

EXAMEN DE FUNCIONES

1. Representa gráficamente, de forma razonada, las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{|x+1|}{3-x}$$

(3 ptos)

$$g(x) = \begin{cases} 3^x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x-1) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(3 ptos)

$$h(x) = \cos x + |\cos x| + 1$$

(2 ptos)

$$j(x) = \max(5 - 2x, x^2 - 6x + 8)$$

(2 ptos)

2. Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{\frac{-2}{-x^2 + 2x + 8}} \quad g(x) = \frac{3x-4}{x-2} \quad h(x) = \sqrt{25-x^2} \quad j(x) = \sqrt{x-1}$$

$$k(x) = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-9}} \quad m(x) = 5 + \ln(3x-1) \quad n(x) = 3^{\cos 2x} - 2$$

Se pide:

- Dominio de definición de la función k. (2 ptos)
- La expresión analítica de las funciones $(f+h)$, $\left(\frac{j}{g}\right)$ y sus dominios de definición. (2 ptos + 1 pto)
- La expresión analítica de las funciones $g \circ j$ y $j \circ g$ y sus dominios de definición respectivos. (2 ptos + 2 ptos)
- La expresión analítica de $m^{-1}(x)$ y de $n^{-1}(x)$ (1 pto + 1 pto)

CONTROL 2 FUNCIONES

2) $K(x) = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-9}}$

(2.1)

a) → Para que el $\ln(x+4)$ esté bien definido, su argumento
 $x+4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \Rightarrow$ Esto es $x \in (-4, +\infty)$

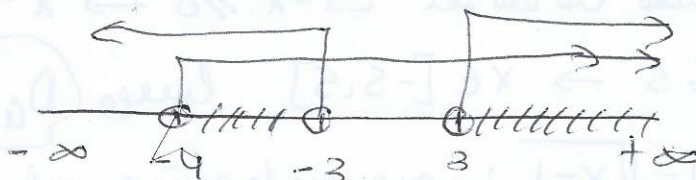
b) → Para que $\sqrt{x^2-9}$ exista, ha de ser el radicando
 $x^2-9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} \geq 3 \Rightarrow |x| \geq 3$ esto es
 $x \leq -3$ o $x \geq 3$.

c) → Para que el cociente esté bien definido el denominador
 no se debe anular:

$\frac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-9}}$ para que esté bien def $\sqrt{x^2-9} \neq 0$

luego vemos $\sqrt{x^2-9} = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3 \notin D_f$.

Queda



(intersección
de a), b) y c))

$D_K = (-4, -3) \cup (3, +\infty)$

2.2) Calcular los dominios de f , h , g y j

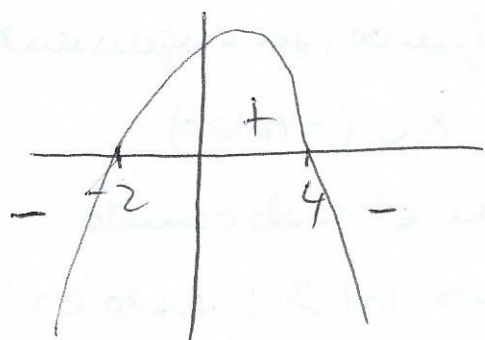
$f(x) = \sqrt{\frac{-2}{-x^2+2x+8}}$

→ Para que el cociente $\frac{-2}{-x^2+2x+8}$ esté bien definido,
 el denominador no debe anularse:

o sea $-x^2+2x+8 = 0 \rightarrow x^2-2x-8 = 0 \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases} \notin D_f$

→ Para qd la raíz $\sqrt{\frac{-2}{-x^2+2x+8}}$ exista, el radicando,

$$\frac{-2}{-x^2+2x+8} \geq 0 \text{ y como el numerador es constante } -2 < 0 \text{ ha de ser } -x^2+2x+8 \leq 0$$



le pinto
 $x \in (-\infty, -2] \cup [4, +\infty)$

Pero como $-2, 4 \notin D_f$ pues

pues: $D_f = (-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$

- Dominio para $g(x) = \frac{3x-4}{x-2} \rightarrow D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

ya qd para $x=2$ el denominador se anula y el cociente no estará bien definido.

