

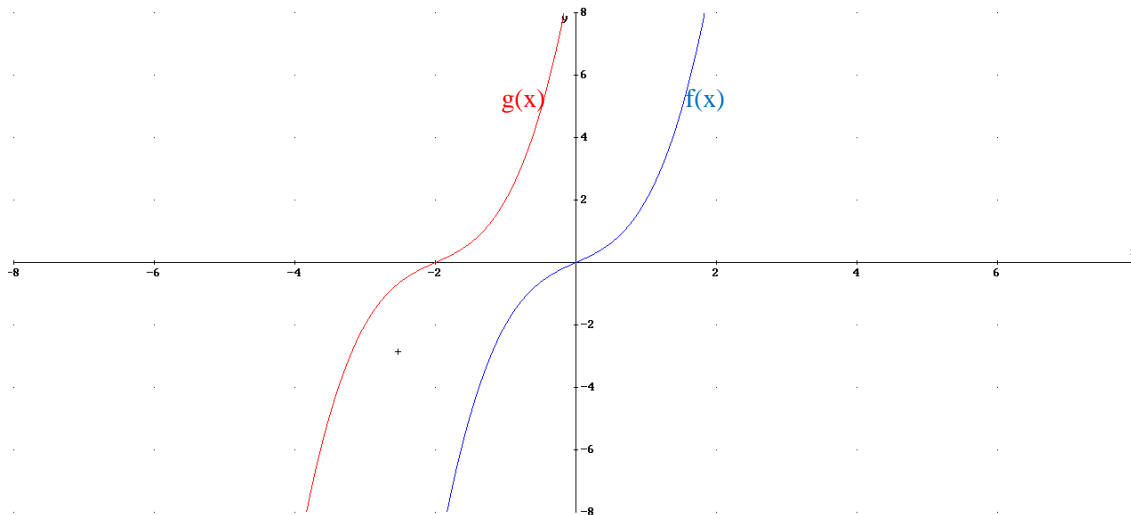
Tema 6. Funciones (II). Recta, parábola, hipérbola, exponenciales y logaritmos.

1.	Traslados de las gráficas horizontales y verticales.....	2
2.	Funciones lineales. La recta	3
3.	Función parabólica	5
3.1.	Introducción. Lugar geométrico.....	5
3.2	La parábola como función.....	6
3.2.1	Función parabólica del tipo $y=ax^2$	6
3.2.2	Función parabólica del tipo $y=ax^2+c$	7
3.2.3	Función parabólica del tipo $y=ax^2+bx+c$	8
4.	Función exponencial	9
4.1.	Introducción	9
4.2.	Representaciones de funciones exponenciales del tipo $y=a^x$	10
4.3.	Funciones exponenciales desplazadas.....	15
5.	Función logarítmica.....	17
5.1	Introducción al logaritmo. Significado	17
5.2	Representación del logaritmo.....	19
5.3	Problemas con logaritmos y exponenciales. Ecuaciones y sistemas.....	21
6.	Función proporcionalidad inversa.	25
6.1.	Generalidades	25
6.2.	Caso más sencillo $y=f(x)=k/x$	26
6.3.	Desplazada verticalmente $y=f(x)=k/x+y_0$	27
6.4.	Desplazada Horizontalmente $y=f(x)=k/x - x_0$	29
6.5.	Caso general (desplazada vertical y horizontalmente).....	30

1. Traslados de las gráficas horizontales y verticales

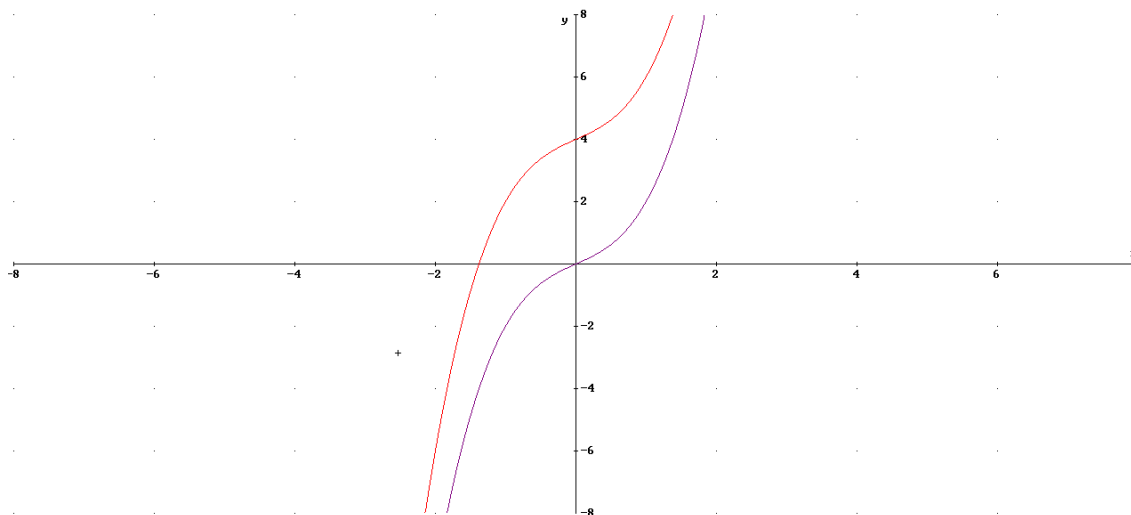
Horizontal: Sea una función $y=f(x)$, si trasladamos la gráfica x_0 unidades en eje OX entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar x por $(x-x_0)$.

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 2 unidades a la izquierda ($x_0=-2$) obtendremos la función $g(x)=f(x+2)=(x+2)^3+(x+2)=x^3+6x^2+13x+10$

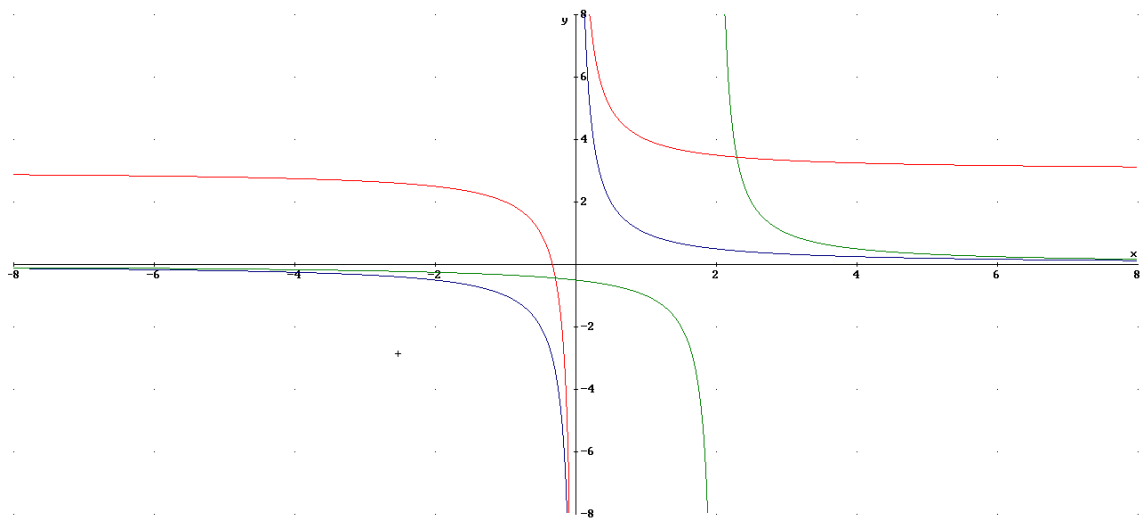


Vertical: Sea una función $y=f(x)$, si trasladamos la gráfica y_0 unidades en eje OY entonces la expresión analítica de la función resulta de cambiar y por $(y-y_0) \rightarrow y=f(x)+y_0$

Ejemplo: $f(x)=x^3+x$ si lo trasladamos 4 unidades hacia arriba ($y_0=4$) obtendremos la función $g(x)=x^3+x+4$



Ejercicio obtener la expresión analítica de $g(x)$, $h(x)$ si $f(x)=1/x$



Solución: $g(x)=3+1/x$; $h(x)=1/(x-2)$

2. Funciones lineales. La recta

La expresión analítica de una recta es $y=f(x)=mx+n$. Se caracteriza por tener un crecimiento o decrecimiento constante. Un ejemplo claro es la posición de un móvil en el tiempo en el movimiento rectilíneo uniforme. ($s=s_0+v \cdot t$, ejemplo $s_0=1m$, $v=2m/s \rightarrow s(t)=1+2t$).

Veamos el significado de m y n :

1) $m=pendiente\ de\ la\ recta$, nos explica el crecimiento de la función. Si $m>0$

crece y si $m<0$ decrece. Se cumple que $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{var\ iacion\ y}{var\ iacion\ x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Si por ejemplo $m=2/3 \rightarrow$ la función crece de tal forma que por cada vez que aumenta 3 unidades la x la y aumenta 2.

2) $n=ordenada\ en\ el\ origen$, es el punto de corte de la gráfica con el eje OY (es decir corta en $(0,n)$)

Obtener la expresión analítica a partir de dos puntos: $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$:

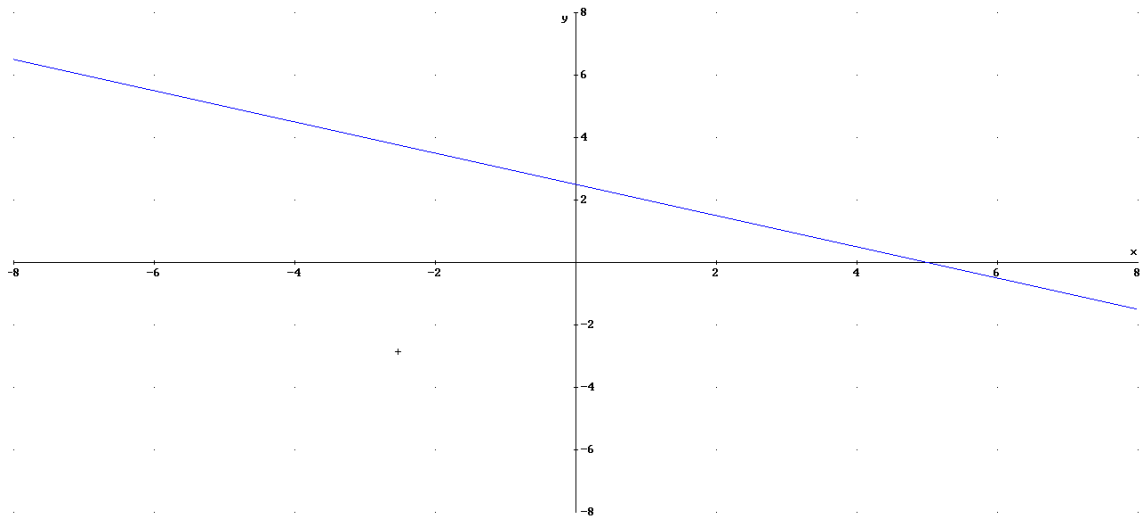
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \rightarrow y = y_1 + m(x - x_1)$$

Obtener la expresión analítica a partir de la gráfica: podemos obtener la ordenada en el origen viendo el punto de corte con el eje OY, y la pendiente a partir del crecimiento. También podemos obtenerlo a partir de identificar dos puntos en la gráfica y aplicar lo visto antes.

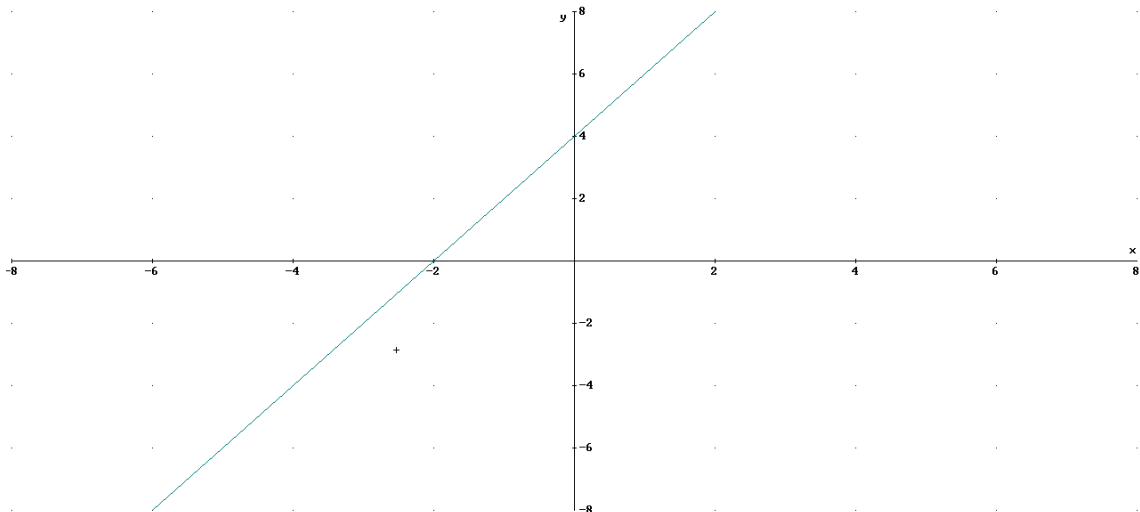
Ejemplo : obtener la expresión analítica de la recta que pasa por $P_1(1,2)$ y $P_2(-1,3)$ y dibujarla

$$m = \frac{3 - 2}{-1 - 1} = -1/2$$

$y=2-1/2(x-1)=2.5-0.5x$ (decrece y corta en el eje y en 2.5)



Obtener la expresión analítica de la recta con la siguiente gráfica:

