

Halla el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que el producto de las pendientes de las rectas trazadas desde P a los puntos: $A (-2, 1)$ y $B (2, -1)$ sea igual a 1. ¿Qué figura obtienes? Representála.

Si P es el punto de coordenadas (x, y) de los datos del enunciado obtenemos:

La pendiente de la recta que une P con A es: $\frac{y-1}{x+2}$

La pendiente de la recta que une P con B es: $\frac{y+1}{x-2}$

El producto de las pendientes ha de ser igual a 1, es decir: $\frac{y-1}{x+2} \cdot \frac{y+1}{x-2} = 1$

Efectuando las operaciones en la ecuación que hemos planteado,

$$\frac{y^2-1}{x^2-4} = 1 \rightarrow y^2-1 = x^2-4 \rightarrow x^2-y^2-4+1=0 \rightarrow x^2-y^2=3 \rightarrow \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1$$

Es una hipérbola de eje horizontal, en la que $a = b = \sqrt{3}$

Calculemos el valor de c , en una hipérbola $c^2 = a^2 + b^2$

$$c^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 3+3=6 \rightarrow c = \sqrt{6}$$

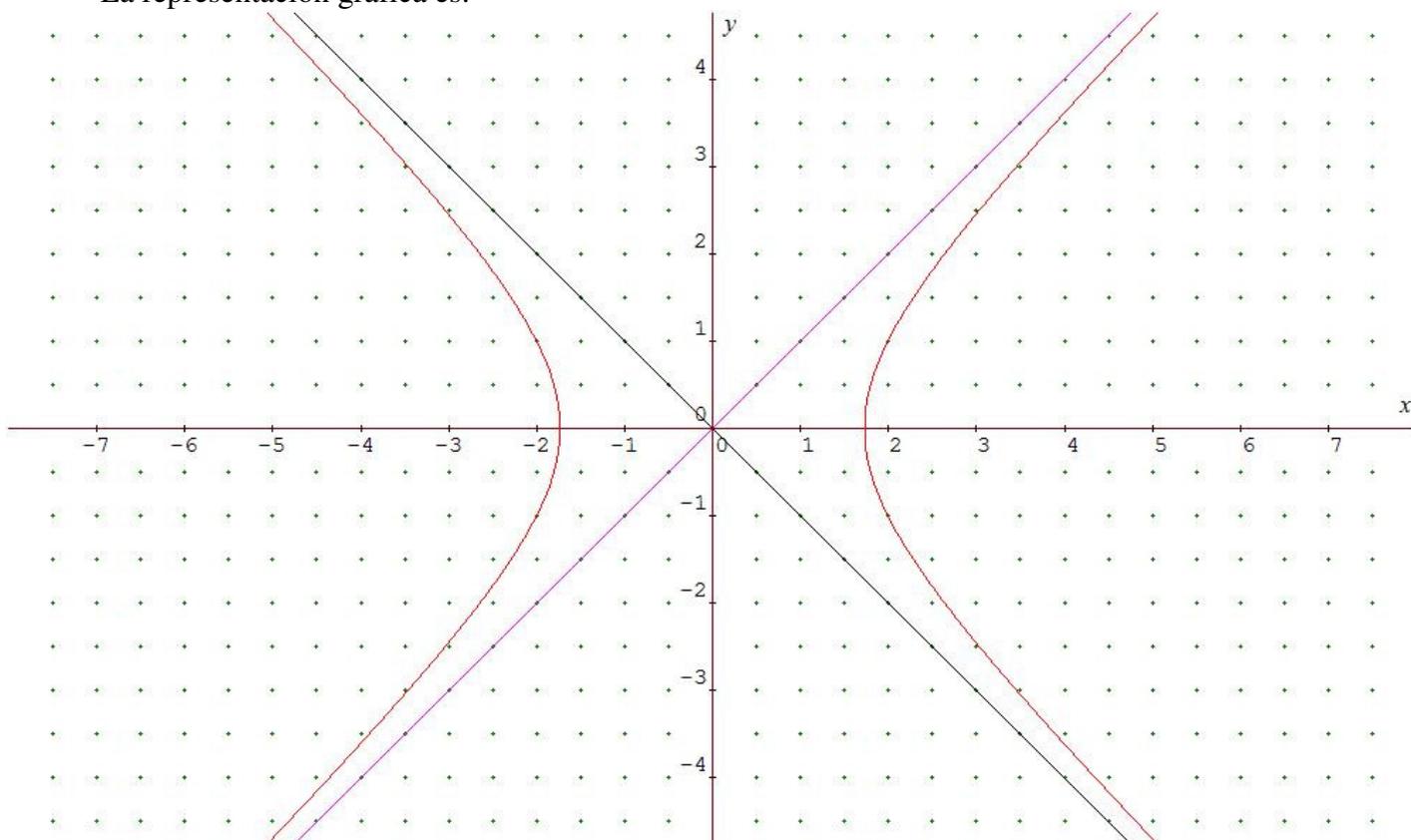
Los focos son los puntos $F'(-\sqrt{6}, 0)$ y $F(\sqrt{6}, 0)$.