- Dominio para $h(x) = \sqrt{25-x^2}$: para qd la raíz cuadrada exista, el radicando ha de ser $25-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 \leq 25 \rightarrow$

$$\sqrt{x^2} \leq 5 \rightarrow |x| \leq 5 \rightarrow x \in [-5, 5] \text{ luego } D_h = [-5, 5]$$

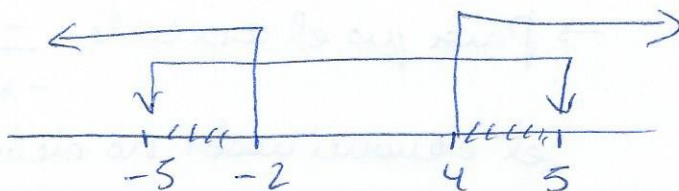
- Dominio para $j(x) = \sqrt{x-1}$: para qd la raíz cuadrada exista el radicando ha de ser $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$ luego $D_j = [1, +\infty)$

- Expresión de $(f+h)(x) = f(x) + h(x) =$

$$= \sqrt{\frac{-2}{-x^2+2x+8}} + \sqrt{25-x^2}$$

$$D_{f+h} = D_f \cap D_h = [(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)] \cap [-5, 5]$$

$D_{f+h} = [-5, -2) \cup (4, 5]$



$$-4 \quad D\left(\frac{j}{g}\right) = D_j \cap D_g \setminus \{x \in D_g \mid g(x)=0\}$$

$$\text{es } D_j \cap D_g = [-1, +\infty) \cap (\mathbb{R} \setminus \{2\})$$

$$\text{y es } g(x)=0 \Rightarrow \frac{3x-4}{x-2}=0 \Rightarrow 3x-4=0 \Rightarrow x=4/3$$

luego $D_{j/g} = [-1, 4/3) \cup (4/3, 2) \cup (2, +\infty)$ Expresión:

$$\left(\frac{j}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\left(\frac{3x-4}{x-2}\right)}$$

$\downarrow$
 $j(x)$
 $g(x)$

(2.3) Expresión y dominio de $g \circ j$:

$$(g \circ j)(x) = g(j(x)) = g(\sqrt{x-1}) = \frac{3\sqrt{x-1} - 4}{\sqrt{x-1} - 2}$$

$$D_{g \circ j} = \{x \in D_j \mid j(x) \in D_g\}$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $[-1, +\infty)$ $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

Veamos si hay algún $x \in D_j = [-1, +\infty)$ / $j(x)=2$:

$$j(x)=2 \Rightarrow \sqrt{x-1}=2 \Rightarrow x-1=4 \Rightarrow x=5 \in D_j$$

luego $D_{g \circ j} = [-1, 5) \cup (5, +\infty)$

$$(j \circ g)(x) = j(g(x)) = j\left(\frac{3x-4}{x-2}\right) = \sqrt{\frac{3x-4}{x-2} - 1}$$

$$D_{j \circ g} = \{x \in D_g = \mathbb{R} \setminus \{2\} \mid g(x) \in D_j = [-1, +\infty)\}$$

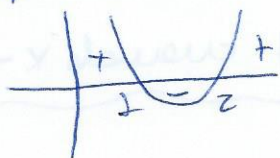
veamos cuantos son los $x \in D_g \mid g(x) \in D_j$: $\frac{3x-4}{x-2} \geq -1$

$$\Rightarrow \frac{3x-4}{x-2} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{3x-4-x+2}{x-2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-2}{x-2} \geq 0$$

Resolvamos la desigualdad $\frac{2x-2}{x-2} \geq 0$:

como signo $\left(\frac{2x-2}{x-2}\right) = \text{signo}(\underbrace{(2x-2)}_{\text{parábola}})(x-2)$ entonces:

representemos $(2x-2)(x-2) = p(x)$ $p(x)=0 \rightarrow x=1$
 $\rightarrow x=2$



luego $\frac{2x-2}{x-2} \geq 0 \Rightarrow (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

func $D_{f \circ g} = (-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$
 $\downarrow$ no p_o $2 \notin D_g$