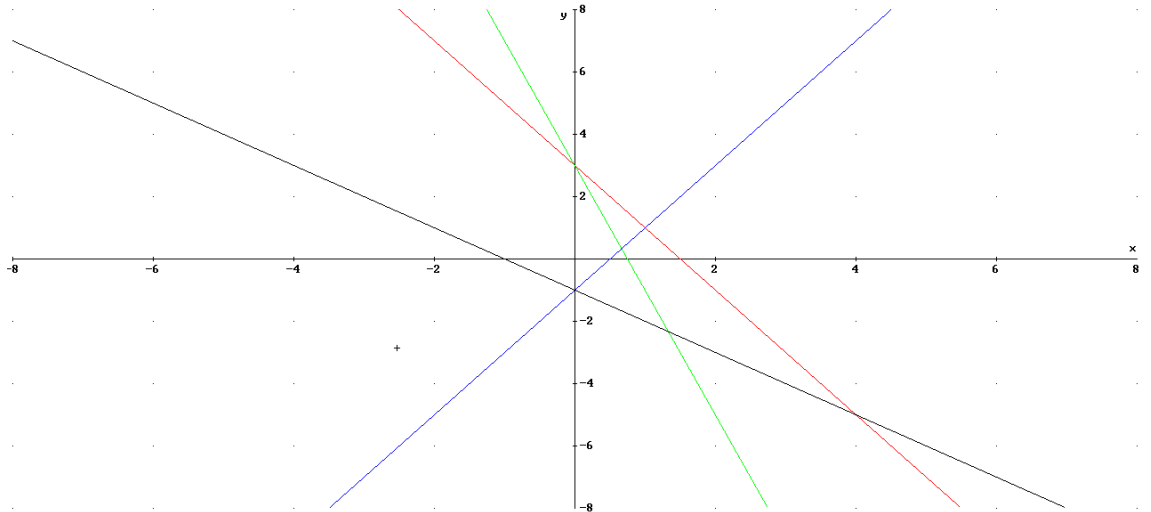


Podemos ver como $n=4$ y $m=2$, pues cada unidad que aumenta en x aumenta 2 en y .

$$y=2x+4$$

Ejercicio 1: sin necesidad de obtener la expresión analítica identifica las siguientes rectas:

- a) $y=-2x+3$
- b) $y=2x-1$
- c) $y=-4x+3$
- d) $y=-x-1$



Solución

- a → roja
- b → azul
- c → verde
- d → negra

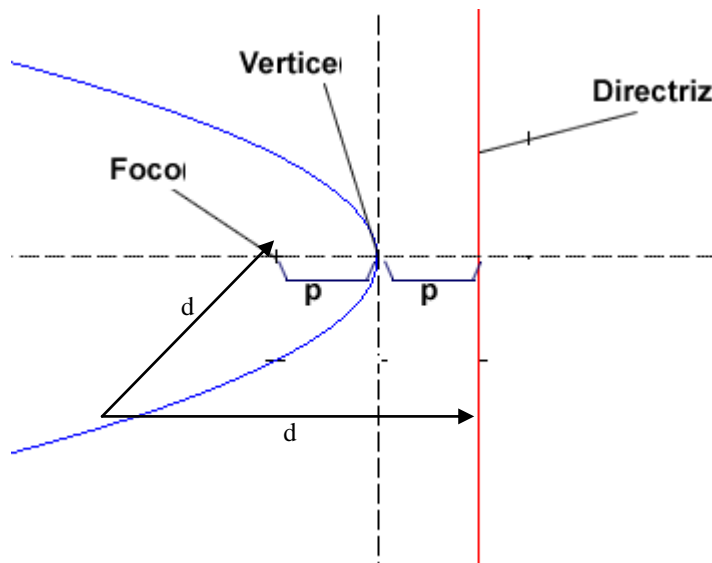
3. Función parabólica

3.1. Introducción. Lugar geométrico.

La parábola es una curva muy importante por aparecer en multitud de ocasiones en la naturaleza y la técnica. Ejemplos:

- Lanzamientos balón de baloncesto
- Chorros de agua
- Las antenas parabólicas
- ...

Geoméricamente una parábola es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta (directriz) y de un punto (foco de la parábola).



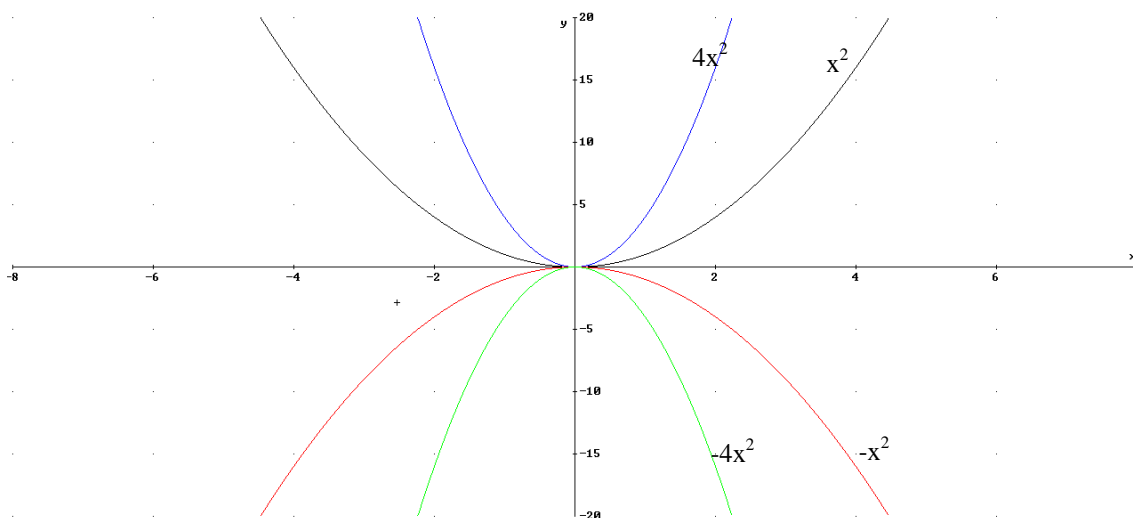
3.2 La parábola como función

En este tema no nos centraremos en la parábola como lugar geométrico sino como función. La parábola es la gráfica de toda función asociada a un polinomio de segundo grado, es decir $y=f(x)=ax^2+bx+c$.

Veamos casos particulares:

3.2.1 Función parabólica del tipo $y=ax^2$

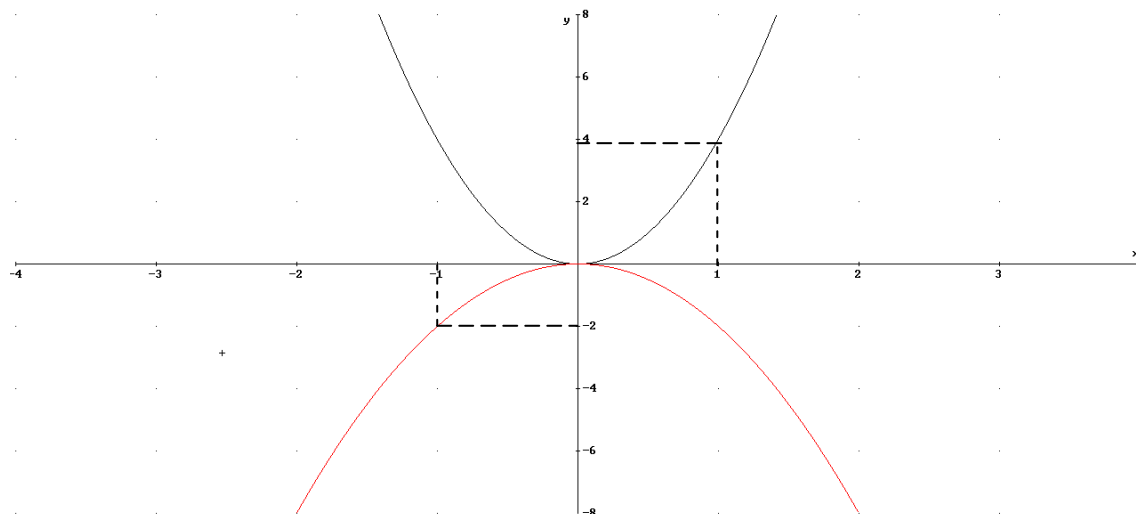
Si tenemos la función $y=f(x)=ax^2$. Para entender como es la parábola en función del parámetro a veamos 4 casos distintos:



Vemos que difieren si a es positiva o negativa, así tenemos:

- a) Si $a > 0$, sus propiedades son las siguientes:
 - Su vértice en origen $V(0,0)$ que es un mínimo
 - Cóncava
 - Simétrica con eje OY (par)
 - Creciente en $(0,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,0)$
 - A mayor valor de a más rápido crece y decrece
- b) Si $a < 0$, sus propiedades son las siguientes:
 - Su vértice en origen $V(0,0)$ que es un máximo
 - Convexa
 - Simétrica con eje OX (par)
 - Decreciente en $(0,\infty)$ y creciente en $(-\infty,0)$
 - A menor valor (más negativo) de a más rápido crece y decrece

Ejercicio 2: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución

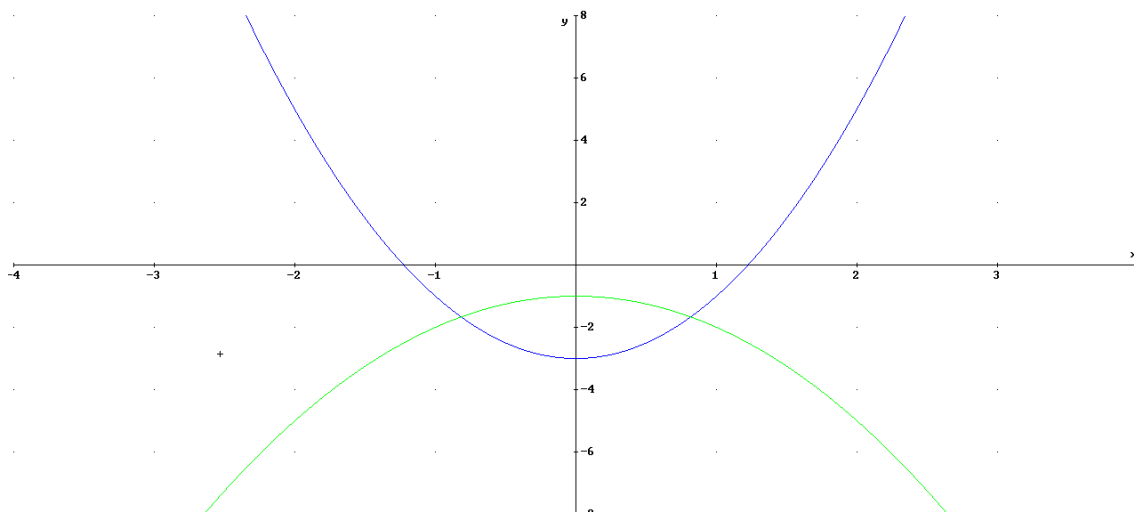
a) (azul) $V(0,0) \rightarrow y=a \cdot x^2$ $P(1,4) \rightarrow 4=a \cdot 1^2 \rightarrow a=4$

b) (roja) $V(0,0) \rightarrow y=a \cdot x^2$ $P(-1,-2) \rightarrow -2=a \cdot (-1)^2 \rightarrow a=-2$

3.2.2 Función parabólica del tipo $y=ax^2+c$

Para entender la gráfica tendremos que pensar que es una traslación en el eje OY de c unidades. De esta forma la gráfica es igual que la de $a \cdot x^2$ pero c unidades desplazada, del tal forma que el vértice situado en $V(0,c)$.

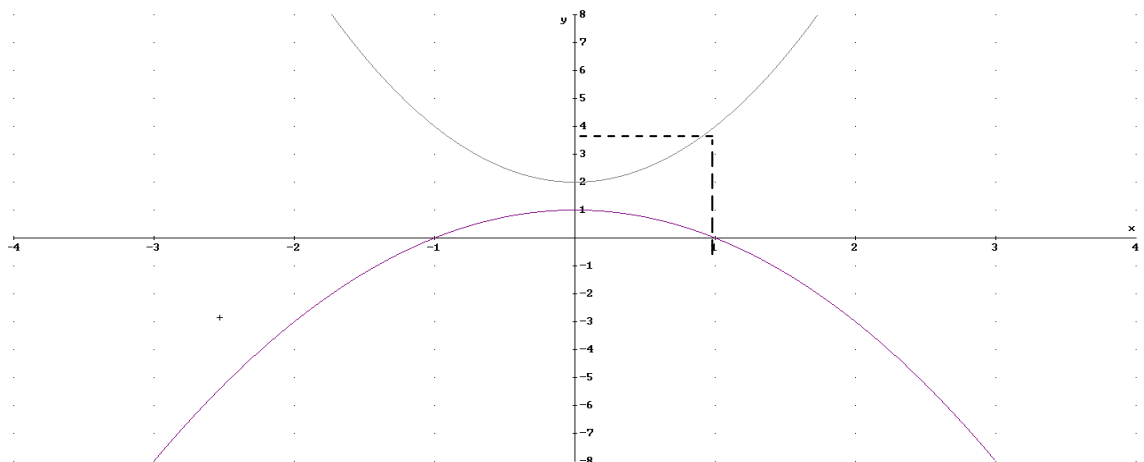
Ejemplos: $y=2x^2-3$; $y=-x^2-1$



Puntos importantes son los de corte con el eje OX (es decir $y=0$). Sólo cortarán con el eje las que tenga $a>0$ y $c<0$ o $a<0$ y $c>0$. En nuestro ejemplo:

$$0=2x^2-3 \rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}} \rightarrow A\left(\sqrt{\frac{3}{2}},0\right), B\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$$

Ejercicio 3: obtener la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución

- a) (Azul) $V(2,0) \rightarrow c=2$. $P(1,4)$ $y=ax^2+2 \rightarrow 4=a \cdot 1^2+2 \rightarrow a=2 \rightarrow y=2x^2+2$
 b) (morado) $V(1,0) \rightarrow c=1$ $P(1,4)$ $y=ax^2+1 \rightarrow 4=a \cdot 1^2+1 \rightarrow a=3 \rightarrow y=3x^2+1$

3.2.3 Función parabólica del tipo $y=ax^2+bx+c$

Para entender la gráfica basta con expresar la función de la siguiente forma $y=y_0+a(x-x_0)^2$, entonces será igual que el de la parábola $y=ax^2$ pero desplazada x_0 en el eje OX e y_0 en el eje OY. Relacionemos entonces a, b y c con x_0 e y_0 :

$$y=a \cdot (x-x_0)^2+y_0=a \cdot x^2-2ax_0 \cdot x+ax_0^2+y_0=ax^2+bx+c$$

$$-2a \cdot x_0=b \rightarrow x_0=\frac{-b}{2a}$$

$$a \cdot x_0^2+y_0=c \rightarrow y_0=c-a \cdot x_0^2$$

En la práctica se calcula $x_0=\frac{-b}{2a}$ e y_0 se obtiene sustituyendo en la función $x_0 \rightarrow y_0=f(x_0)$

La gráfica como hemos dicho es igual que la de $y=ax^2$ pero desplazada x_0 unidades en el eje OX e y_0 en eje OY, de tal forma que el vértice $V(x_0,y_0)$

Ejemplo: representar y poner en forma $y=a \cdot (x-x_0)^2+y_0$ la función $y=f(x)=2x^2-4x-2$.