La pendiente de las asíntotas será $m = \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \pm 1$

Por lo tanto las asíntotas son las rectas $y = x$ e $y = -x$

La excentricidad es: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \approx 1.41$

La representación gráfica es:



Una circunferencia del plano pasa por los puntos (1, 3) y (3, 5) y tiene el centro sobre la recta $x + 2y = 3$. Halla su centro y su radio.

Si el centro de la circunferencia $C(x,y)$ está sobre la recta $x + 2y = 3 \rightarrow x = 3 - 2y$; entonces es de la forma $C(3 - 2y, y)$.

• La distancia del centro a los dos puntos dados, $A(1, 3)$ y $B(3, 5)$ es la misma. Además, esta distancia es el radio, r , de la circunferencia:

$$r = \text{dist}(C, A) = \text{dist}(C, B)$$

$$d(C, A) = \sqrt{(3-2y-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(2-2y)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{4-8y+4y^2 + y^2 - 6y + 9} = \sqrt{5y^2 - 14y + 13}$$

$$d(C, B) = \sqrt{(3-2y-3)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(-2y)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{4y^2 + y^2 - 10y + 25} = \sqrt{5y^2 - 10y + 25}$$

Como las dos distancias deben ser iguales,

$$\sqrt{5y^2 - 14y + 13} = \sqrt{5y^2 - 10y + 25}$$

$$5y^2 - 14y + 13 = 5y^2 - 10y + 25$$

$$-14y + 10y = 25 - 13$$

$$-4y = 12$$

$$y = -3 \rightarrow x = 3 - 2(-3) = 3 + 6 = 9$$

El centro de la circunferencia es $C(9, -3)$.

El radio es,

$$r = \sqrt{5y^2 - 14y + 13} = \sqrt{5(-3)^2 - 14(-3) + 13} = \sqrt{45 + 42 + 13} = \sqrt{100} = 10$$

Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto (3, 1) y tiene sus focos en (4, 0) y (-4, 0).

Como los focos de la elipse están sobre el eje OX y el punto (0,0), que es el punto medio de los dos focos, es el centro de la elipse, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como la elipse pasa por (3, 1)

$$\frac{3^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$$

Tenemos una ecuación pero dos incógnitas, a y b , necesitamos otra ecuación.

En una elipse se cumple $a^2 = b^2 + c^2$ y sabemos que $c = 4 \rightarrow a^2 = b^2 + 16$

Por lo tanto el sistema a resolver será:

$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{9b^2 + a^2}{a^2b^2} = 1 \\ a^2 = b^2 + 16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9b^2 + a^2 = a^2b^2 \\ a^2 = b^2 + 16 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de a^2 en la primera ecuación: $9b^2 + b^2 + 16 = (b^2 + 16)b^2$

$$10b^2 + 16 = b^4 + 16b^2$$

$b^4 + 6b^2 - 16 = 0$ que es una ecuación bicuadrada

$$b^2 = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-16)}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2} = \begin{cases} \frac{-6+10}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-6-10}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \text{ No válida} \end{cases}$$

Como $a^2 = b^2 + 16 \rightarrow a^2 = 2 + 16 \rightarrow a^2 = 18$

La ecuación de la elipse será: $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$

Halla la ecuación de la hipérbola que tiene por focos los puntos $F(-3, 0)$ y $F'(3, 0)$ y que pasa por el punto $P(8, 5\sqrt{3})$.

Este ejercicio podríamos resolverlo siguiendo un proceso similar al utilizado en el ejercicio 34, lo haremos de otra forma.

Como los focos de la hipérbola están sobre el eje OX y el punto $(0,0)$ es el punto medio de los dos focos, la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Hallamos la constante de la hipérbola: $|dist(P, F) - dist(P, F')| = 2a$

$$d(P, F) = \sqrt{(8+3)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{121 + 25 \cdot 3} = \sqrt{196} = 14$$

$$d(P, F') = \sqrt{(8-3)^2 + (5\sqrt{3})^2} = \sqrt{25 + 25 \cdot 3} = \sqrt{100} = 10$$

$$\text{Por lo que } |14-10| = 2a \rightarrow 4 = 2a \rightarrow a = 2$$

De las coordenadas de los focos sabemos que $c = 3$.