2.4) $m(x) = 5 + \ln(3x-1)$

$$y = 5 + \ln(3x-1)$$

$$x = 5 + \ln(3y-1)$$

$$x-5 = \ln(3y-1)$$

$$e^{x-5} = 3y-1$$

$$3y = e^{x-5} + 1 \rightarrow y = \frac{1}{3}(e^{x-5} + 1)$$

$$m^{-1}(x) = \frac{1}{3}(e^{x-5} + 1)$$

$$n(x) = 3^{\cos 2x} - 2$$

$$y = 3^{\cos 2x} - 2$$

$$x = 3^{\cos 2y} - 2$$

$$x+2 = 3^{\cos 2y}$$

$$\log_3 3^{\cos 2y} = \log_3 (x+2)$$

$$\cos 2y \log_3 3 = \log_3 (x+2)$$

$$\cos 2y = \log_3 (x+2)$$

$$2y = \arccos(\log_3 (x+2))$$

$$n^{-1}(x) = \frac{1}{2} \arccos(\log_3 (x+2))$$

3) $f(x) = \frac{x+1}{3-x}$, desplazamos la función: $x+1=0 \rightarrow x=-1$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-1}{3-x} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x+1}{3-x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\} \text{ (según veremos)}$$

$\rightarrow$ Para $x \leq -1 \Rightarrow f(x) = \frac{-x-1}{3-x}$ no está bien definido el cociente para $x=3$, pero como $3 \neq -1$, entonces para $x \leq -1$ el cociente está bien definido.

para $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 0 \rightarrow (-1, 0)$ es un PC con Ox

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-1}{3-x} = 1 \Rightarrow y=1$ es AH cuando $x \rightarrow -\infty$

Plots auxiliares para $x \leq -1$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{-(-2)-1}{3-(-2)} = \frac{1}{5} \rightarrow \underline{(-2, 1/5)}$$

$$x = -3 \Rightarrow f(-3) = \frac{-(-3)-1}{3-(-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow \underline{(-3, 1/3)}$$

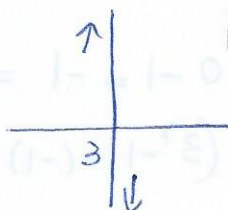
$\rightarrow$ Para $x > -1 \Rightarrow f(x) = \frac{x+1}{3-x}$

es $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{3-x} = 0 \rightarrow (-1, 0)$

Cuando $x=3 > -1$ como al denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{3-x} = \frac{4}{0} = ? \infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1}{3-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{3-x} = \frac{4}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

Cuando $x=3$ es AV



es $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{3-x} = -1 \Rightarrow y = -1$ es AH cuando $x \rightarrow +\infty$

Plots auxiliares para $x > -1$

$$x = 2 \rightarrow f(2) = \frac{2+1}{3-2} = \frac{3}{1} = 3 \rightarrow \underline{(2, 3)}$$

$$x = 4 \rightarrow f(4) = \frac{4+1}{3-4} = \frac{5}{-1} = -5 \rightarrow (4, -5)$$

PC en $x=0 \rightarrow f(0) = \frac{1}{3} \rightarrow (0, 1/3)$

$$x=5 \rightarrow f(5) = \frac{6}{-2} = -3 \rightarrow (5, -3)$$

(para $x > -1$ como al eje OX pues $\frac{x+1}{3-x} = 0 \rightarrow x = -1$)

en realidad, se unen las ramas en $(-1, 0)$

$\rightarrow$ Posiciones de la gráfica respecto de su AH

para $x \rightarrow -\infty$ es $y=1$ AH estudiemos el signo de:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x-1}{3-x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{-x-1-3+x}{3-x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4}{3-x} = 0^-$$

-3-

luego $f < y=1$

para $x \rightarrow +\infty$ es $y = -1$ AH, veamos el signo de:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{3-x} - (-1) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{3-x} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1+3-x}{3-x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{3-x} = 0^- \text{ luego } f < y = -1$$

$$\rightarrow g(x) = \begin{cases} 3^x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \log_{1/3}(x-1) & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

• Para $x < 1$ es $g(x) = 3^x - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} 3^x - 1 = 3^1 - 1 = 3 - 1 = 2 \rightarrow (2, 2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x - 1 = 3^{-\infty} - 1 = 0 - 1 = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ es AH } x \rightarrow -\infty$$