Calculemos el vértice $x_0=\frac{-b}{2a}=1$, $y_0=f(1)=-4 \rightarrow V(1,-4)$

$$y=f(x)=2 \cdot (x-1)^2-4$$

Para representarla damos valores entorno del vértice

X	Y
---	---

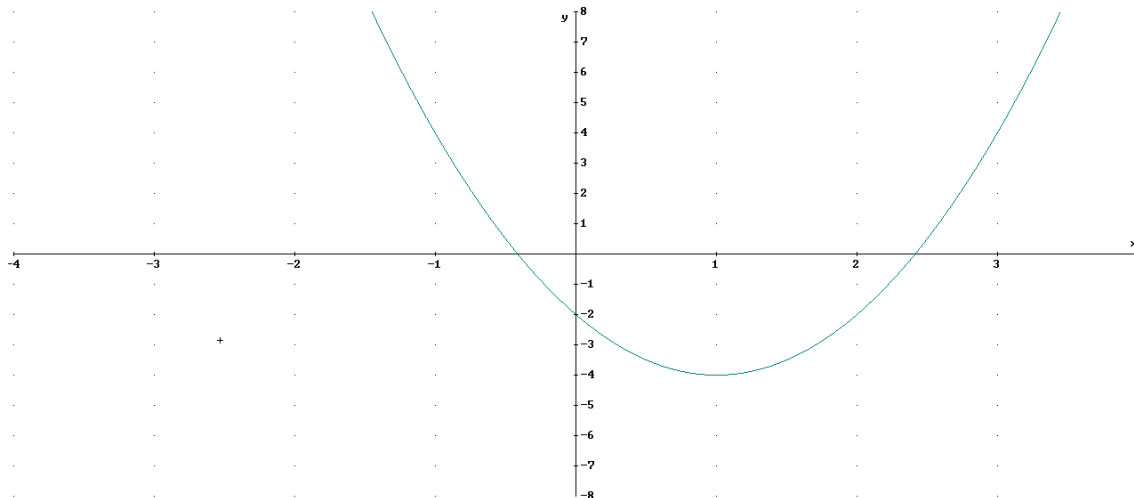
0	-2
---	----

1	-4
---	----

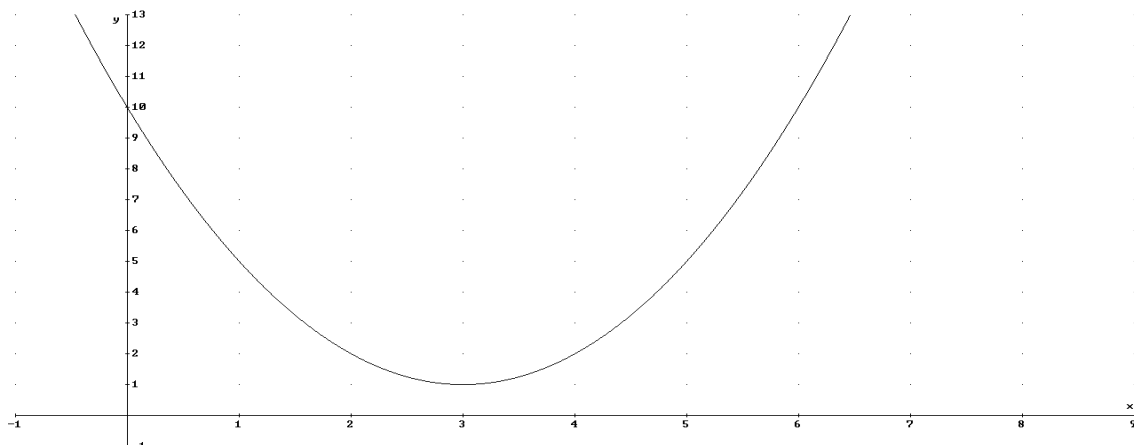
$$2 \quad -2$$

Puntos de corte con eje OX ($y=0$) $\rightarrow 0=2 \cdot (x-1)^2 - 4 \rightarrow 4=2 \cdot (x-1)^2 \rightarrow (x-1)^2=2 \rightarrow$

$$x-1=\pm\sqrt{2} \rightarrow x=1\pm\sqrt{2} \rightarrow (1+\sqrt{2}, 0), (1-\sqrt{2}, 0)$$



Ejercicio 4: obtener la expresión analítica de la siguiente gráfica:



Solución:

El vértice es $V(3,1) \rightarrow y=1+a \cdot (x-3)^2$. Para calcular a sustituimos un punto, por ejemplo $P(10,0) \rightarrow 10=1+a \cdot 9 \rightarrow a=1$:

$$y=1+(x-3)^2=1+x^2-6x+9=x^2-6x+10$$

4. Función exponencial

4.1. Introducción

Antes de ver la función exponencial recordemos la definición de exponente y alguna de sus propiedades.

$$a^x:$$

- Si $x \in \mathbb{N} \rightarrow a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^n$

- Si $x \in \mathbb{Z} \rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

- Si $x \in \mathbb{Q} \rightarrow a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}$

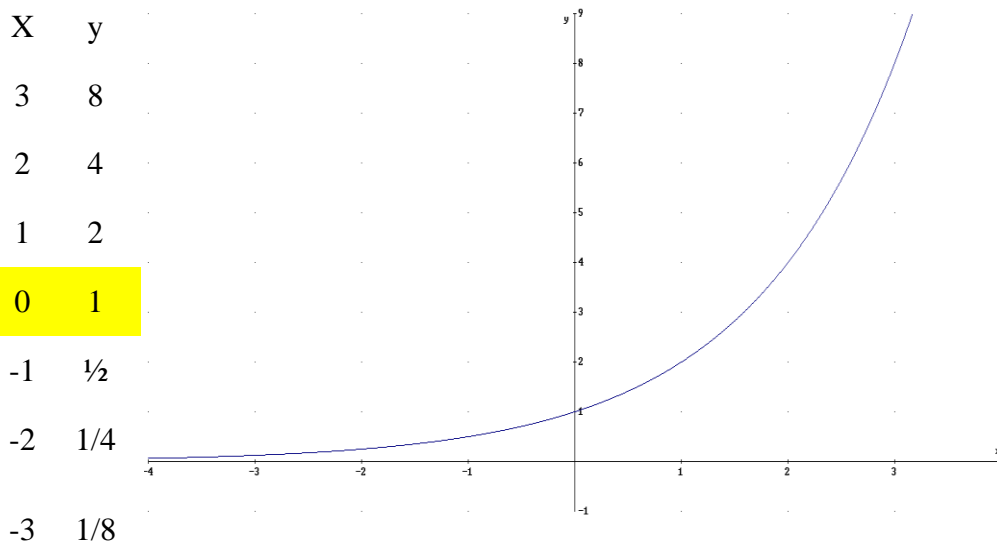
Propiedades:

- 1) $(a^x)^y = a^{xy} \rightarrow$ ejemplo: $5^{2x} = 25^x$
- 2) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \rightarrow$ ejemplo: $3^x \cdot 2^x = 6^x$
- 3) $a^1 = a$
- 4) $a^0 = 1$

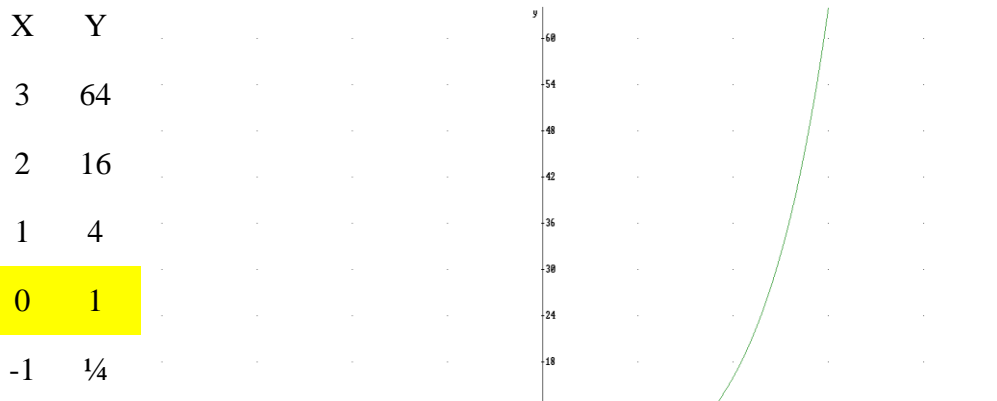
4.2. Representaciones de funciones exponenciales del tipo $y = a^x$

Vamos a distinguir dos casos de funciones exponenciales:

a) $a > 1$
 $y = 2^x$



a) $y = 4^x$



-2 1/16

-3 1/64

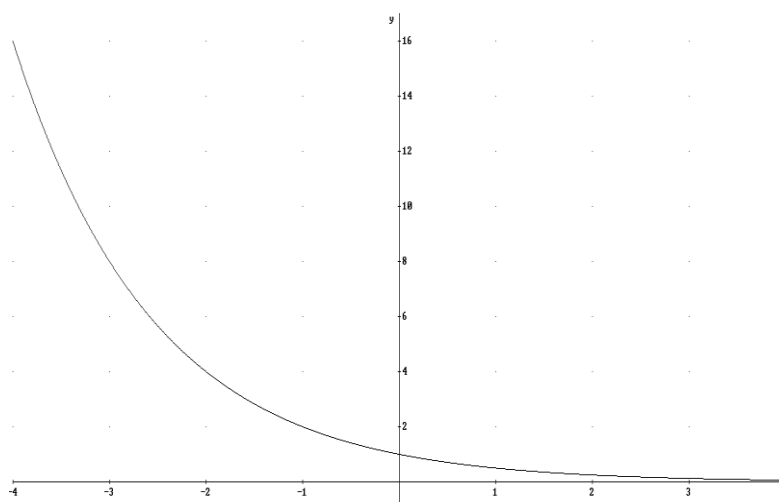
Propiedades exponentes si $a > 1$:

- 1) Dom(f)=R
- 2) Continua en R
- 3) Creciente en R
- 4) Concava
- 5) Asíntota horizontal $y=0$ $x \rightarrow -\infty$
- 6) Definida positiva (siempre positiva)
- 7) A mayor valor de a más rápido crece

b) $0 < a < 1$

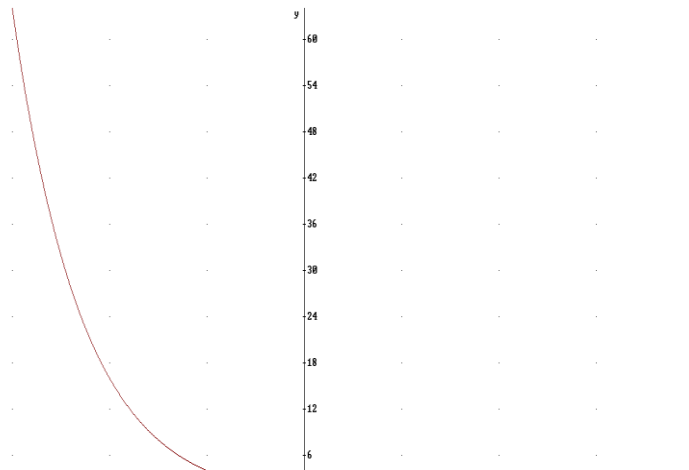
$y = (1/2)^x$

x	Y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8



b) $y = (1/4)^x$

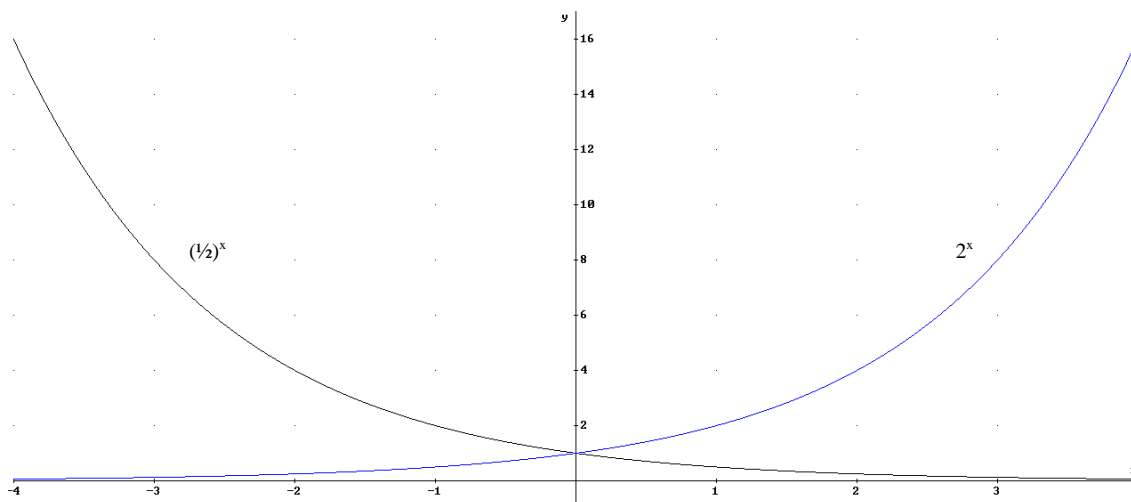
x	Y
-3	64
-2	16
-1	4
0	1
1	1/4
2	1/16



Propiedades exponentes si $0 < a < 1$:

- 1) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- 2) Continua en \mathbb{R}
- 3) Decreciente en \mathbb{R}
- 4) Cóncava
- 5) Asíntota horizontal $y=0$ $x \rightarrow -\infty$
- 6) Definida positiva (siempre positiva)
- 7) Cuanto más se acerca a cero la base más rápidamente decrece.

