quad \Rightarrow \quad L(x^2+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+1=1 \quad \Rightarrow \quad x=0$

Simetría:

$$f(-x)=L((-x)^2+1)=L(x^2+1)=f(x)$$

Por tanto, es una función par y es simétrica respecto del eje *OY*.