En una hipérbola se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$, por lo tanto $3^2 = 2^2 + b^2$

$$9 = 4 + b^2, \rightarrow b^2 = 5$$

La ecuación es:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

La parábola $y^2 - 4y - 6x - 5 = 0$ tiene por foco el punto $(0, 2)$. Encuentra su directriz.

Arreglamos la ecuación de la parábola para ponerla en su forma reducida,

$$y^2 - 4y = 6x + 5 \rightarrow y^2 - 4y + 4 = 6x + 5 + 4 \rightarrow (y - 2)^2 = 6x + 9$$

$$(y - 2)^2 = 6\left(x + \frac{9}{6}\right) \rightarrow (y - 2)^2 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right) \rightarrow \text{El vértice de la parábola es } V\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$$

El foco y el vértice de la parábola tienen la misma ordenada, luego la directriz será una recta vertical, $x = a$, de forma que

$$\frac{x_F + a}{2} = x_v \rightarrow \frac{0 + a}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow \frac{a}{2} = \frac{-3}{2} \rightarrow a = -3$$

La directriz es $x = -3$.

Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

c) $9x^2 + 9y^2 = 25$

d) $x^2 - 4y^2 = 16$

e) $y^2 = 14x$

f) $25x^2 + 144y^2 = 900$

a) $4x^2 + 9y^2 = 36$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 36,

$$\frac{4x^2 + 9y^2}{36} = \frac{36}{36} \rightarrow \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Es la ecuación reducida de una elipse de eje mayor horizontal.

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3; \quad b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

En una elipse se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, en este caso: $9 = 4 + c^2 \rightarrow c^2 = 5 \rightarrow c = \sqrt{5}$

Los elementos de esta elipse son:

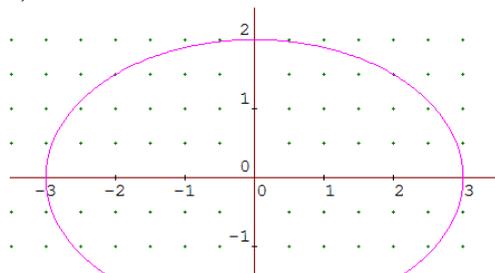
Centro $(0, 0)$

Focos $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$

Semieje mayor $a = 3$

Semieje menor $b = 2$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} = 0.745$$



b) $16x^2 - 9y^2 = 144$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 144,

$$\frac{16x^2 - 9y^2}{144} = \frac{144}{144} \rightarrow \frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Es la ecuación reducida de una hipérbola de eje horizontal.

$$a^2 = 9 \rightarrow a = 3; \quad b^2 = 16 \rightarrow b = 4$$

En una hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$, en este caso: $c^2 = 9 + 16 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

Los elementos de esta hipérbola son:

Centro $(0, 0)$

Focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$

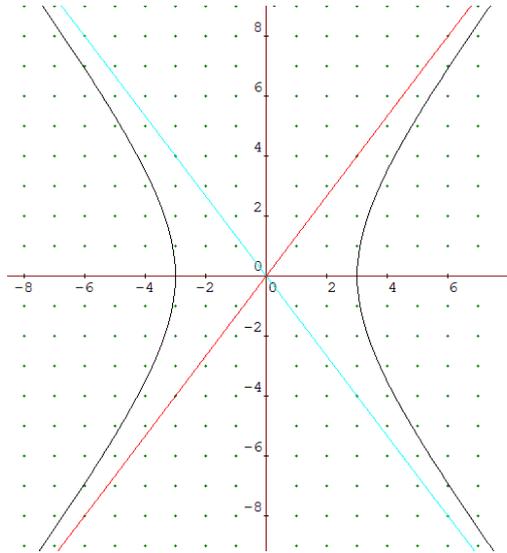
Semieje mayor $a = 3$

Pendiente de las asíntotas $\pm \frac{4}{3}$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \frac{4}{3}x \quad e \quad y = -\frac{4}{3}x$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} = 1.667$

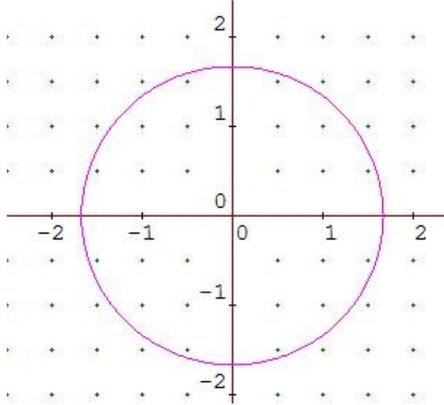


c) $9x^2 + 9y^2 = 25$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 9,

$$\frac{9x^2 + 9y^2}{9} = \frac{25}{9} \rightarrow \frac{9x^2}{9} + \frac{9y^2}{9} = \frac{25}{9} \rightarrow x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$$