Nota: a^x simétrica respecto al eje con $(1/a)^x$



Ejercicio 5: Representa y di cual es la base de las siguientes funciones exponenciales:

a) $y = 3^{2x}$

b) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

Solución:

La función exponencial es de la forma $y = a^x$, y en nuestro caso tenemos que el exponente es $2x$, de esta forma tenemos que incluir el 2 dentro de la base, veamos como:

$$y = 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$$

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^x = \left(\frac{1}{9}\right)^x$$

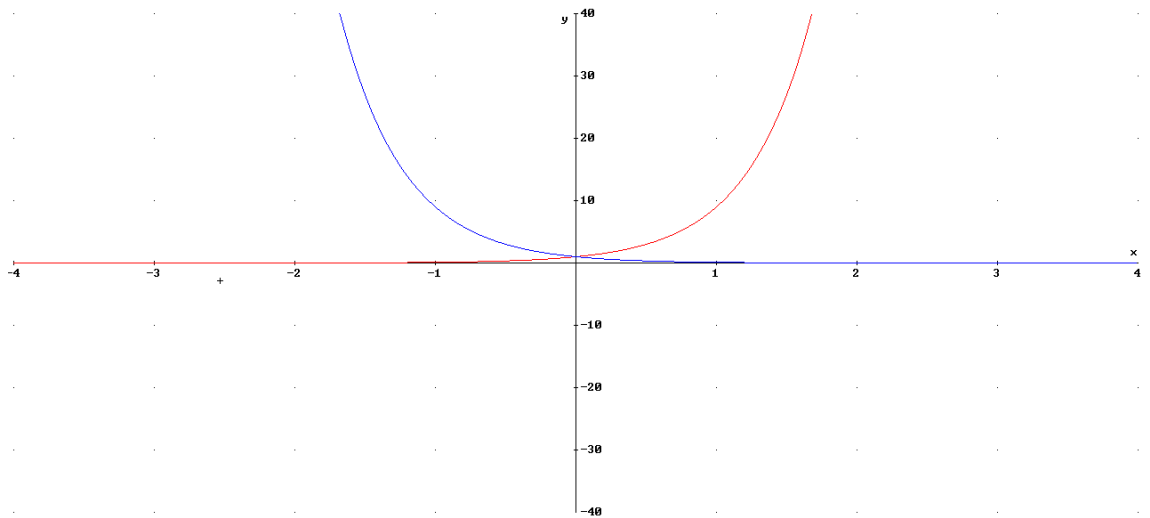
Luego las bases son 9 y 1/9. Veamos las gráficas

$$y=9^x$$

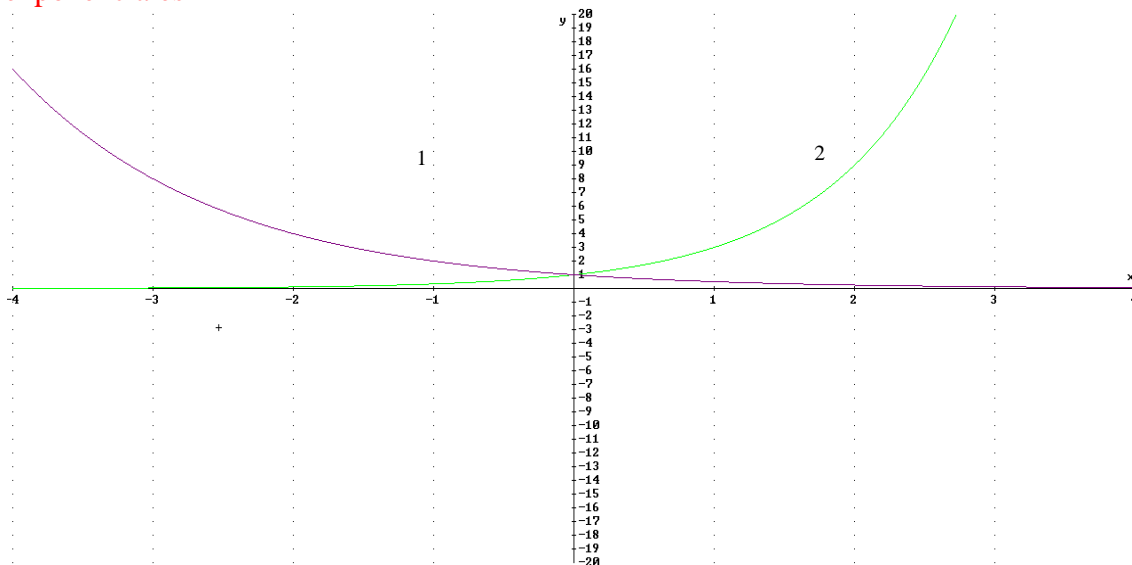
x	Y
-3	1/729
-2	1/81
-1	1/9
0	1
1	9
2	81
3	729

$$y=(1/9)^x$$

x	Y
-3	729
-2	81
-1	9
0	1
1	1/9
2	1/81
3	1/729



Ejercicio 6: obtener la expresión analítica de las siguientes funciones exponenciales



Solución

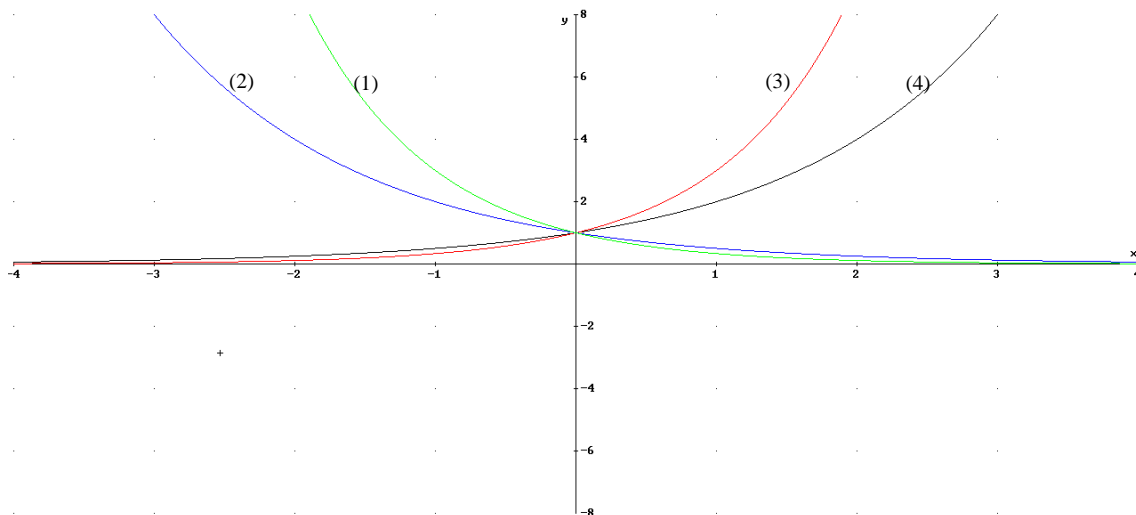
Veamos la expresión analítica de (1). Sabemos que $a < 0$ pues es decreciente. Busquemos un punto de la gráfica que no sea el $(0, 1)$. Por ejemplo en $(-1, 2)$.

$$y = a^x \rightarrow 2 = a^{-1} \rightarrow 2 = 1/a \rightarrow a = 1/2$$

Veamos la expresión analítica de (2). Sabemos que $a > 0$ pues es creciente. Busquemos un punto de la gráfica que no sea el $(0, 1)$. Por ejemplo en $(1, 3)$.

$$y = a^x \rightarrow 3 = a^1 \rightarrow a = 3$$

Ejercicio 7: Identifica las siguientes gráficas con la expresión analítica correspondientes.



- (a) $y = 2^x$
- (b) $y = 3^x$
- (c) $y = (0.5)^x$
- (d) $y = (1/3)^x$

Solución:

(a)=(4), (b)=(3), (c)=(2), (d)=(1)

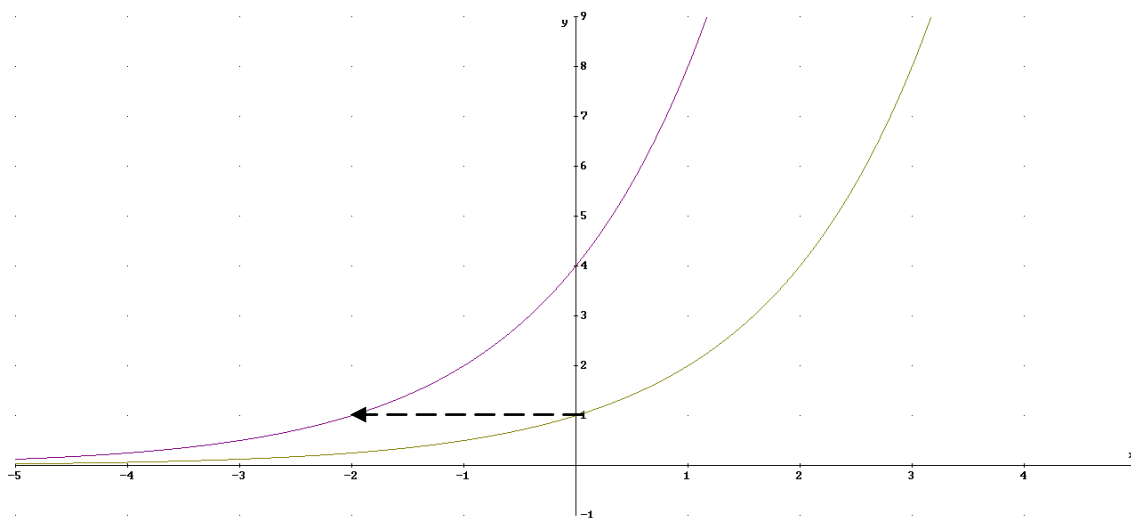
4.3. Funciones exponenciales desplazadas

En este apartado veremos las funciones cuando desplazamos las gráficas en los ejes:

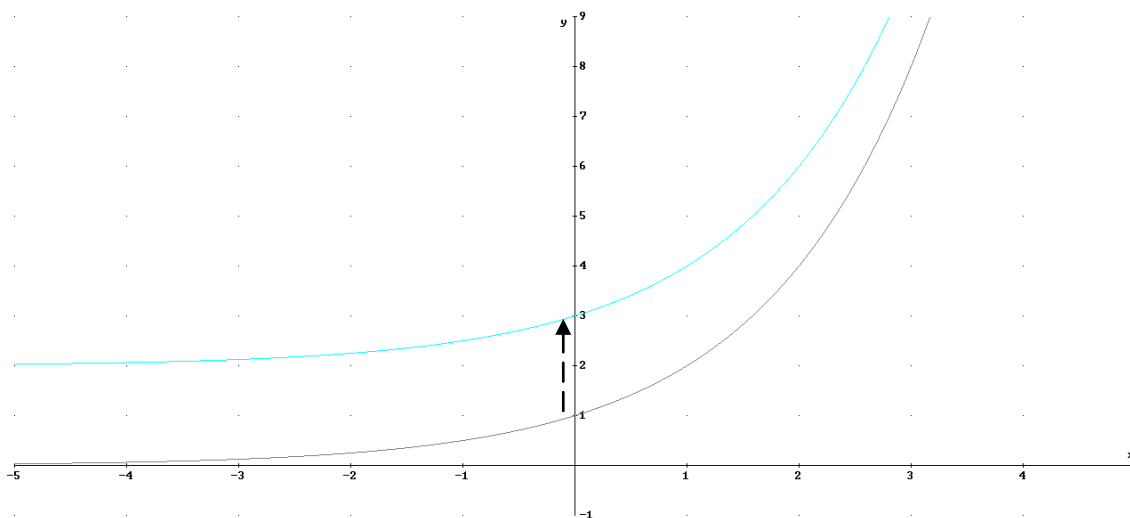
- Si desplazamos la gráfica en el eje OX un valor x_0 tenemos que la función gráfica es $y=a^{x-x_0}=a^x \cdot a^{-x_0}$
- Si desplazamos la gráfica en el eje OY un valor y_0 tenemos que la función gráfica es $y=a^x+y_0$

Ejemplos:

a) $y=4 \cdot 2^x \rightarrow y=2^2 \cdot 2^x \rightarrow y=2^{x+2} \rightarrow x_0=-2$



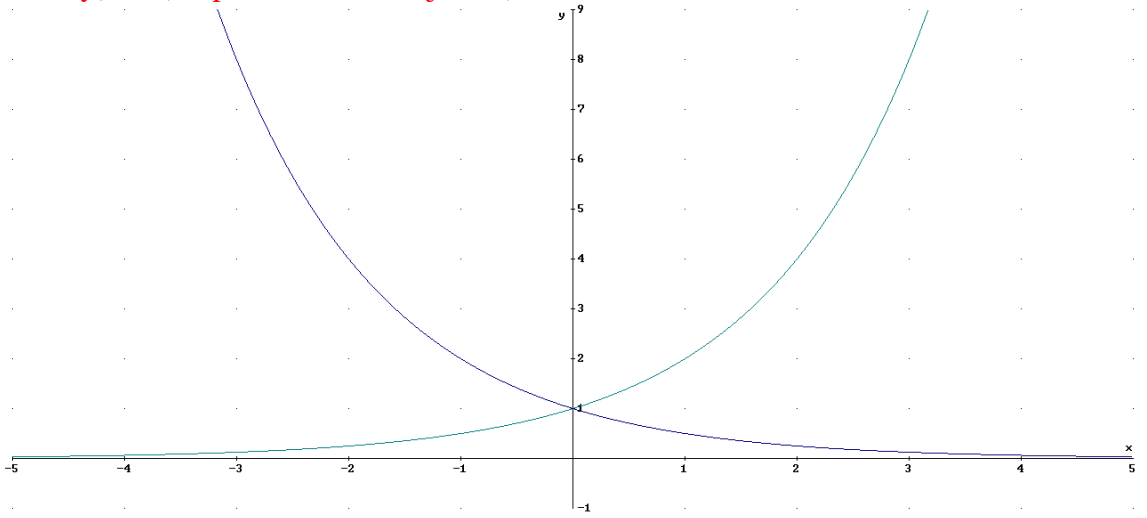
b) $y=2+2^x \rightarrow y_0=2$ (la asíntota horizontal pasa a ser $y=2$)



Ejercicio 8: representar las siguientes gráficas sin necesidad de tabla de valores, sólo a partir de la gráfica de $y=(0.5)^x$ y de $y=2^x$

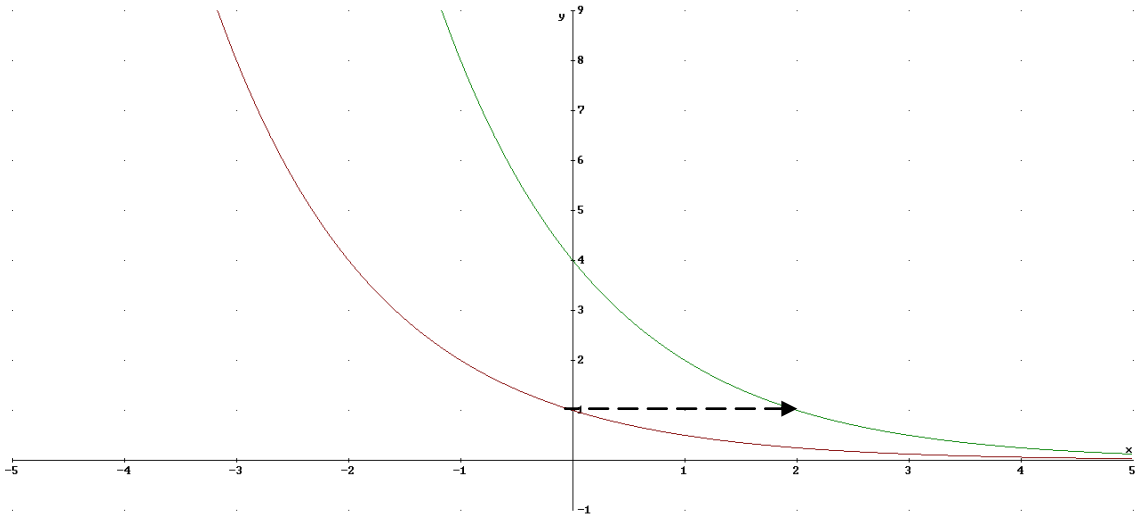
a) $y=4 \cdot 0.5^x = 4 \cdot (1/2)^x = (1/2)^{-2} (1/2)^x \rightarrow y=(1/2)^{x-2} \rightarrow x_0=2$ (desplazamos 2 ejeOX)

b) $y=2^x - 3 \rightarrow y_0=-3$ (desplazamos -3 en eje OY)

