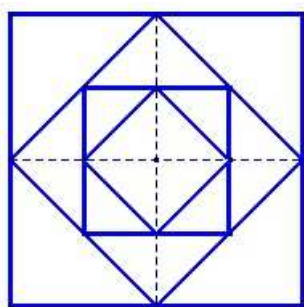


Ejercicio 1.

En un cuadrado cuyo lado es a , se unen los puntos medios de los cuatro lados, formando otro cuadrado cuyos puntos medios volvemos a unir, y así sucesivamente. Encontrar la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.



Si el primer cuadrado tiene lado $a \Rightarrow$ su área $A_1 = a^2$

Es claro que el lado del segundo cuadrado es $\frac{a}{\sqrt{2}}$ pero eso no es necesario para

darse cuenta que su área es $A_2 = \frac{a^2}{2}$. Siguiendo este proceso, obtenemos que la

sucesión de las áreas es: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \Rightarrow a^2, \frac{a^2}{2}, \frac{a^2}{4}, \dots, \frac{a^2}{2^{n-1}}$ una

progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2} \Rightarrow$ la suma de todos los términos de una

sucesión de este tipo es: $S = \frac{A_1}{1-r} = \frac{a^2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{a^2}{\frac{1}{2}} = 2a^2$

Ejercicio 2.

Calcula a y b para que el polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 + ax + b$ sea divisible por $(x^2 - 4)$.

$x^2 - 4 = (x+2)(x-2) \Rightarrow$ para que $P(x)$ sea divisible por $(x^2 - 4)$, debe serlo por $(x+2)$ y por $(x-2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(-2) = (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 + a \cdot (-2) + b \\ P(2) = (2)^3 + 6 \cdot (2)^2 + a \cdot (2) + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 - 2a + b = 0 \\ 32 + 2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -24 \end{cases}$$

Ejercicio 3.

Calcula el valor de la siguiente expresión $\left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2 &= \frac{(1+\sqrt{6})^2}{(1-\sqrt{6})^2} - \frac{(1-\sqrt{6})^2}{(1+\sqrt{6})^2} = \frac{7+2\sqrt{6}}{7-2\sqrt{6}} - \frac{7-2\sqrt{6}}{7+2\sqrt{6}} = \frac{(7+2\sqrt{6})^2 - (7-2\sqrt{6})^2}{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})} = \\ &= \frac{(49+24+28\sqrt{6}) - (49+24-28\sqrt{6})}{49-24} = \frac{56\sqrt{6}}{25} \end{aligned}$$

También:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right)^2 &= \left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}} + \frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right) \left(\frac{1+\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}} - \frac{1-\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{(1+\sqrt{6})^2 + (1-\sqrt{6})^2}{(1-\sqrt{6})(1+\sqrt{6})}\right) \left(\frac{(1+\sqrt{6})^2 - (1-\sqrt{6})^2}{(1-\sqrt{6})(1+\sqrt{6})}\right) = \\ &= \left(\frac{7+2\sqrt{6}+7-2\sqrt{6}}{1-6}\right) \left(\frac{7+2\sqrt{6}-7+2\sqrt{6}}{1-6}\right) = \left(\frac{14}{-5}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{6}}{-5}\right) = \frac{56\sqrt{6}}{25} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.

Halla el valor de la siguiente expresión: $\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{75} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{2}$

$$\log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}} = \log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[4]{3^3}} = \log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{3^8}}{\sqrt[4]{3^9}} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[12]{\frac{3^6 \cdot 3^8}{3^9}} = \log_{\sqrt{3}} \sqrt[12]{3^5} = \log_{\sqrt{3}} 3^{\frac{5}{12}} = \log_{\sqrt{3}} \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6}$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{75} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{3 \cdot 5^2} - \sqrt{3^3} + 2\sqrt{3 \cdot 2^2}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} \frac{6\sqrt{3}}{2} = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Entonces: } \log_{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}} - \log_{\frac{1}{3}} \frac{\sqrt{75} - \sqrt{27} + 2\sqrt{12}}{2} = \frac{5}{6} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{6} + \frac{9}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Ejercicio 5.

Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} \log x + \log(x+y) = 1 + \log 3 \\ \log y + \log(x+y) = \log 2 + \log 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log x + \log(x+y) = 1 + \log 3 \\ \log y + \log(x+y) = \log 2 + \log 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log[x(x+y)] = \log 10 + \log 3 \Rightarrow \log[x(x+y)] = \log 30 \\ \log[y(x+y)] = \log(2 \cdot 3) \Rightarrow \log[y(x+y)] = \log 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+y) = 30 \\ y(x+y) = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+y) = \frac{30}{x} \\ (x+y) = \frac{6}{y} \end{cases} \Rightarrow \frac{30}{x} = \frac{6}{y} \Rightarrow x = 5y \Rightarrow y(5y+y) = 6 \Rightarrow y \cdot 6y = 6 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\cancel{y = -1 \Rightarrow x = -5} ; \boxed{y = 1 \Rightarrow x = 5}$$

Ejercicio 6.

