

Funciones a trozos

Representa las funciones cuyas expresiones analíticas son:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } y &= \begin{cases} -2 & \text{si } x < -1 \\ x+1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{b) } y &= \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ x-6 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} & \text{c) } y &= \begin{cases} \frac{x-1}{2} & \text{si } x \leq 3 \\ -1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -2x+7 & \text{si } 2 < x < 6 \end{cases} \\
 \text{d) } y &= \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{si } x < 1 \\ 5x-1 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases} & \text{e) } y &= \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq -1 \\ 2x+4 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 6 & \text{si } x > 1 \end{cases} \\
 \text{f) } y &= \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x < -1 \\ x^2-1 & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} & \text{g) } y &= \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{3}(4x-4) & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ x^2-4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

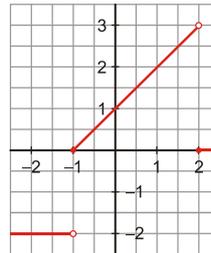
Solución:

a)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

| | | | | | | | | |
|---|-----------|----|----|----|---|---|---|-----------|
| X | $-\infty$ | -2 | -1 | -1 | 2 | 2 | 3 | $+\infty$ |
| Y | -2 | -2 | -2 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 |

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

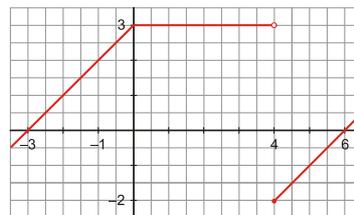


b)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

| | | | | | | | | |
|---|-----------|----|---|---|---|----|----|-----------|
| X | $-\infty$ | -1 | 0 | 0 | 4 | 4 | 5 | $+\infty$ |
| Y | $-\infty$ | 2 | 3 | 3 | 3 | -2 | -1 | $+\infty$ |

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

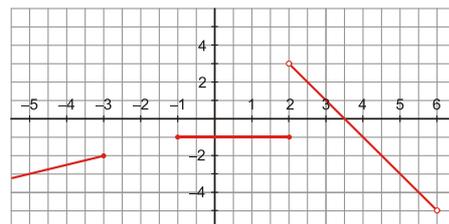


c)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

| | | | | | | | |
|---|-----------|----|----|----|----|---|----|
| X | $-\infty$ | -5 | -3 | 0 | 2 | 2 | 6 |
| Y | $-\infty$ | -3 | -2 | -1 | -1 | 3 | -5 |

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

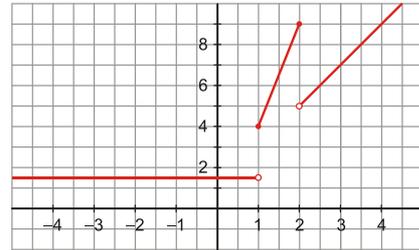


d)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

| | | | | | | | | |
|---|-----------|---|---|---|---|---|---|-----------|
| X | $-\infty$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | $+\infty$ |
| Y | 1 | 1 | 1 | 4 | 9 | 5 | 7 | $+\infty$ |

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

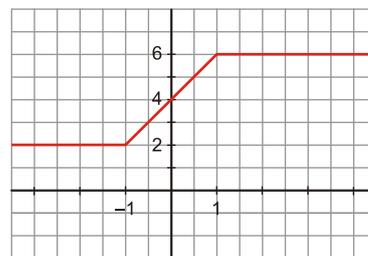


e)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

| | | | | | | | | |
|---|-----------|----|----|----|---|---|---|-----------|
| X | $-\infty$ | -2 | -1 | -1 | 1 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| Y | 2 | 2 | 2 | 2 | 6 | 6 | 6 | $+\infty$ |

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

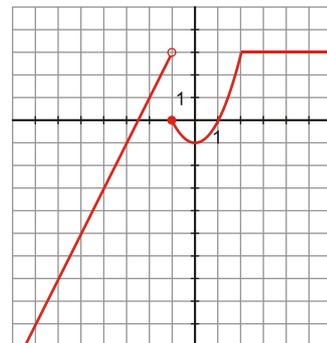


f)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

| | | | | | | | | | | | |
|---|-----------|----|----|----|------|---|---|---|---|---|-----------|
| X | $-\infty$ | -2 | -1 | -1 | -1/2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | $+\infty$ |
| Y | $-\infty$ | 1 | 3 | 0 | -3/4 | | 0 | 3 | 3 | 3 | 3 |

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

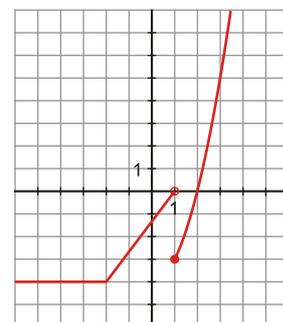


g)

- Calculamos la tabla de valores en los tres trozos:

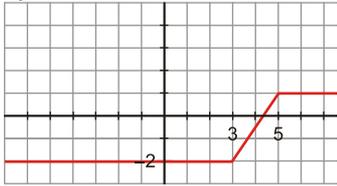
| | | | | | | | | |
|---|-----------|----|----|----|---|----|---|-----------|
| X | $-\infty$ | -3 | -2 | -2 | 1 | 1 | 2 | $+\infty$ |
| Y | -4 | -4 | -4 | -4 | 0 | -3 | 0 | $+\infty$ |

- Representamos los tres trozos en los mismos ejes:

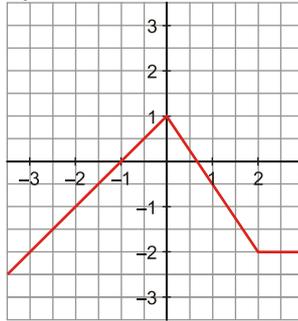


Halla las expresiones analíticas de las funciones cuyas gráficas son las siguientes:

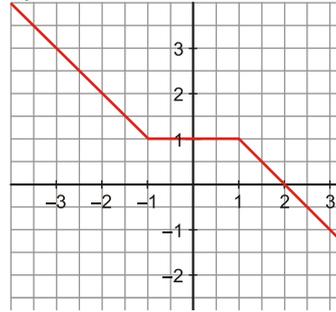
a)



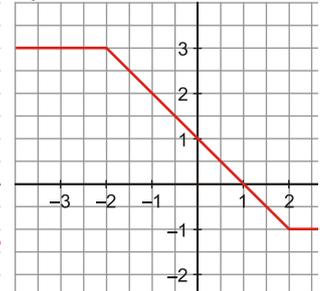
b)



c)



d)



Solución:

a)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de rectas que forman la función:

— Para $x < 3$, la recta es $y = -2$.

— Para $3 \leq x \leq 5$, la recta pasa por $(3, -2)$ y $(5, 1)$:

$$m = \frac{3}{2} \rightarrow y - 1 = \frac{3}{2}(x - 5) \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} + 1 \rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{13}{2}$$

— Para $x > 5$, la recta es $y = 1$.

- Así pues, la expresión analítica de esa función es: $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ \frac{3}{2}x - \frac{13}{2} & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{si } x > 5 \end{cases}$

b)

- De cada tramo de la recta, buscamos la ecuación:

— Para $x < 0$, la recta pasa por $(-1, 0)$ y $(-3, -2)$: $m = \frac{-2}{-2} = 1 \rightarrow y = x + 1$

— Si $0 \leq x \leq 2$, la recta pasa por $(0, 1)$ y $(2, -2)$: $m = \frac{-3}{2} \rightarrow y - 1 = -\frac{3}{2}x \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 1$

— Para $x > 2$, la recta es $y = -2$.

- La expresión analítica de la función es: $y = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0 \\ -\frac{3}{2}x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

c)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de recta que forman la función:

— Para $x < -1$, la recta pasa por los puntos $(-2, 2)$ y $(-3, 3)$: $m = -1 \rightarrow y = -x$

— Para $-1 \leq x < 1$, la recta es $y = 1$.

— Para $x \geq 1$, la recta pasa por $(1, 1)$ y $(2, 0)$: $m = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow y = -1(x - 2) \rightarrow y = -x + 2$

- La expresión analítica pedida es: $y = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ -x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

d)

- Buscamos la ecuación de cada uno de los tramos de rectas observando que hay dos que son constantes:

— Si $x < -2$, la recta es $y = 3$.

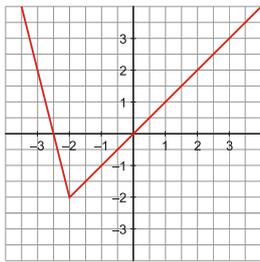
— Si $x \geq 2$, la recta es $y = -1$.

— Si $-2 \leq x < 2$, la recta pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(0, 1)$:

$$m = \frac{1}{-1} = -1 \rightarrow y - 1 = -x \rightarrow y = -x + 1$$

- La expresión analítica de la función es: $y = \begin{cases} 3 & \text{si } x < -2 \\ -x + 1 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Observa la gráfica de la función f , completa la siguiente tabla de valores y halla su expresión analítica:



| | | | | | | |
|-----|----|----------------|----|---|---|---|
| x | -3 | $-\frac{5}{2}$ | -1 | 0 | 1 | 3 |
| y | | | | | | |

Solución:

- Completamos la tabla observando la gráfica:

| | | | | | | |
|-----|----|----------------|----|---|---|---|
| x | -3 | $-\frac{5}{2}$ | -1 | 0 | 1 | 3 |
| y | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 3 |

- Para hallar la expresión analítica de la función f , buscamos la ecuación de cada tramo de recta:

— Si $x < -2$, la recta pasa por $(-3, 2)$ y $(-\frac{5}{2}, 0)$:

$$m = \frac{2}{-\frac{1}{2}} = -4 \rightarrow y = -4\left(x + \frac{5}{2}\right) \rightarrow y = -4x - 10$$

— Si $x \geq -2$, la recta pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$: $m = 1 \rightarrow y = x$

- La expresión analítica de la función f es: $y = \begin{cases} -4x - 10 & \text{si } x < -2 \\ x & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

Funciones de proporcionalidad inversa

Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = \frac{-3}{x+4}$

b) $y = \frac{-1}{x-3} - 2$

c) $y = \frac{-x+7}{x-5}$

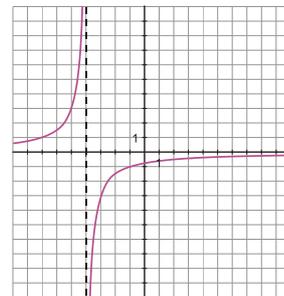
Solución:

a) Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{-4\}$

Tabla de valores

| | | | | | | | | |
|-----|-----------|----|----|-----------|-----------|----|----|-----------|
| X | $-\infty$ | -7 | -5 | -4^- | -4^+ | -3 | -1 | $+\infty$ |
| Y | 0 | 1 | 3 | $+\infty$ | $-\infty$ | -3 | -1 | 0 |

Las asíntotas son la recta $y = 0$ y la recta $x = -4$.



b) Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{3\}$

| | | | | | | | | |
|-----|-----------|------|----|-----------|-----------|----|------|-----------|
| X | $-\infty$ | 1 | 2 | 3^- | 3^+ | 4 | 5 | $+\infty$ |
| Y | -2 | -1,5 | -1 | $+\infty$ | $-\infty$ | -3 | -2,5 | -2 |

Las asíntotas son las rectas $x = 3$ e $y = -2$.