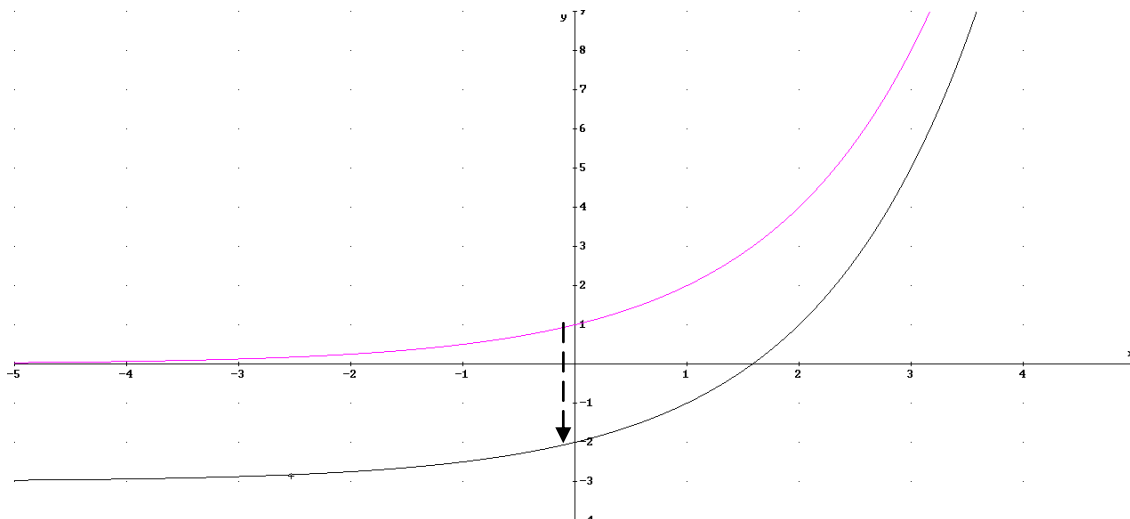


Solución:

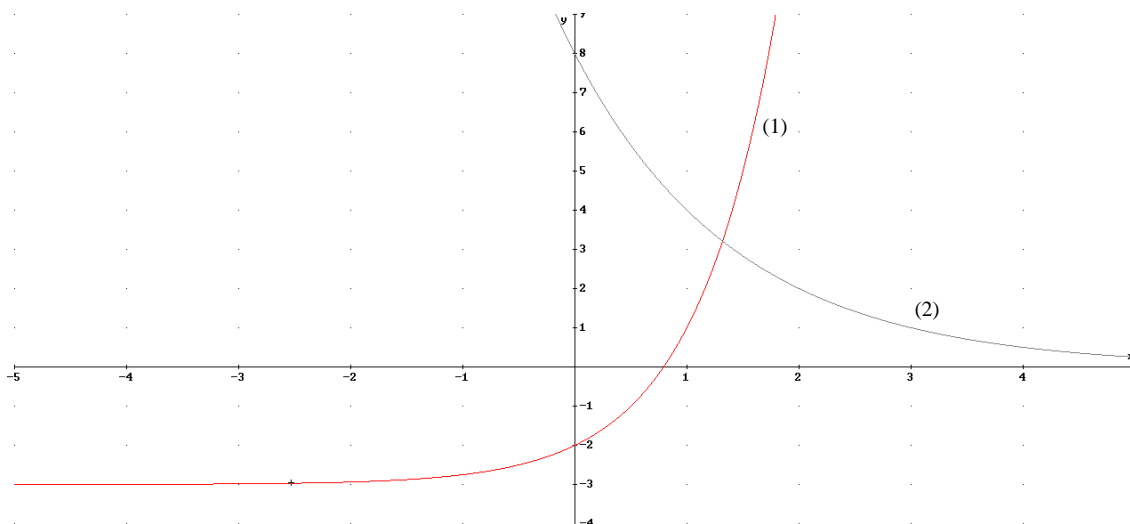
a)



b)



Ejercicio 9: Identifica la expresión analítica de las siguientes funciones exponenciales:



Solución:

(1) Es decreciente luego la base menor que uno. La asíntota sigue siendo el eje OX, luego está desplazado en el eje OY. Para ver lo que se desplaza miramos a ver en qué valor de x la $y=1$, que en la gráfica no desplazada ocurren en $x=1$. Si $y=1 \rightarrow x=3$. Luego $x_0=3$. Calculemos la base:

$$y=a^{x-3} \text{ pasa por el punto } (0,8) \rightarrow 8=a^{-3} \quad a^3=1/8 \rightarrow a=1/2$$

$$y=(1/2)^{x-3}$$

(2) Es creciente luego la base es mayor que uno. La asíntota horizontal es $y=-3$, luego está desplazada -3 unidades en el eje OY $\rightarrow y_0=-3$. Calculemos la base:
 $y=a^x-3$ pasa por el punto $(0,-2) \rightarrow -2=a^0-3 \rightarrow -2=1-3$. No da información, busquemos otro punto el $(1,-1) \rightarrow -1=a^1-3 \rightarrow a=2$
 $y=2^x-3$

5. Función logarítmica

5.1 Introducción al logaritmo. Significado

Definición: el logaritmo es la operación inversa al exponente, así :

$$y = \log_a x \rightarrow a^y = x$$

Elementos del logaritmo:

- Base del logaritmo, a.
- Argumento del logaritmo x

Ejemplos:

$$\log_{10} 100 = 2 \rightarrow 10^2 = 100$$

$$\log_2 8 = 3 \rightarrow 2^3 = 8$$

$$\log_3 (1/9) = -2 \rightarrow 3^{-2} = 1/9$$

$$\log_{10} 0,001 = -3 \rightarrow 10^{-3} = 1/1000 = 0.001$$

Notación: $\log_{10} x = \log x$. Los logaritmos decimales son los que aparecen en la calculadora.

Propiedades (muy importantes):

1. $\log_a a = 1$; $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a x_1 + \log_a x_2 = \log_a (x_1 \cdot x_2)$. Ejemplo $\log_2 8 + \log_2 4 = \log_2 32 \rightarrow 3 + 2 = 5$
3. $\log_a x_1 - \log_a x_2 = \log_a (x_1/x_2)$. Ejemplo $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 2 \rightarrow 3 - 2 = 1$
4. $\log_a(x)$ no existe si $x \leq 0$. Pues $a^y > 0$. Ejemplo $\log(-2)$ y $\log(0)$ no existen
5. $n \cdot \log_a x = \log_a x^n \rightarrow$ Ejemplo: $-2 \cdot \log(10) = \log(10^{-2}) \rightarrow -2 \cdot 1 = -2$
6. $\log_a(a^n) = n \rightarrow \log_3 3^2 = \log_3 9 = 2$
7. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

Esta última propiedad muy útil para calcular logaritmos con la calculadora.

Ejemplo $\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{0,778}{0,301} = 2,58$. Comprobación: $2^{2,58} \approx 6$

Ejercicio 10: Calcular los siguientes logaritmos exactos sin usar la calculadora:

- a) $\log_6 1296$
- b) $\log_2 0,125$
- c) $\log_3 \sqrt{27}$
- d) $\log_5 625$
- e) $\log_{1/5} 25$

Solución:

- a) $1296 = 6^4 \rightarrow \log_6 1296 = 4$
- b) $0,125 = \frac{1}{8} = 2^{-3} \rightarrow \log_2 0,125 = -3$
- c) $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{3/2} \rightarrow \log_3 \sqrt{27} = 3/2$
- d) $625 = 5^4 \rightarrow \log_5 625 = 4$

$$e) \quad 25=5^2=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \rightarrow \log_{1/5}25=-2$$

Ejercicio 11: Utiliza la tecla de la potencia x^y para calcular con aproximación de centésimas el siguiente logaritmo: $\log_7 32$

Solución: $\log_7 32 \approx 1.78$

Ejercicio 12: Calcular la incógnita

a) $y = \log_4 \sqrt{2}$

b) $-4 = \log_b 2$

c) $-\frac{1}{2} = \log_4 x$

Solución:

a) $\sqrt{2} = 2^{1/2} = (4^{1/2})^{1/2} = 4^{1/4} \rightarrow \log_4 \sqrt{2} = \frac{1}{4}$

b) $-4 = \log_b 2 \rightarrow b^{-4} = 2 \rightarrow 1 = 2 \cdot b^4 \rightarrow b^4 = 1/2 \rightarrow b = \sqrt[4]{1/2}$

c) $-\frac{1}{2} = \log_4 x \rightarrow x = 4^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$

Ejercicio 12: Sabiendo que $\log_b(x)=0,5$, $\log_b(y)=0,2$, $\log_b(z)=0,3$, se cumple $a = \frac{x^3}{yz}$, calcular $\log_b a$ y luego el valor de a. Nota aplicar las propiedades de logaritmos:

Solución:

$$\log_b\left(\frac{x^3}{yz}\right) = \log_b(x^3) - \log_b(yz) = 3 \cdot \log_b(x) - (\log_b(y) + \log_b(z)) = 3 \cdot 0,5 - (0,2 + 0,3) = 1$$

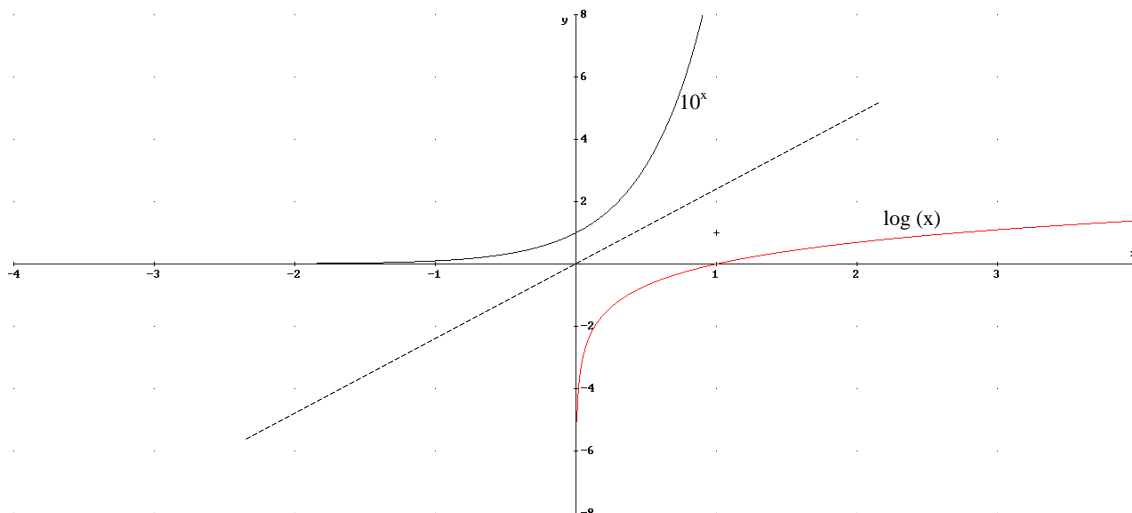
$$\log_b(a) = 1 \rightarrow a = b$$

5.2 Representación del logaritmo

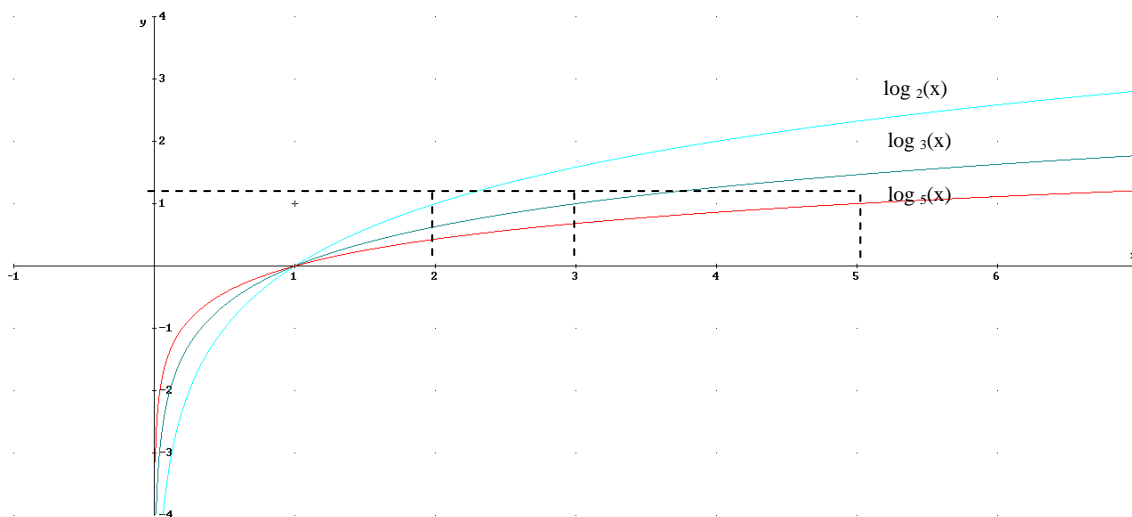
La gráfica de $y = \log_a x$ es simétrica respecto a la recta $y=x$ (bisectriz de los ejes). Para representarla podemos distinguir entre cuando $a > 1$ y $0 < a < 1$:

1) **$a > 1$**

Ejemplo: $y = \log(x)$



Veamos cómo son las gráficas según el valor de a (siendo en las dos a mayor que uno):