Ptos auxiliares: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3^x - 1) - (-1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x} = 0^+ \Rightarrow f > y = -1$

$$x = 0 \rightarrow f(0) = 3^0 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightarrow (0, 0) \rightarrow \text{PC ex, oy.}$$

$$x = -1 \rightarrow f(-1) = 3^{-1} - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \rightarrow (-1, -\frac{2}{3})$$

• Para $x > 1$ es $g(x) = \log_{1/3}(x-1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_{1/3}(x-1) = +\infty \Rightarrow x = 1 \text{ es Av cuando } x \rightarrow 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{1/3}(x-1) = -\infty$$

Ptos auxiliares:

$$x = 4 \rightarrow f(4) = \log_{1/3}(4-1) = \log_{1/3} 3 = -1 \rightarrow (4, -1)$$

$$x = 10 \rightarrow f(10) = \log_{1/3}(10-1) = \log_{1/3} 9 = -2 \rightarrow (10, -2)$$

Pc ex $f(x)=0 \rightarrow \log_{1/3}(x-1)=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^0 = x-1$

$1 = x-1 \Rightarrow x=2 \rightarrow \underline{(2,0)}$

al eje 0y no contiene mas $0 \neq 1$.

$$\rightarrow h(x) = \cos x + |\cos x| + 1 = \begin{cases} \cos x + (-\cos x) + 1 & \text{si } \cos x \leq 0 \\ \cos x + \cos x + 1 & \text{si } \cos x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } \cos x \leq 0 \\ 2\cos x + 1 & \text{si } \cos x \geq 0 \end{cases}$$

Distingamos la función a partir de los valores de $\cos x$;

$x=0 \rightarrow h(0) = 2 \cdot \cos 0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \rightarrow (0, 3)$

$x=\frac{\pi}{2} \rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} + 1 = 1 \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

$\rightarrow f(x) = \max(\underbrace{5-2x}_r, \underbrace{x^2-6x+8}_p)$

Obtenemos los pto de intersección:

$$\begin{cases} y = 5-2x \\ y = x^2-6x+8 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 5-2x &= x^2-6x+8 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \\ x=1 &\rightarrow y=5-2 \cdot 1=3 \rightarrow (1, 3) \\ x=3 &\rightarrow y=5-2 \cdot 3=-1 \rightarrow (3, -1) \end{aligned}$$

Verfúce da parabola: $p(x) = x^2 - 6x + 8$

$$u = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3 ; \quad \theta = f(3) = 9 - 18 + 8 = -1 \rightarrow \underline{V(3, -1)}$$

PC ex $p(x) = 0 \rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = 4 \rightarrow (4, 0)$

$x = 2 \rightarrow (2, 0)$

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \leq 1 \\ 5 - 2x & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 8 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

