

Ejercicio 1.

Sin usar la calculadora, encuentra el valor de x en la siguiente expresión:

$$x = \log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{54}} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{5}} 0,0016$$

Solución:

$$\triangleright \log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{54}} = \log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{2 \cdot 3^3}} = \log_2 \frac{3}{3 \cdot \sqrt[3]{2}} = \log_2 \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \log_2 2^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$$

$$\triangleright \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \right) = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{7}{8}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-\frac{7}{8}} = -\frac{7}{8}$$

$$\triangleright \log_{\sqrt{5}} (0,0016) = \log_{\sqrt{5}} \frac{16}{10000} = \log_{\sqrt{5}} \frac{2^4}{2^4 \cdot 5^4} = \log_{\sqrt{5}} 5^{-4} = \log_{\sqrt{5}} \left(\sqrt{5} \right)^{-8} = -8$$

$$\log_2 \frac{3}{\sqrt[3]{54}} - \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3\sqrt{3}\sqrt{3}} + \log_{\sqrt{5}} (0,0016) = -\frac{1}{3} - \left(-\frac{7}{8} \right) + (-8) = \frac{-8 + 21 - 192}{24} = -\frac{179}{24}$$

Ejercicio 2.

Encuentra un polinomio de segundo grado, sabiendo que es divisible por $(x-3)$ y que al dividirlo por $(x+1)$ y por $(x-2)$ obtenemos de resto 8 y -7 respectivamente.

Solución:

El polinomio $p(x)$ será de la forma $p(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{cases} p(x) \text{ es divisible por } (x-3) \Rightarrow p(3) = 0 \\ \text{El resto de dividir } p(x) \text{ entre } (x+1) \text{ es } 8 \Rightarrow p(-1) = 8 \\ \text{El resto de dividir } p(x) \text{ entre } (x-2) \text{ es } -7 \Rightarrow p(2) = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p(2) = a(2)^2 + b \cdot (2) + c = -7 \\ p(-1) = a(-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 8 \\ p(3) = a(3)^2 + b \cdot (3) + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -7 \\ a - b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \cdot F_2 \\ (-1) \cdot F_3}} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -8 \\ -4 & -2 & -1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 + F_1}} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & -8 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ 8 & 4 & 0 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 4 \cdot F_1} \begin{pmatrix} 9 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 7 \\ -12 & 0 & 0 & -36 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9a + 3b + c = 0 \\ 5a + b = 7 \\ -12a = -36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 - 24 + c = 0, & c = -3 \\ 15 + b = 7, & b = -8 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{el polinomio es } p(x) = 3x^2 - 8x - 3$$

Ejercicio 3.

a) Escribe en forma de intervalo el conjunto de números que verifica la desigualdad: $\left| \frac{1-2x}{3} \right| \geq 2$

Solución:

$$\left| \frac{1-2x}{3} \right| \geq 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1-2x}{3} \geq 2 \Rightarrow 1-2x \geq 6 \Rightarrow -2x \geq 5 \Rightarrow x \leq -\frac{5}{2} \\ \frac{1-2x}{3} \leq -2 \Rightarrow 1-2x \leq -6 \Rightarrow -2x \leq -7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2} \right] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty \right)$$

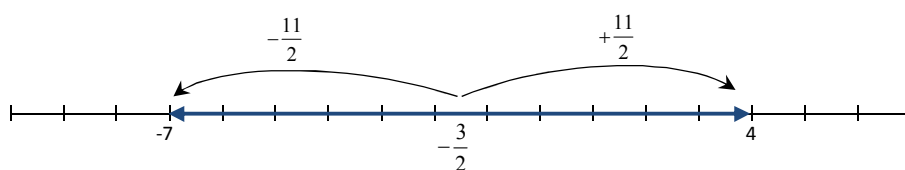
b) Escribe, usando valor absoluto, la condición que deben cumplir los puntos del intervalo $(-7, 4)$

Solución:

En el intervalo $(-7, 4)$, buscamos el centro $\equiv C = \frac{-7+4}{2} = -\frac{3}{2}$ y el radio $\equiv r = \frac{d(-7, 4)}{2} = \frac{|-7-4|}{2} = \frac{11}{2}$

Podemos considerar el intervalo $(-7, 4)$ como un entorno de centro $C = -\frac{3}{2}$ y radio $r = \frac{11}{2}$, es decir, los puntos $x \in (-7, 4)$ tienen distancia al centro más pequeña que el radio.

$$d\left(x, -\frac{3}{2}\right) < \frac{11}{2} \Rightarrow \left| x - \left(-\frac{3}{2}\right) \right| < \frac{11}{2} \Rightarrow \left| x + \frac{3}{2} \right| < \frac{11}{2}, \text{ o también, } |2x+3| < 11$$



Ejercicio 4.

Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log_2 x + \log_2 (x-1) = 1 + \log_4 (x-1)$

Solución:

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_2 (x-1) &= 1 + \log_4 (x-1) \Rightarrow \log_2 x + \log_2 (x-1) = \log_4 4 + \log_4 (x-1) \Rightarrow \log_2 [x \cdot (x-1)] = \log_4 [4 \cdot (x-1)] \Rightarrow \\ \log_2 (x^2 - x) &= \log_4 (4x-4) \Rightarrow \log_2 (x^2 - x) = \frac{\log_2 (4x-4)}{\log_2 4} \Rightarrow \log_2 (x^2 - x) = \frac{\log_2 (4x-4)}{2} \Rightarrow 2 \cdot \log_2 (x^2 - x) = \log_2 (4x-4) \\ \log_2 (x^2 - x)^2 &= \log_2 (4x-4) \Rightarrow (x^2 - x)^2 = 4x-4 \Rightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} 1 \parallel \begin{array}{rrrrr} 1 & -2 & 1 & -4 & 4 \\ & 1 & -1 & 0 & -4 \end{array} \\ 2 \parallel \begin{array}{rrrrr} 1 & -1 & 0 & -4 & 0 \\ & 2 & 2 & 4 & \end{array} \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array} \Rightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 4 = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + x + 2)$$
$$(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow \cancel{x=1} ; x=2$$

$$b) 4 \cdot \left(2^x + \frac{1}{2^{x-1}} \right) = 33$$

Solución:

$$4 \cdot \left(2^x + \frac{1}{2^{x-1}} \right) = 33 \Rightarrow 4 \cdot \left(2^x + \frac{2}{2^x} \right) = 33 \Rightarrow (2^x = y) \Rightarrow 4 \cdot \left(y + \frac{2}{y} \right) = 33 \Rightarrow 4y + \frac{8}{y} = 33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 33y + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3 \\ y = \frac{1}{4} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Ejercicio 5.

Resuelve la inecuación: $\frac{2}{3-x} \leq \frac{1}{2x+1}$

Solución:

$$\frac{2}{3-x} \leq \frac{1}{2x+1} \Rightarrow \frac{2}{3-x} - \frac{1}{2x+1} \leq 0 \Rightarrow \frac{2(2x+1)}{(3-x)(2x+1)} - \frac{3-x}{(3-x)(2x+1)} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x+2-3+x}{(3-x)(2x+1)} \leq 0$$

$$\frac{5x-1}{(3-x)(2x+1)} \leq 0$$

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$	$\frac{1}{5}$	$\left(\frac{1}{5}, 3\right)$	3	$(3, +\infty)$
$(5x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(3-x)$	+	+	+	+	+	0	-
$(2x+1)$	-	0	+	+	+	+	+
$\frac{5x-1}{(3-x) \cdot (2x+1)}$	+	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	-

$$\text{Solución: } x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right] \cup (3, +\infty)$$

Ejercicio 6.