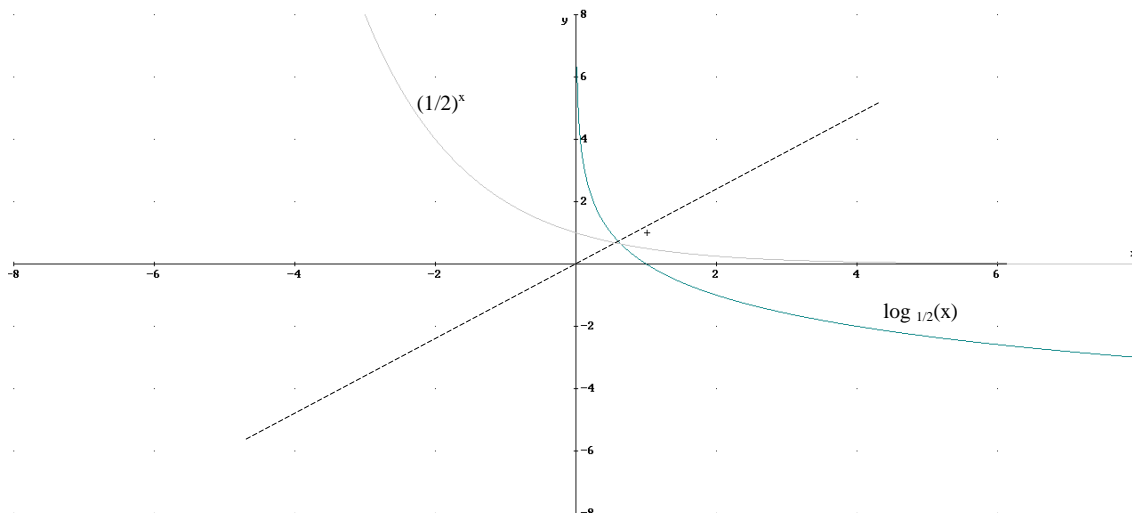


Propiedades $y=\log_a x$ con $a>1$:

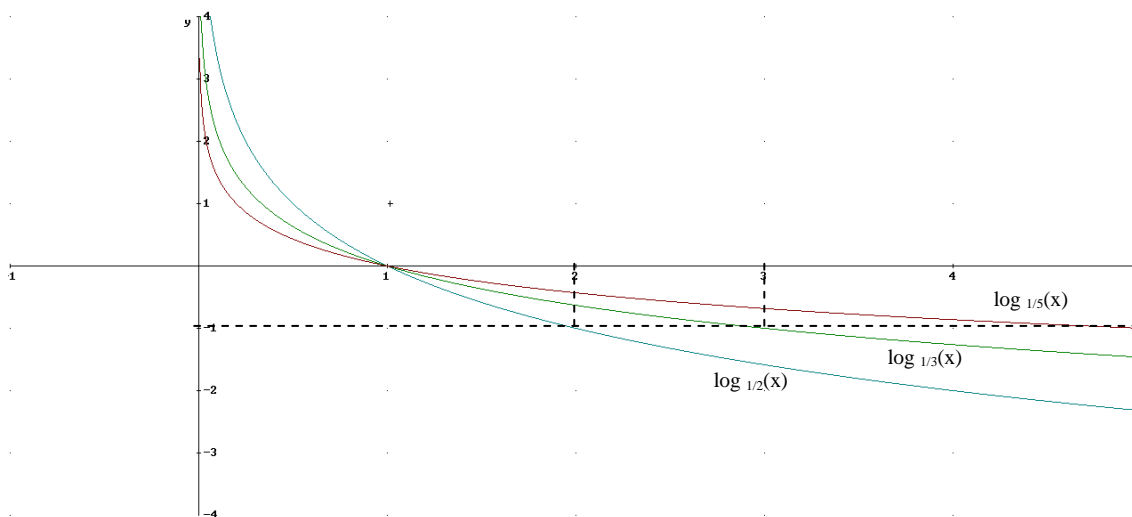
- 1) $\text{Dom}=\mathbb{R}^+=(0,\infty)$
- 2) Asíntota vertical $x=0$ tendiendo $y\rightarrow-\infty$
- 3) Pasa por $(a,1)$ y por $(1,0)$
- 4) Creciente
- 5) Convexa
- 6) Cuanto mayor sea a menos crece

2) $a<1$

Ejemplo: $y=\log_{1/2}(x)$



Veamos cómo son las gráfica según el valor de a (siendo en las dos menor que uno):



Propiedades $y=\log_a x$ con $0 < a < 1$:

- 1) $\text{Dom}=\mathbb{R}^+= (0, \infty)$
- 2) Asíntota vertical $x=0$ tendiendo $y \rightarrow \infty$
- 3) Pasa por $(a, -1)$
- 4) Decreciente
- 5) Concava
- 6) Cuanto menor sea a (más cerca de cero) menos decrece

5.3 Problemas con logaritmos y exponenciales. Ecuaciones y sistemas

Ecuaciones con logaritmos: para resolver las ecuaciones logarítmicas tendremos que agrupar los logaritmos en uno sólo o en uno por cada lado de la igualdad. Una vez que tengamos un único logaritmo o uno por cada lado de la igualdad, para quitarnos el logaritmo tomamos el exponente.

Ejemplo:

$$\log_2(-8x-4) - \log_2(x^2) = 2 \rightarrow \log_2\left(\frac{-8x-4}{x^2}\right) = 2 \rightarrow \left(\frac{-8x-4}{x^2}\right) = 2^2 \rightarrow \left(\frac{-8x-4}{x^2}\right) = 4 \rightarrow$$

$$(-8x-4) = 4 \cdot x^2 \rightarrow 4x^2 + 8x + 4 = 0 \rightarrow x = -1. \text{ Tenemos que comprobar que la solución es válida, pues puede ocurrir que el logaritmo sea negativo:}$$

$$x = -1 \rightarrow \log_2\left(\frac{8-4}{(-1)^2}\right) = \log_2(2) = 2$$

Ejercicio 13, resolver:

- 1) $3 \cdot \log(x) - \log(32) = \log(x) - \log(2)$
- 2) $2 \cdot \log(x) + \log(2) = \log(x+1)$
- 3) $\log_3(2) + \log_3(x-3) = (1/2) \cdot \log_3(2x)$

Solución:

$$1) \log(x^3) - \log(32) = \log(x) - \log(2) \rightarrow \log\left(\frac{x^3}{32}\right) = \log\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{x^3}{32}\right) = \left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow x^3 = 16x$$

$$\rightarrow x(x^2 - 16) = 0 \rightarrow x = 0, x = 4, x = -4.$$

Comprobación:

$$x = 0 \rightarrow \log(0) = \log(0) \text{ pero no existe el logaritmo de cero, luego no es solución}$$

$$x = -4 \rightarrow \log(-2) = \log(-2) \text{ no existe el logaritmo de cero, luego no es solución}$$

$$x = 4 \rightarrow \log(2) = \log(2) \text{ si es solución}$$

$$2) \log(x^2) + \log(2) = \log(x+1) \rightarrow \log(2 \cdot x^2) = \log(x+1) \rightarrow 2x^2 = x+1 \rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1, x = -1/2. \text{ Los dos soluciones son válidas:}$$

$$x = 1 \rightarrow \log(2) = \log(2)$$

$$x = 1/2 \rightarrow \log(1/2) = \log(1/2)$$

$$3) \log_3(2 \cdot (x-3)) = \log_3(\sqrt{2x}) \rightarrow 2x-6 = \sqrt{2x} \rightarrow (2x-6)^2 = 2x \rightarrow 4x^2 - 26x + 36 = 0 \rightarrow$$

$$x = 2, x = 9/2. \text{ Al elevar al cuadrado debemos comprobar si las dos soluciones son válidas:}$$

$$x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 - 6 \neq \sqrt{2 \cdot 2}. \text{ No solución}$$

$$x = 9/2 \rightarrow 2 \cdot \frac{9}{2} - 6 = \sqrt{2 \cdot \frac{9}{2}} \rightarrow 3 = 3. \text{ Solución}$$

$$4) \log_5 \left(\left(\frac{x}{5} \right)^4 \cdot \frac{25}{4} \right) - \log_5(x^2) = 0 \rightarrow \log_5 \left(\frac{x^4}{100} \right) - \log_5(x^2) = 0 \rightarrow \log_5 \left(\frac{x^2}{100} \right) = 0$$

$$\rightarrow \left(\frac{x^2}{100} \right) = 5^0 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10, x = -10$$

Ecuaciones con exponente: **a)** si tenemos una sola potencia igualada a un número, tomamos logaritmo en la misma base en los dos lados de la ecuación (el logaritmo se va con el exponente) obteniendo la solución. **b)** Si tenemos varios exponentes tenemos que poner todos los exponentes con misma base y luego hacer un cambio de variable. Con dicho cambio se resuelve la ecuación, y luego se deshace el cambio de variable.

Ejemplo :

$$a) 3^{x-1} = 2 \rightarrow \log_3 3^{x-1} = \log_3 2 \rightarrow (x-1) \cdot \log_3 3 = \log_3 2 \rightarrow (x-1) = \log_3 2 \rightarrow x = 1 + \log_3 2$$

$$b) 3^x + 3^{x-1} + 9^x = 13 \rightarrow 3^x + \frac{3^x}{3} + (3^x)^2 = 13 \rightarrow y = 3^x \rightarrow$$

$$y + y/3 + y^2 = 13 \rightarrow 3y + y + 3y^2 = 39 \rightarrow 3y^2 + 4y - 39 = 0 \rightarrow y = 3, y = -13/3:$$

$$3 = 3^x \rightarrow x = 1$$

$$-13/3 = 3^x \rightarrow x = \log_3(-13/3) \text{ no solución}$$

Ejercicio 14. Resolver:

$$a) 2^{3x-1} = 11$$

$$b) 5^x - 5 \cdot 5^{-x} + 4 \cdot 5^{-3x} = 0$$

$$c) 5^{x+1} = 1/25$$

$$d) 11^x - 11^{x+1} + 11^{2x} = -9$$

Solución:

$$a) 2^{3x-1} = 11 \rightarrow 3x-1 = \log_2 11 \rightarrow x = (\log_2 11 + 1)/3$$

$$b) 5^x - 5 \cdot 5^{-x} + 4 \cdot 5^{-3x} = 0 \rightarrow 5^x - 5 \cdot \frac{1}{5^x} + 4 \cdot \frac{1}{(5^x)^3} = 0 \rightarrow y = 5^x \rightarrow y - \frac{5}{y} + \frac{4}{y^3} = 0 \rightarrow$$

$$y^4 - 5y^2 + 4 = 0 \rightarrow y = \pm 2, y = \pm 1.$$

$$y = 2 \rightarrow 5^x = 2 \rightarrow x = \log_5 2$$

$$y = 1 \rightarrow 5^x = 1 \rightarrow x = \log_5 1 = 0$$

$$y = -2 \rightarrow 5^x = -2 \rightarrow x = \log_5(-2) \text{ no existe}$$

$$y = 1 \rightarrow 5^x = -1 \rightarrow x = \log_5(-1) \text{ no existe}$$

$$c) 5^{x+1} = 1/25 \rightarrow x+1 = \log_5(1/25) \rightarrow x = -2-1 = -3$$

$$d) 11^x - 11^{x+1} + 11^{2x} = -9 \rightarrow 11^x - 11 \cdot 11^x + (11^x)^2 = -9 \rightarrow y = 11^x \rightarrow y - 11y + y^2 = -9 \rightarrow y^2 - 10y + 9 = 0 \rightarrow y = 9, y = 1$$

$$11^x = 9 \rightarrow x = \log_{11} 9$$

$$11^x = 1 \rightarrow x = \log_{11} 1 = 0$$

Sistemas: se resuelven o bien haciendo cambio de variables u obteniendo ecuaciones sin logaritmos y exponentes.

$$a) \begin{cases} \log(x) - \log_2(y) = 1 \\ 2\log(x) + \log_2(y) = 5 \end{cases}$$

Solución

$$\log(x) = X, \log_2(y) = Y \rightarrow \begin{cases} X - Y = 1 \\ 2X + Y = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 2 \rightarrow x = 100 \\ Y = 1 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^{x+1} + 1 = 3^{y+1} \end{cases}$$

Solución

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2 \cdot 2^x + 1 = 3 \cdot 3^y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^x = X, 3^y = Y \\ X + Y = 7 \\ 2 \cdot X + 1 = 3 \cdot Y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = 4 \rightarrow x = 2 \\ Y = 3 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \log(x) + \log(y) = 3 \\ x + y = 70 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \log(x \cdot y) = 3 \\ x + y = 70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (x \cdot y) = 10^3 \\ x + y = 70 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 20, y_1 = 50 \\ x_1 = 50, y_1 = 20 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2^x \cdot 4^y = 8 \\ x + y = 22 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 2^{2y} = 8 \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2^{x+2y} = 8 \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 22 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} \log(x + y) - \log(x - y) = \log(5) \\ 2^x / 2^y = 2 \end{cases}$$

Solución:

$$\log\left(\frac{x+y}{x-y}\right) = \log(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = 5 \\ x-y=1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y = 5x-5y \\ x-y=1 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} x=3 \\ y=2 \end{array}$$

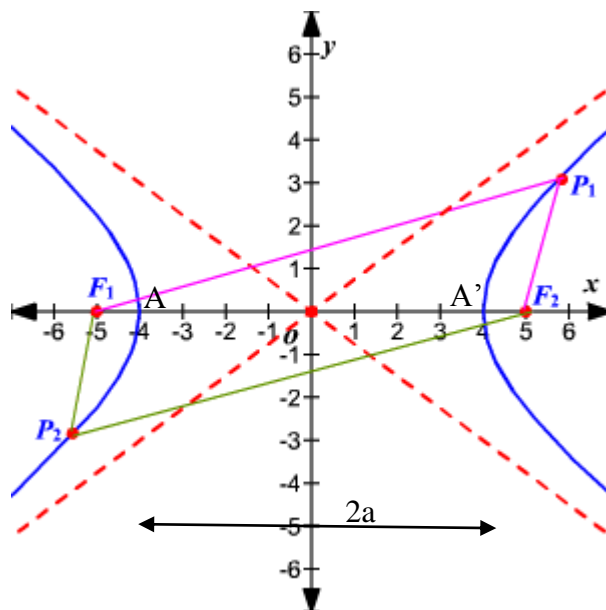
6. Función proporcionalidad inversa.

6.1. Generalidades

Las funciones de proporcionalidad inversa son funciones de la forma $y = f(x) = y_0 + \frac{k}{x-x_0}$, se llaman así porque cuando aumenta la x la y disminuye, de hecho para el caso más sencillo que veremos en el siguiente apartado $y=k/x$ se cumple que la y y la x son inversamente proporcionales de constante de proporcionalidad k .