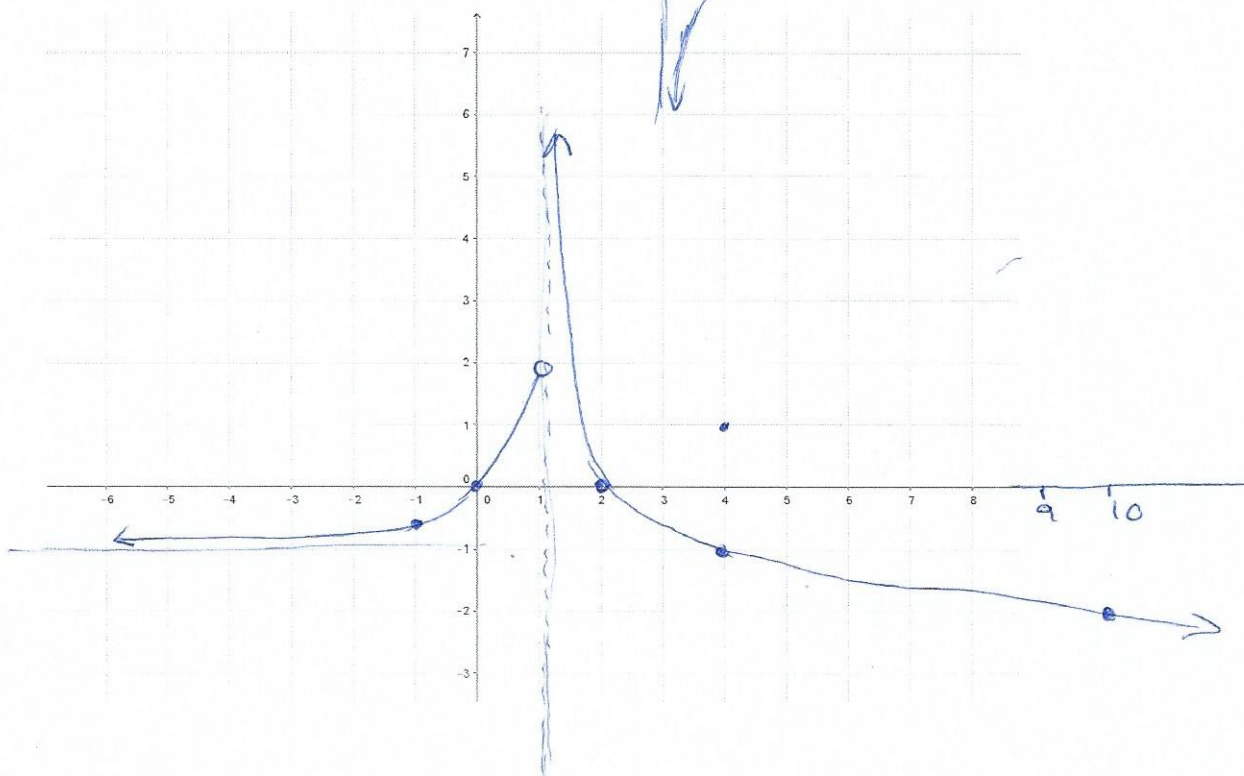
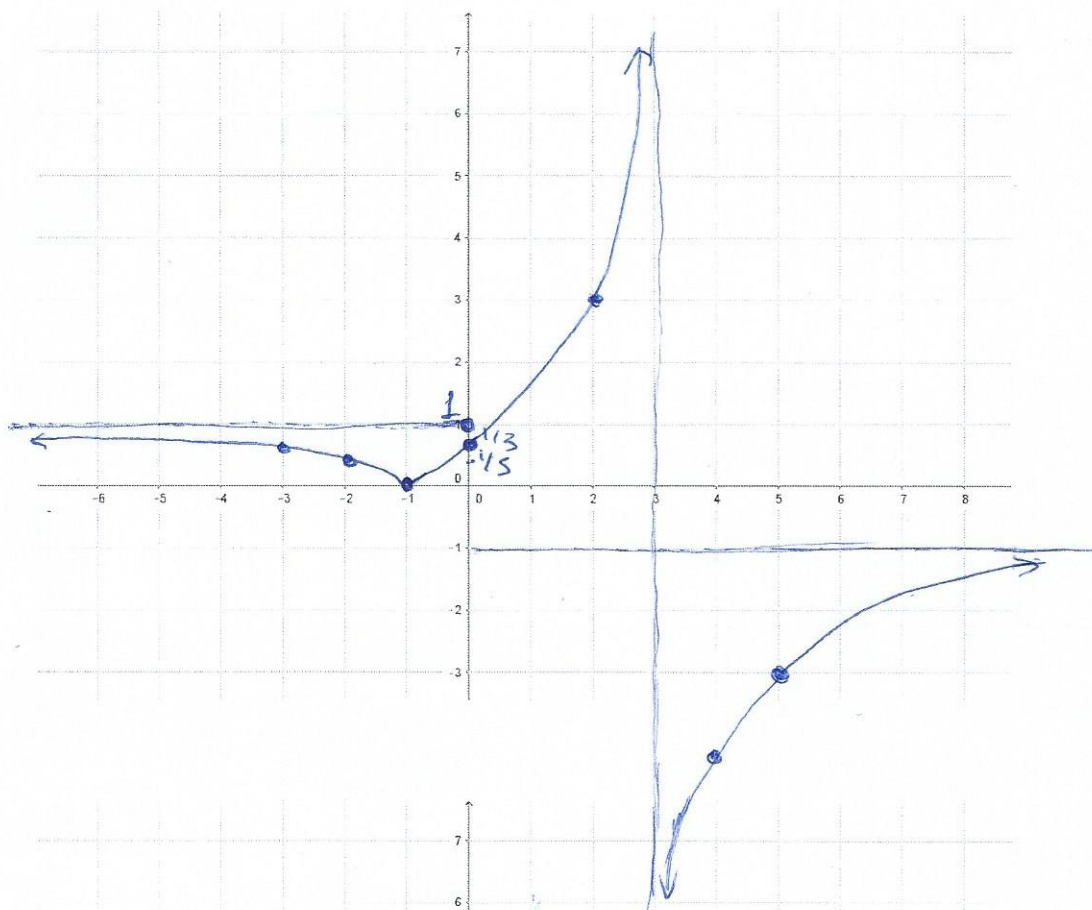
$$f(x) = \max \left(\frac{2-5x}{9}, \frac{x^2-2}{9} \right) \rightarrow$$