Es la ecuación de una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$



d) $x^2 - 4y^2 = 16$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 16,

$$\frac{x^2 - 4y^2}{16} = \frac{16}{16} \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{4y^2}{16} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Es la ecuación reducida de una hipérbola de eje horizontal.

$$a^2 = 16 \rightarrow a = 4; \quad b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

En una hipérbola se cumple $c^2 = a^2 + b^2$, en este caso: $c^2 = 16 + 4 \rightarrow c^2 = 20 \rightarrow c = \sqrt{20}$

Los elementos de esta hipérbola son:

Centro $(0, 0)$

Focos $(-\sqrt{20}, 0)$ y $(\sqrt{20}, 0)$

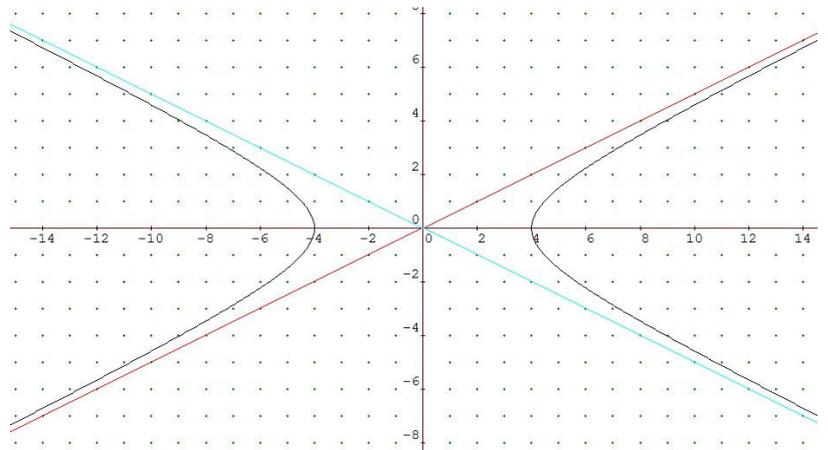
Semieje mayor $a = 4$

Pendiente de las asíntotas $\pm \frac{2}{4} = \pm \frac{1}{2}$

Ecuaciones de las asíntotas:

$$y = \frac{1}{2}x \quad e \quad y = -\frac{1}{2}x$$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{20}}{4} = 1.118$

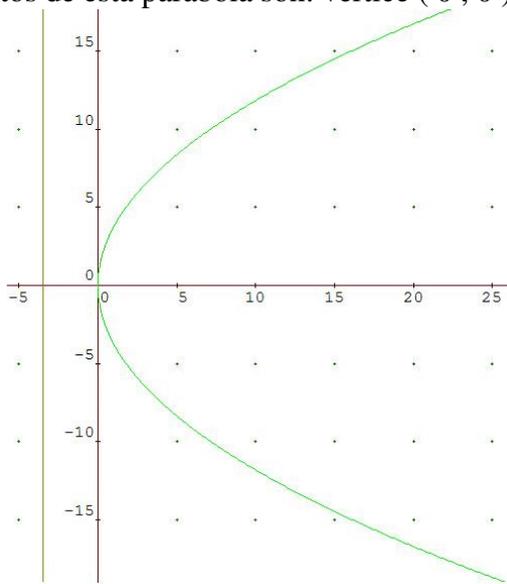


e) $y^2 = 14x$

Es la ecuación de una parábola,

$$2p = 14 \rightarrow p = 7 \rightarrow \frac{p}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Los elementos de esta parábola son: vértice $(0, 0)$, foco $(3.5, 0)$ y directriz $x = -3.5$



f) $25x^2 + 144y^2 = 900$

Dividimos ambos miembros de la igualdad por 900,

$$\frac{25x^2 + 144y^2}{900} = \frac{900}{900} \rightarrow \frac{25x^2}{900} + \frac{144y^2}{900} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{4y^2}{25} = 1 \rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1$$

Es la ecuación reducida de una elipse de eje mayor horizontal.

$$a^2 = 36 \rightarrow a = 6; \quad b^2 = \frac{25}{4} \rightarrow b = \frac{5}{2}$$

En una elipse se cumple $a^2 = b^2 + c^2$, en este caso:

$$36 = \frac{25}{4} + c^2 \rightarrow c^2 = 36 - \frac{25}{4} = \frac{144 - 25}{4} = \frac{119}{4} \rightarrow c = \frac{\sqrt{119}}{2} = 5.45$$

Los elementos de esta elipse

son:

Centro $(0, 0)$

$$\text{Focos: } \left(-\frac{\sqrt{119}}{2}, 0\right) \text{ y } \left(\frac{\sqrt{119}}{2}, 0\right)$$

Semieje mayor $a = 6$

Semieje menor $b = \frac{5}{2}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{119}}{12} = 0.909$$

