INTEGRAL INDEFINIDA E INTEGRAL DEFINIDA. APLICACIONES

1. a) Explicar el concepto de función primitiva.
b) Sea $f(x) = e^{2x} - 2x^2 + 8$, justificar si es primitiva de alguna de las siguientes funciones:

$$g(x) = e^{2x} - 4x + 8 \qquad\qquad h(x) = 2e^{2x} - 4x$$

c) Enunciar la regla de Barrow y aplicarla para calcular: $\int_0^1 (2e^{2x} - 4x)dx$

Solución:
a) Sean $f(x)$ y $F(x)$ dos funciones reales definidas en un mismo dominio. La función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, si $F(x)$ tiene por derivada a $f(x)$. Es decir:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

b) Para que $f(x)$ sea primitiva de $g(x)$ es necesario que: $f'(x) = g(x)$. Veamos si es así:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4x \neq g(x)$$

Por tanto, $f(x)$ no es una primitiva de $g(x)$.
Para que $f(x)$ sea primitiva de $h(x)$ es necesario que: $f'(x) = h(x)$. Veamos si es así:

$$f'(x) = 2e^{2x} - 4x = h(x)$$

Por tanto, $f(x)$ es una primitiva de $h(x)$.

c) La regla de Barrow nos dice que si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, se verifica que:

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Es decir, "la integral definida de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al valor que toma una primitiva $F(x)$ en el punto b, menos el que toma dicha primitiva en el punto a".
Así:

$$\int_0^1 (2e^{2x} - 4x)dx = \left[e^{2x} - 2x^2\right]_0^1 = (e^2 - 2) - (e^0 - 0) = e^2 - 3$$

2. Sea $f(x) = 3x^2 - 6x$.
   a) Justificar cuál de las siguientes funciones es primitiva de la anterior:

$$U(x) = 3x^3 + 3x^2 \qquad\qquad V(x) = x^3 - 3x^2$$

   b) Calcular $\int_0^4 (3x^2 - 6x)dx$

Solución:
a) La función $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$, si $F(x)$ tiene por derivada a $f(x)$. Es decir:

$$F(x) \text{ es primitiva de } f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F'(x) = f(x)$$

Como:

$$U'(x) = 9x^2 + 6x \neq f(x) \qquad \text{y} \qquad V'(x) = 3x^2 - 6x = f(x)$$

Se tiene que $V(x)$ es la primitiva de $f(x)$.
Otra forma de hacer este apartado es:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 - 6x)dx = x^3 - 3x^2 + C$$

Como dos funciones primitivas de una función dada únicamente pueden diferir en una constante, encontramos que sólo $V(x) = x^3 - 3x^2$ puede ser primitiva de $f(x)$.

b) Aplicando la regla de Barrow, tendremos que:

$$\int_0^4 (3x^2 - 6x)dx = \left[x^3 - 3x^2\right]_0^4 = (64 - 48) - 0 = 16$$

3. Sea la función $F(x) = x^4 + ax^3 + bx$. Calcular a y b, sabiendo que:
   a) El punto (1, 2) pertenece a la gráfica de $F(x)$.
   b) $F(x)$ es función primitiva de cierta función $f(x)$ cuya integral en el intervalo [1, 2] es igual a 10.

Solución:
Como el punto (1, 2) pertenece a la función $F(x) = x^4 + ax^3 + bx$, se tiene que:

$$F(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + a + b \quad \Rightarrow \quad a + b = 1$$

Como $\int_1^2 f(x)dx = 10$, tenemos que:

$$\int_1^2 f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^2 = F(2) - F(1) = 10$$

Entonces:

$$10 = F(2) - F(1) = (16 + 8a + 2b) - (1 + a + b) = 7a + b + 15 \quad \Rightarrow \quad 7a + b = -5$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones:

$$a + b = 1$$
$$7a + b = -5$$

tendremos $a = -1$ y $b = 2$.

4. Dada la función: $f(x) = (x + 1)(3x - 2)$:
   a) Calcular una primitiva de $f(x)$.
   b) Justificar que la función $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ no es primitiva de $f(x)$.
   c) Calcular $\int_0^1 (x+1)(3x-2)dx$.

Solución:
a) Una primitiva de la función puede de ser:

$$\int (x+1)(3x-2)dx = \int (3x^2 + x - 2)dx = x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

b) La función $F(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ no puede ser una primitiva de $f(x)$ puesto que:

$$F'(x) = 3x^2 + 4x \neq f(x)$$

c)

$$\int_0^1 (x+1)(3x-2)dx = \left[x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = \left(1 + \frac{1}{2} - 2\right) - (0) = -\frac{1}{2}$$

5. a) Sea $f(x) = 2x^4 - x^3 + 2$. Deducir razonadamente si es primitiva de alguna de las siguientes funciones:

$$g(x) = 8x^3 - 3x^2 \qquad\qquad h(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2$$

b) Calcular: $\int_0^2 (8x^3 - 3x^2)dx$.

Solución:

a) Para que $f(x)$ sea primitiva de $g(x)$ es necesario que: $f'(x) = g(x)$. Veamos si es así:

$$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 = g(x)$$

Por tanto, $f(x)$ es una primitiva de $g(x)$.