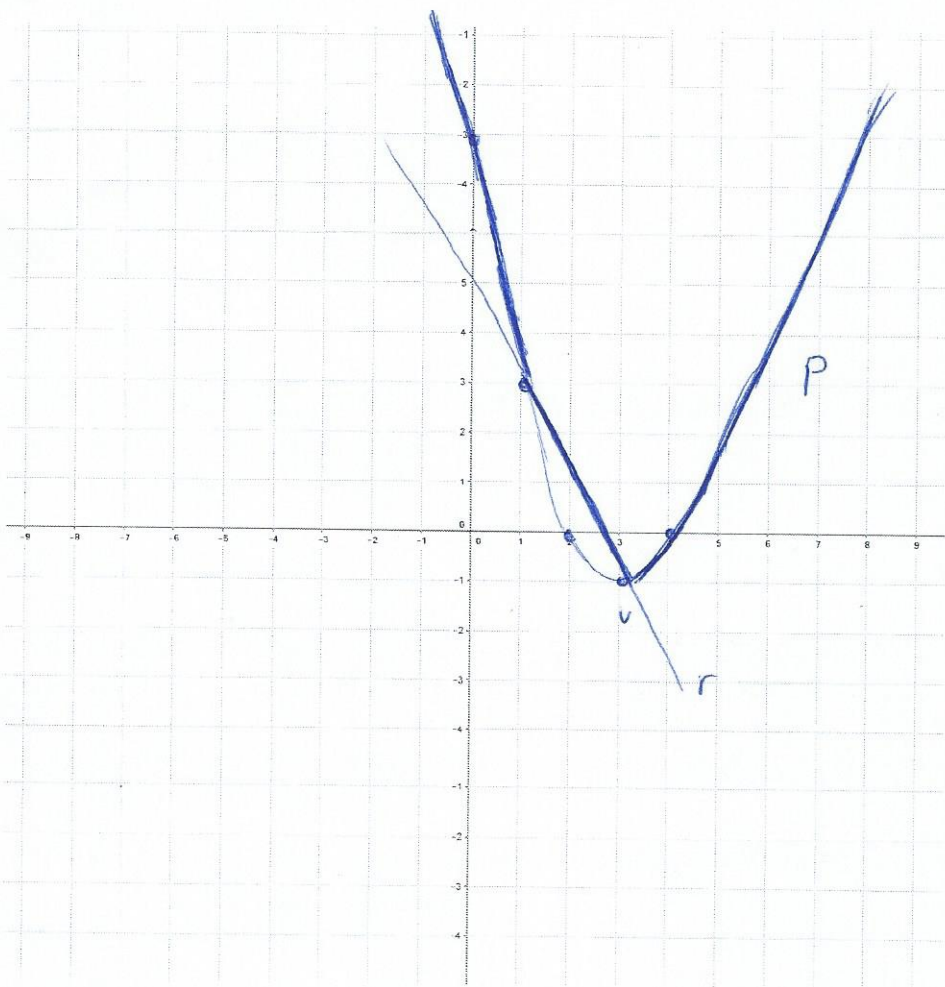
Observa-se que as duas funçóes se intersectam em:

$$\begin{cases} 2-5x = x^2-2 \\ 8+2-5x = x^2-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+5x-4=0 \\ x^2-7x+4=0 \end{cases}$$

$$(1, 2) \leftarrow 2 = 1^2 - 5 \cdot 1 + 8 = 2 \rightarrow 1 = x$$

$$(1, -1) \leftarrow -1 = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = -1 \rightarrow x = 1$$





es.