Realiza las operaciones y obtén la fracción irreducible en la expresión:

$$\left(\frac{3x}{x-1} + \frac{4}{x+1} - \frac{2x^2+7x}{x^2-1} \right) : \left(\frac{2x-1}{x-1} - \frac{9}{x+1} \right)$$

Solución:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3x}{x-1} + \frac{4}{x+1} - \frac{2x^2+7x}{x^2-1} \right) : \left(\frac{2x-1}{x-1} - \frac{9}{x+1} \right) = \left(\frac{3x(x+1)}{x^2-1} + \frac{4(x-1)}{x^2-1} - \frac{2x^2+7x}{x^2-1} \right) : \left(\frac{(2x-1)(x+1)}{x^2-1} - \frac{9(x-1)}{x^2-1} \right) = \\ & = \left(\frac{3x^2+3x+4x-4-2x^2-7x}{x^2-1} \right) : \left(\frac{2x^2+x-1-9x+9}{x^2-1} \right) = \frac{x^2-4}{x^2-1} : \frac{2x^2-8x+8}{x^2-1} = \frac{(x^2-4)(\cancel{x^2-1})}{(2x^2-8x+8)(\cancel{x^2-1})} = \frac{x^2-4}{2(x^2-4x+4)} = \\ & = \frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)^2} = \frac{x+2}{2(x-2)} = \frac{x+2}{2x-4} \end{aligned}$$

Ejercicio 7.

Dada la sucesión 1, 6, 15, 28, 45,

- Añade tres términos y encuentra el valor del término que ocupa el lugar 100.
- Escribe la expresión de su término general a_n .
- Calcula los límites: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{2n}$.

Solución:

$$1, 6, 15, 28, 45, \text{ } \frac{66}{1+5+9+13+17}, \text{ } \frac{91}{1+5+9+13+17+21}, \text{ } \frac{120}{1+5+9+13+17+21+25}, \dots$$

Los términos de esta sucesión se obtienen como suma de términos de la progresión aritmética: 1, 5, 9, 13, ..., $(4n-3)$ por tanto el término general de la sucesión se obtendrá como la suma de "n" términos de la progresión:

$$a_n = \frac{(1+4n-3) \cdot n}{2} \Rightarrow a_n = \frac{(4n-2) \cdot n}{2} \Rightarrow a_n = 2n^2 - n \text{ y } a_{100} = 2 \cdot 100^2 - 100 \Rightarrow a_{100} = 19900$$

$$a_{n+1} = 2(n+1)^2 - (n+1) \Rightarrow a_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2}}{\frac{2n^2 - n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{2+0+0}{2-0} = 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 - n} \right)^{2n} = (\text{indet. } 1^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n^2 + 3n + 1}{2n^2 - n} - 1 \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4n + 1}{2n^2 - n} \right)^{2n} = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n^2 - n}{4n + 1}} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n^2 - n}{4n + 1} \cdot \frac{4n + 1}{2n^2 - n}} \right)^{2n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n + 1}{2n^2 - n} \cdot 2n \right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^2 + 2n}{2n^2 - n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{2}{n}}{2 - \frac{1}{n}}} = e^{\frac{8}{2}} = e^4
\end{aligned}$$

Ejercicio 8.

Una progresión geométrica tiene razón r , con $|r| < 1$. Si al segundo término le sumamos $\frac{4}{3}$ obtenemos el primero y, además, la suma de todos sus términos es 3. Escribe los cinco primeros términos de la progresión.

Solución:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a_1 = a_2 + \frac{4}{3} \\ \frac{a_1}{1-r} = 3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_1 \cdot r + \frac{4}{3} \\ a_1 = 3 - 3r \end{cases} \Rightarrow 3 - 3r = (3 - 3r) \cdot r + \frac{4}{3} \Rightarrow 9 - 9r = 9r - 9r^2 + 4 \Rightarrow 9r^2 - 18r + 5 = 0 \\
\Rightarrow &\begin{cases} r = \frac{5}{3} \\ r = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ puesto que } |r| < 1 \\
&\Rightarrow r = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = 3 - 3 \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = 2
\end{aligned}$$

Los primeros términos de la progresión son : $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \frac{2}{81}, \dots$