La gráfica de estas funciones son hipérbolas giradas 45° de tal forma que siempre tiene una asíntota horizontal $y=y_0$ y otra vertical $x=x_0$.

Veamos **geoméricamente la definición de hipérbola**: es una curva abierta y plana, con dos ramas, que se definen como el lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias $r'-r$, a dos puntos fijos F y F' , denominados focos, es constante e igual a $2a$, siendo $2a$ la longitud del eje real $A-A'$ de la hipérbola.



6.2. Caso más sencillo $y=f(x)=\frac{k}{x}$

Este es el caso más sencillo pero a partir del que podemos obtener los demás a partir de desplazamientos verticales y horizontales. Sus características son las siguientes:

- 1) $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$
- 2) No puntos de corte
- 3) Asíntota vertical $x=0$ y horizontal $y=0$
- 4) Si $k>0$ siempre decreciente y si $k<0$ siempre creciente.
- 5) Curvatura: si $k>0 \rightarrow$ cóncava (\cup) en $(0, \infty)$, convexa (\cap) de $(-\infty, 0)$. Si $k<0$ al revés
- 6) Simetría impar.
- 7) Cuanto mayor sea $|k|$ más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

Veamos 4 ejemplos:

a) $y=f(x)=\frac{1}{x}$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	0.1	1	10	$\pm\infty$	-10	-1	-0.1

b) $y=f(x)=\frac{-1}{x}$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	-0.1	-1	-10	$\pm\infty$	10	1	0.1

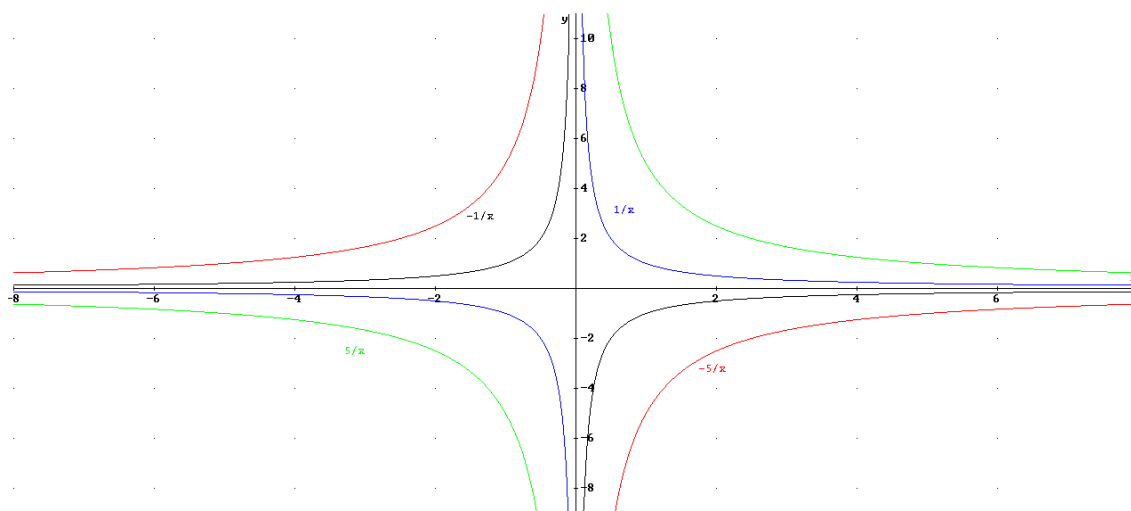
c) $y=f(x)=\frac{5}{x}$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	0.5	5	50	$\pm\infty$	-50	-5	-0.5

d) $y=f(x)=\frac{-5}{x}$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	-0.5	-5	-50	$\pm\infty$	50	5	0.5

Gráficas:



6.3. Desplazada verticalmente $y=f(x)=\frac{k}{x}+y_0$

Es equivalente al caso anterior pero desplazado y_0 unidades en vertical, tal que si $y_0 > 0$ desplazamiento hacia arriba y si $y_0 < 0$ el desplazamiento es hacia abajo:

- 1) $\text{Dom}(f(x)) = \mathbb{R} - \{0\}$
- 2) Corte con eje OX en $(-y_0/k, 0)$
- 3) Asíntota vertical $x=0$ y horizontal $y=y_0$
- 4) Si $k > 0$ siempre decreciente y si $k < 0$ siempre creciente.
- 5) Curvatura: si $k > 0 \rightarrow$ cóncava (\cup) en $(0, \infty)$, convexa (\cap) de $(-\infty, 0)$. Si $k < 0$ al revés
- 6) No simetría
- 7) Cuanto mayor sea $|k|$ más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

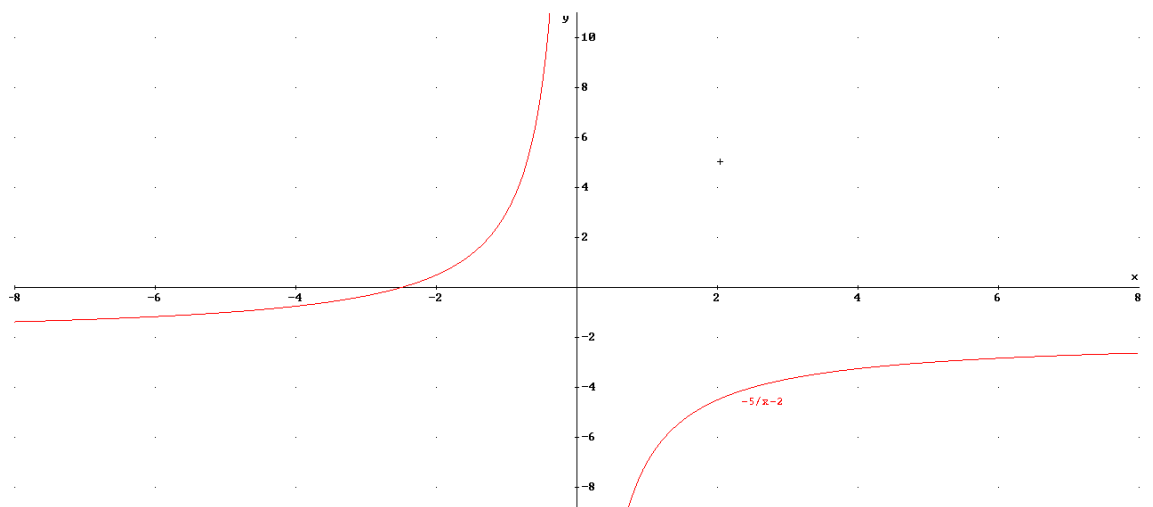
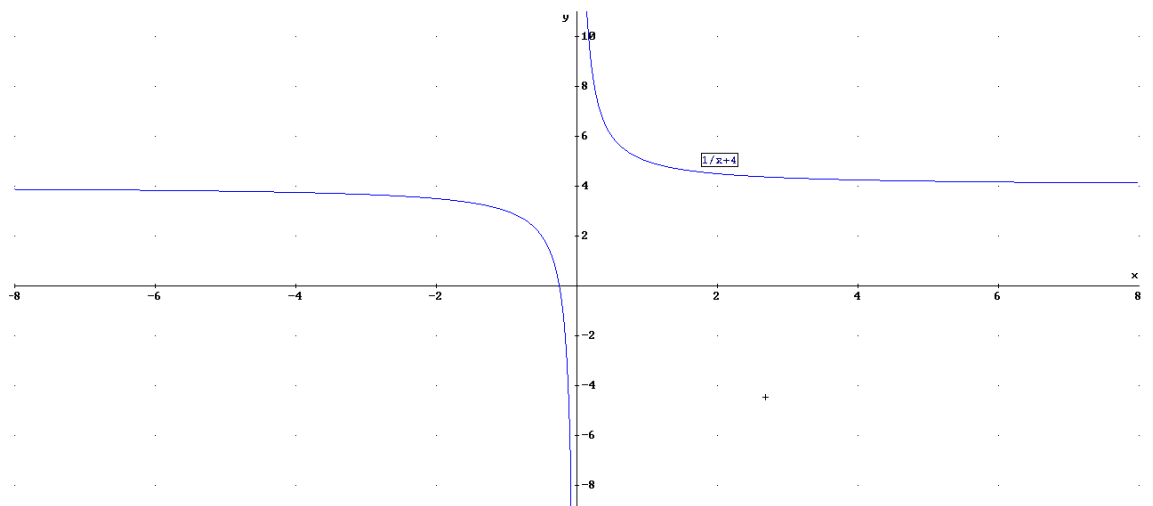
Veamos 2 ejemplos:

a) $y=f(x)=\frac{1}{x} + 4$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	4.1	5	14	$\pm\infty$	-6	3	3.9

b) $y=f(x)=-\frac{5}{x} - 2$

x	10	1	0.1	0	-0.1	-1	-10
y	-1.5	3	48	$\pm\infty$	-52	-7	-2.5



6.4. Desplazada Horizontalmente $y=f(x)=\frac{k}{x-x_0}$

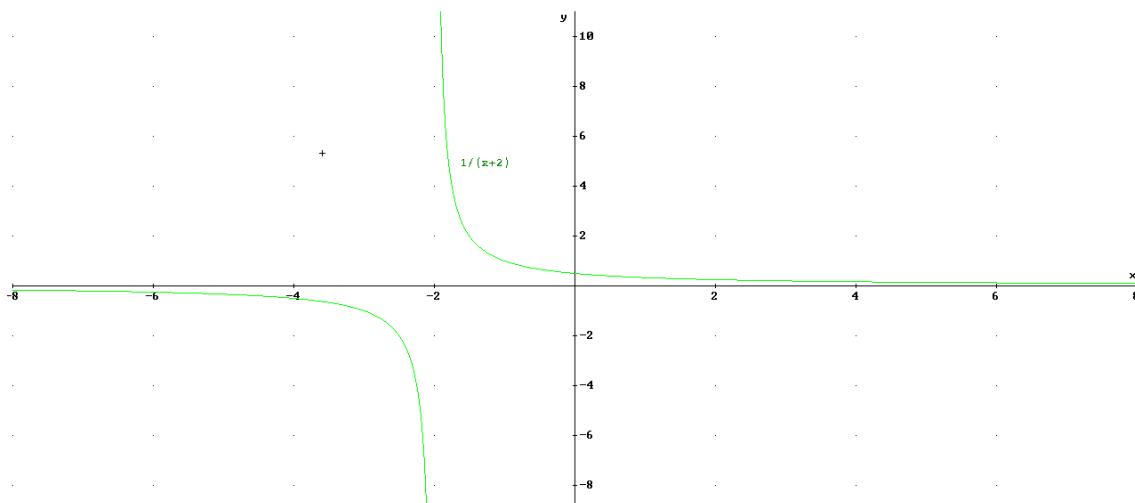
Es equivalente al caso 6.2 pero desplazado x_0 unidades en horizontal, tal que si $x_0>0$ desplazamiento hacia la derecha y si $x_0<0$ el desplazamiento es hacia la izquierda:

- 1) $\text{Dom}(f(x))=\mathbb{R}-\{x_0\}$
- 2) Corte con eje OY en $(0,-k/x_0)$
- 3) Asíntota vertical $x=x_0$ y horizontal $y=0$
- 4) Si $k>0$ siempre decreciente y si $k<0$ siempre creciente.
- 5) Curvatura: si $k>0 \rightarrow$ cóncava (\cup) en (x_0,∞) , convexa (\cap) de $(-\infty,x_0)$. Si $k<0$ al revés
- 6) No simetría
- 7) Cuanto mayor sea $|k|$ más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

Veamos 2 ejemplos:

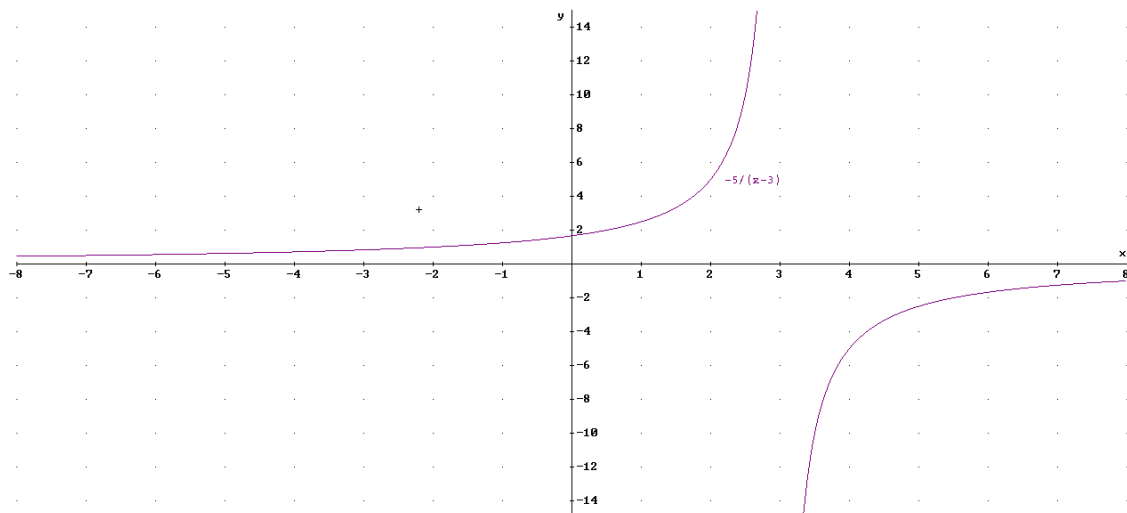
a) $y=f(x)=\frac{1}{x+2}$

x	8	-1	1.9	-2	-2.1	-3	-12
y	0.1	1	10	$\pm\infty$	-10	-1	-0.1



b) $y=f(x)=-\frac{5}{x-3}$

x	13	2	3.1	3	2.9	2	-7
y	-0.5	-5	-50	$\pm\infty$	50	5	0.5



6.5. Caso general (desplazada vertical y horizontalmente) $y=f(x)=\frac{k}{x-x_0} + y_0$

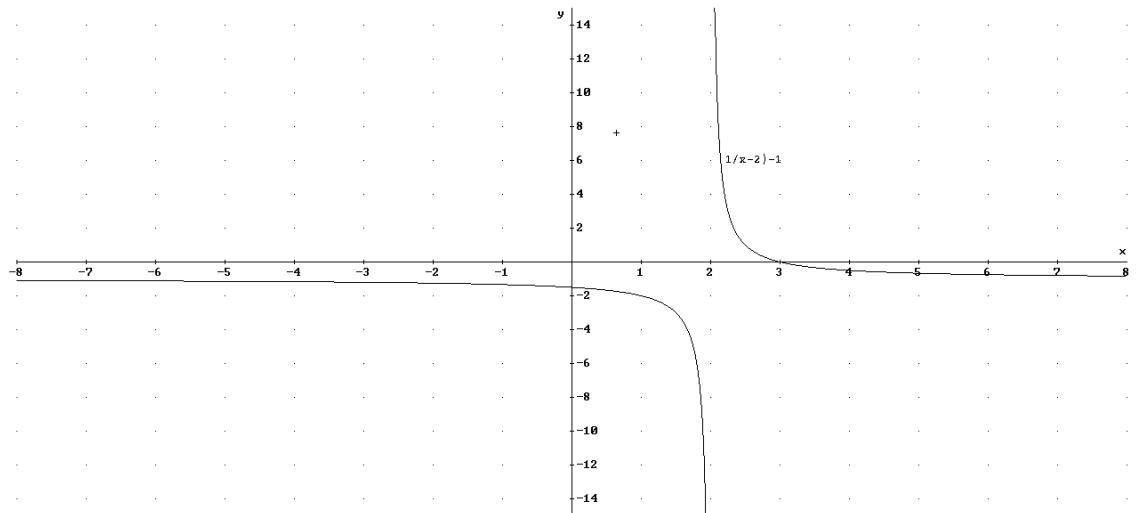
Es equivalente al caso 6.2 pero desplazado x_0 unidades en horizontal e y_0 en vertical:

- 1) $\text{Dom}(f(x))=\mathbb{R}-\{x_0\}$
- 2) Corte con eje OY en $(-y_0/k+x_0,0)$ y eje OX en $(0,-k/x_0+y_0)$
- 3) Asíntota vertical $x=x_0$ y horizontal $y=y_0$
- 4) Si $k>0$ siempre decreciente y si $k<0$ siempre creciente.
- 5) Curvatura: si $k>0 \rightarrow$ cóncava (\cup) en (x_0,∞) , convexa (\cap) de $(-\infty,x_0)$. Si $k<0$ al revés
- 6) No simetría
- 7) Cuanto mayor sea $|k|$ más separado de las asíntotas (crece o decrece más despacio).

Veamos 2 ejemplos:

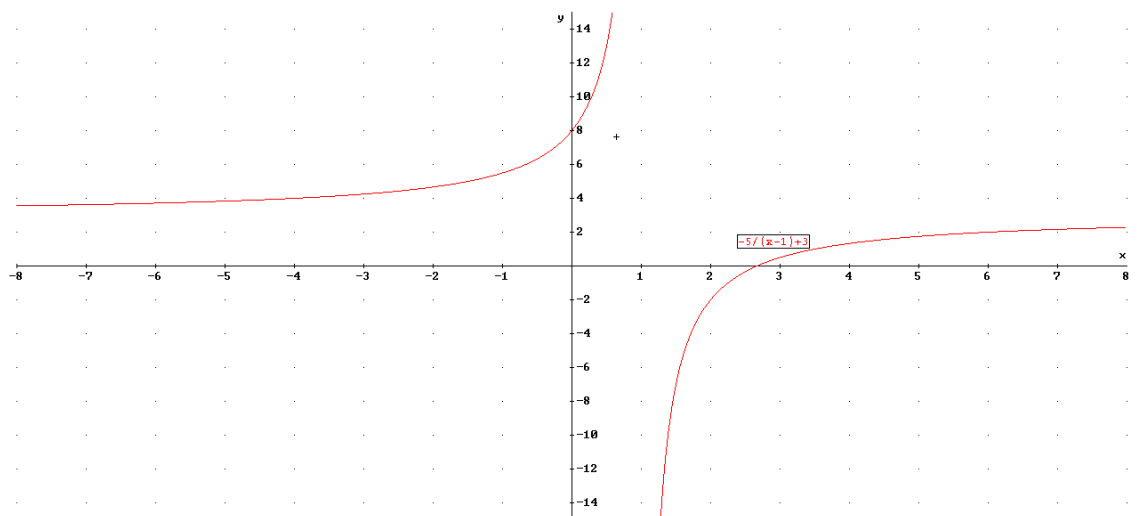
a) $y=f(x)=\frac{1}{x-2}-1$

x	12	3	2.1	2	1.9	1	-8
y	-0.9	0	9	$\pm\infty$	-11	-2	-1.1



b) $y=f(x)=\frac{-5}{x-1}+3$

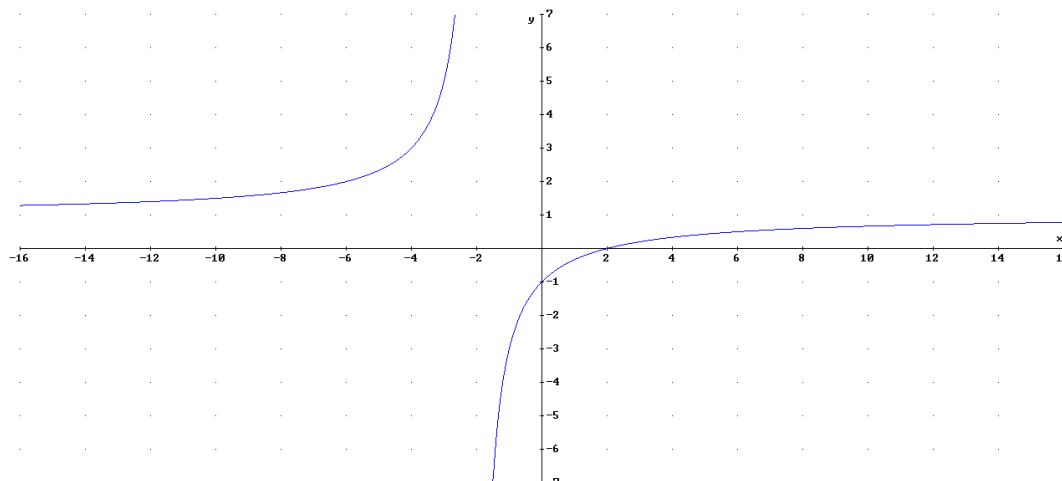
x	11	2	1.1	1	0.9	0	-9
y	2.5	-2	-47	$\pm\infty$	53	8	3.5



Podemos encontrar estas gráficas de manera “camuflada” siendo de la forma $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ donde el valor de k , x_0 y y_0 se encuentra haciendo la división. Veamos un ejemplo:

$$y=f(x)=\frac{x-2}{x+2} \rightarrow y=f(x)=1+\frac{-4}{x+2}$$

$$\begin{array}{r} x-2 \quad | \quad x+2 \\ -x-2 \quad | \quad 1 \\ \hline \quad \quad | \quad -4 \end{array}$$



Ejercicio 15: Representar las siguientes funciones:

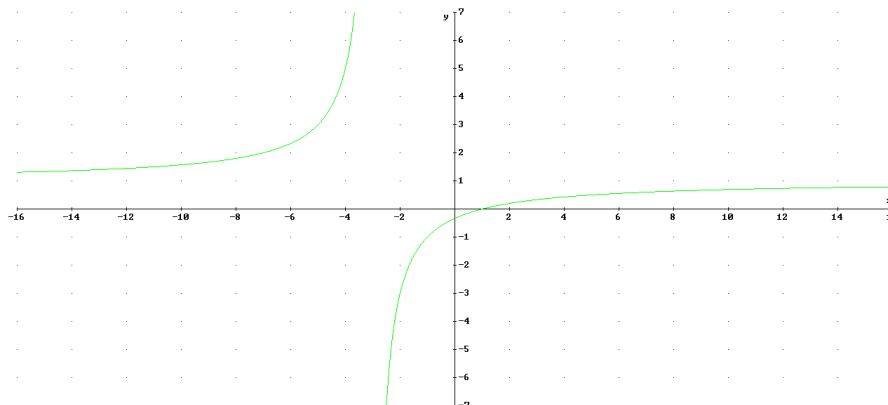
a) $y=f(x)=\frac{x-1}{x+3}$

b) $y=f(x)=\frac{-2x+2}{x-3}$

c) $y=f(x)=\frac{5x+1}{x-2}$

Solución

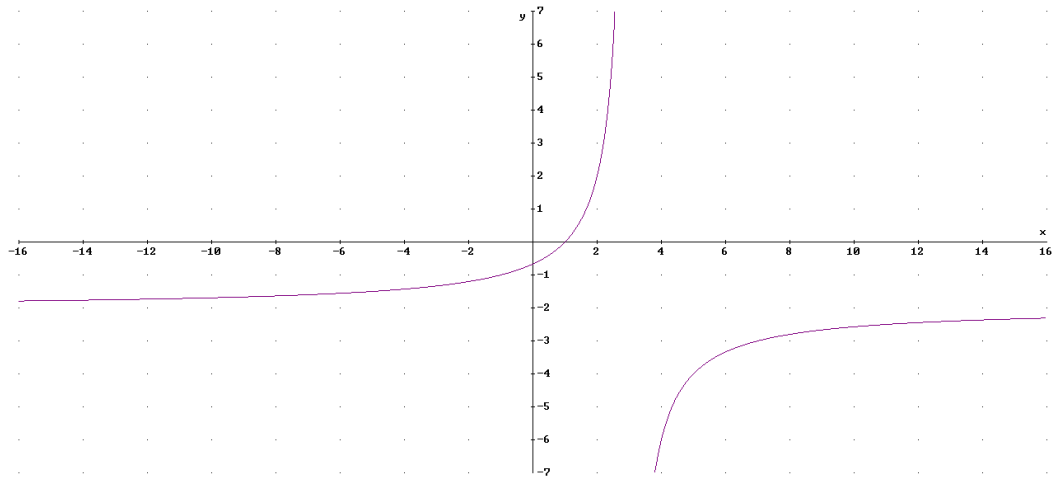
a) $\begin{array}{r} x-1 \quad | \quad x+3 \\ -x-3 \quad | \quad 1 \\ \hline \quad \quad | \quad -4 \end{array} \rightarrow y=f(x)=1+\frac{-4}{x+3}$



b)
$$\frac{-2x + 2}{x - 3} \rightarrow y = f(x) = -2 + \frac{-4}{x - 3}$$

$$\frac{2x - 6}{x - 3} - 2$$

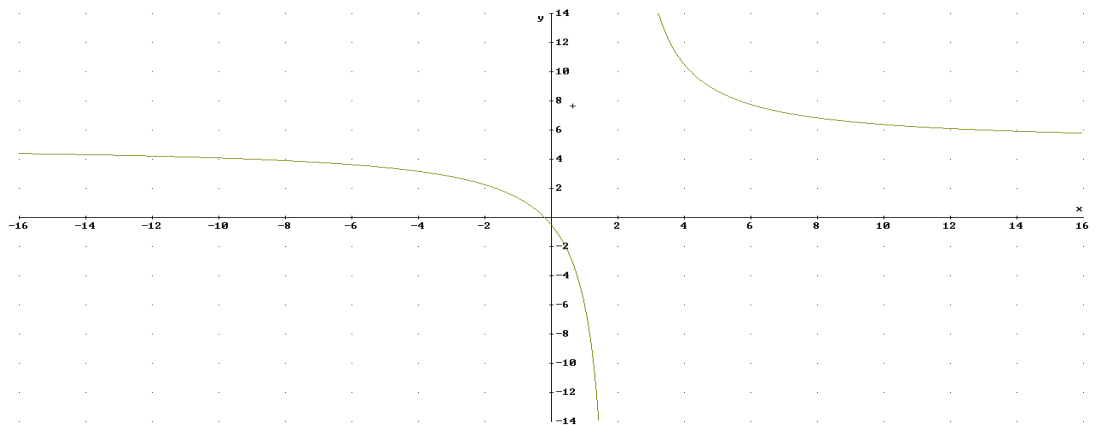
$$\frac{-4}{x - 3}$$



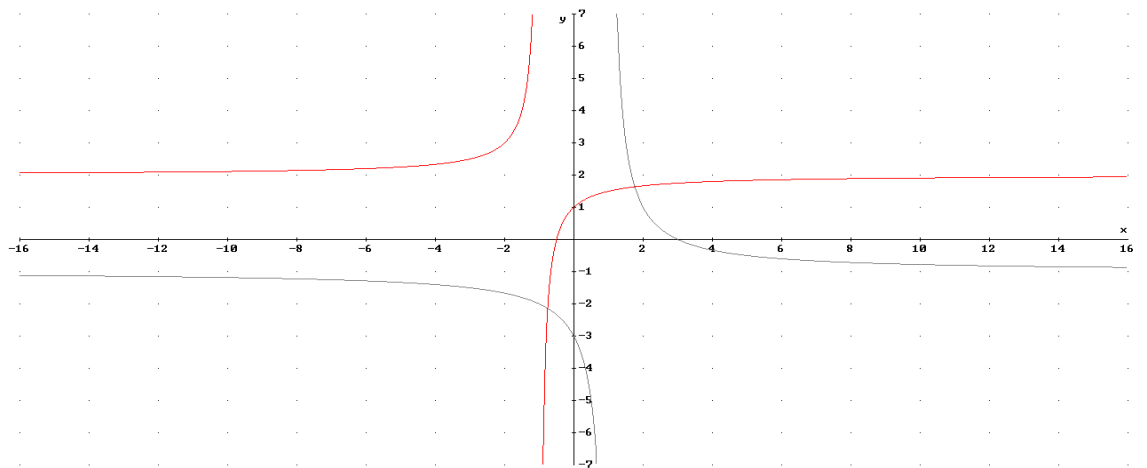
c)
$$\frac{5x + 1}{x - 2} \rightarrow y = f(x) = 5 + \frac{11}{x - 2}$$

$$\frac{-5x + 10}{x - 2} + 5$$

$$\frac{11}{x - 2}$$



Ejercicio 16: Identifica la expresión analítica de las siguientes gráficas:



Solución:

a) (Roja) AV: $x=x_0=-1$; AH $y=y_0=2 \rightarrow y=\frac{k}{x+1} + 2$. Para calcular k tomamos el punto (0,1): $1=\frac{k}{0+1} + 2 \rightarrow k=-1$. Luego la función es $y = \frac{-1}{x+1} + 2$

b) (azul) AV: $x=x_0=1$; AH $y=y_0=-1 \rightarrow y=\frac{k}{x-1} - 1$. Para calcular k tomamos el punto (0,-3): $-3=\frac{k}{0-1} - 1 \rightarrow k=2$. Luego la función es $y = \frac{2}{x-1} - 1$