Encuentra las soluciones de la ecuación: $|x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1| = |x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x - 4|$

$$|x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1| = |x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x - 4| \Rightarrow \begin{cases} x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 = x^4 - x^3 + 4x^2 + 2x - 4 \\ o \\ x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 = -x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0 \\ o \\ 2x^4 + 3x^2 - 5 = 0 \end{cases}$$

$$2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x+1)(x-3)(2x-1) = 0 \Rightarrow \left\{ x = -1, x = 3, x = \frac{1}{2} \right\}$$

$$2x^4 + 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x^2 = t) \quad 2t^2 + 3t - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -\frac{5}{2} \Rightarrow x^2 = -\frac{5}{2} \\ t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \{x = 1, x = -1\} \end{cases}$$

Ejercicio 7.

Efectúa las operaciones y presenta el resultado en forma de fracción irreducible.

$$a) \frac{x^2-6x+5}{x^2+5x+6} \cdot \frac{2x^2-8}{x^2-x} \cdot \frac{2x-10}{x^2+3x} = \frac{(x^2-6x+5) \cdot (2x^2-8) \cdot (x^2+3x)}{(x^2+5x+6) \cdot (x^2-x) \cdot (2x-10)} = \frac{(x-1) \cdot (x-5) \cdot 2 \cdot (x^2-4) \cdot x \cdot (x+3)}{(x+3) \cdot (x+2) \cdot x \cdot (x-1) \cdot 2 \cdot (x-5)} =$$
$$= \frac{\cancel{2x} \cdot \cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x-5)} \cdot (x-2) \cdot \cancel{(x+2)} \cdot \cancel{(x+3)}}{\cancel{2x} \cdot \cancel{(x+3)} \cdot (x+2) \cdot \cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x-5)}} = x-2$$

$$b) \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{x}{1-x^2}}{\frac{x-2x^2}{1-x}} = \frac{\frac{1-x}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2}}{\frac{x(1-2x)}{1-x}} = \frac{\frac{1-2x}{1-x^2}}{\frac{x(1-2x)}{1-x}} = \frac{(1-2x)(1-x)}{x(1-2x)(1-x^2)} = \frac{\cancel{(1-2x)} \cdot \cancel{(1-x)}}{x \cdot \cancel{(1-2x)} \cdot \cancel{(1-x)} \cdot (1+x)} = \frac{1}{x+x^2}$$

Ejercicio 8.

Calcula el valor del límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2n+1}{n+2} \right)^{7-n}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2n+1}{n+2} \right) = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+2} = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = 3 - \frac{2+0}{1+0} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2n+1}{n+2} \right)^{7-n} \rightarrow 1^\infty \text{ límite del número } e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2n+1}{n+2} \right)^{7-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 2 - \frac{2n+1}{n+2} \right)^{7-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n+4}{n+2} - \frac{2n+1}{n+2} \right)^{7-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n+2} \right)^{7-n} =$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+2}{3}} \right)^{\frac{n+2}{3} \cdot \frac{3}{n+2} \cdot (7-n)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3(7-n)}{n+2} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{21-3n}{n+2} \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{21}{n} - 3}{1 + \frac{2}{n}}} = e^{\frac{0-3}{1+0}} = e^{-3}$$

Ejercicio 9.

Resuelve la ecuación: $5^{x+2} - 10 = 3 \cdot 5^{1-x}$

$$5^{x+2} - 10 = 3 \cdot 5^{1-x} \Rightarrow 5^2 \cdot 5^x - 10 = 3 \cdot \frac{5}{5^x} \Rightarrow 25 \cdot 5^x - 10 = \frac{15}{5^x} \Rightarrow (\text{cambiamos } 5^x = t) \Rightarrow 25t - 10 = \frac{15}{t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25t^2 - 10t - 15 = 0 \Rightarrow 5t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5} = \frac{2 \pm 8}{10} = \begin{cases} t=1 \Rightarrow 3^x=1 \Rightarrow \boxed{x=0} \\ t=-\frac{3}{5} \Rightarrow 3^x = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Ejercicio 10.

Resuelve la inecuación: $\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 9} \leq -1$

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x - 9} + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 3 + x - 9}{x - 9} \leq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x - 9} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x + 2)(x - 3)}{x - 9} \leq 0$$

Ahora analizamos el signo de la fracción:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 3)$	3	$(3, 9)$	9	$(9, +\infty)$
$(x + 2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x - 3)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x - 9)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{(x + 2) \cdot (x - 3)}{x - 9}$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$

Solución: $x \in (-\infty, -2] \cup [3, 9)$