Para que $f(x)$ sea primitiva de $h(x)$ es necesario que: $f'(x) = h(x)$. Veamos si es así:

$$f'(x) = 8x^3 - 3x^2 \neq h(x)$$

Por tanto, $f(x)$ no es una primitiva de $h(x)$.

b)

$$\int_0^2 (8x^3 - 3x^2)dx = \left[2x^4 - x^3\right]_0^2 = (32 - 8) - (0) = 24$$

6. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx + c$, calcular los valores de a, b y c, sabiendo que:
   a) $F(x) = x^4 - 2x^2 + cx$ es una primitiva de $f(x)$.
   b) La integral de $f(x)$ en el intervalo [0, 1] es igual a 1.

Solución:

Como $F(x) = x^4 - 2x^2 + cx$ es una primitiva de $f(x)$, tendremos que $F'(x) = f(x)$, es decir:

$$F'(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad 4x^3 - 4x + c = ax^3 + bx + c \quad \Rightarrow \quad a = 4 \;\text{ y }\; b = -4$$

Por otra parte, como la integral de $f(x)$ en el intervalo [0,1] es igual a 1, tendremos que:

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[F(x)\right]_0^1 = F(1) - F(0) = 1$$

Entonces:

$$F(1) - F(0) = (1^4 - 2 \cdot 1^2 + c) - (0^4 - 2 \cdot 0^2 + c \cdot 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 + c = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

7. Dada la función $f(x) = x + \dfrac{a}{x^3}$, donde a es una constante, se pide:
   a) Encontrar una primitiva de f.
   b) Si F es una primitiva de f, ¿puede serlo también $G(x) = F(x) + 2x$?
   c) Encontrar a sabiendo que $\int_1^2 f(x)dx = 1,5$.

Solución:

a) Para encontrar una primitiva de $f(x)$, determinaremos:

$$\int f(x)dx = \int\left(x + \frac{a}{x^3}\right)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{a}{2x^2} + C$$

Cualquier función de la forma anterior, siendo C una constante, será una primitiva de $f(x)$.

b) Si F es una primitiva de f, entonces $G(x) = F(x) + 2x$ no puede serlo. Dos primitivas de una función dada, únicamente pueden diferir en una constante. Sí sería una primitiva de $f(x)$ la función:

$$H(x) = F(x) + 2$$

c) Sabemos que $\int_1^2 f(x)dx = 1{,}5$, es decir:

$$\int_1^2 f(x)dx = \left[F(x)\right]_1^2 = F(2) - F(1) = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{a}{2\cdot 2^2}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{a}{2\cdot 1^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3a}{8} = 1{,}5 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

8. Dada la función $f(x) = a e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$), donde a es una constante:
   a) Calcular $\int_1^2 f(x)dx$ en función de a.
   b) Se sabe que F es una primitiva de f. Calcular a si $F(1) = 0$ y $F(2) = \frac{1}{2}$.

Solución:
a)

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(a e^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \left[3a e^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(3a e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}\right) - \left(3a e^{\frac{1}{3}} - 1\right) = 3a\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}$$

b) Por ser $F(x)$ una primitiva de $f(x)$, tendremos que:

$$F(x) = 3a e^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{x} + C$$

Como $F(1) = 0$ y $F(2) = \frac{1}{2}$, entonces:

$$F(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3a e^{\frac{1}{3}} - 1 + C = 0$$

$$F(2) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3a e^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} + C = \frac{1}{2}$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido se llega a que:

$$a = 0 \quad \text{y} \quad C = 1$$

9. Dada la función $f(x) = x e^{\frac{x}{2}}$
   a) Calcular una primitiva de f.
   b) Calcular $\int_0^2 f(x)dx$.
   c) Si F y G son primitivas de f, y $H = F - G$, ¿es posible que la derivada de H sea la función x^2?

Solución:

a) Calcular una primitiva de $f(x)$ significa calcular $\int f(x)dx = \int x e^{\frac{x}{2}} dx$. Para resolver dicha integral es necesario recurrir al método de integración por partes:

$$\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$$

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^{\frac{x}{2}}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = 2\,e^{\frac{x}{2}}$$

Entonces:

$$\int f(x)dx = \int x\,e^{\frac{x}{2}}dx = 2x\,e^{\frac{x}{2}} - \int 2\,e^{\frac{x}{2}}dx = 2x\,e^{\frac{x}{2}} - 4\,e^{\frac{x}{2}} = 2\,e^{\frac{x}{2}}\,(x-2) + C$$

b)

$$\int_0^2 f(x)dx = \left[2e^{\frac{x}{2}}(x-2)\right]_0^2 = (0) - (-4) = 4$$

c) Si F y G son dos primitivas de f, entonces únicamente difieren en una constante. Por tanto, la función $H = F - G$ ha de ser una constante. Como la derivada de una función constante es cero, resulta imposible que la derivada de H sea la función x^2.

10. Calcula la integral definida de la función $f(x) = e^x\,(x + 1)$ en el intervalo [0, 1].

Solución:

Debemos calcular $\int_0^1 e^x(x+1)dx$. Para resolver la integral indefinida, es necesario recurrir al método de integración por partes:

$$u = x + 1 \quad \Rightarrow \quad du = dx$$
$$dv = e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$$

Entonces:

$$\int e^x(x+1)dx = (x+1)\,e^x - \int e^x dx = (x+1)\,e^x - e^x = x\,e^x + C$$

Así:

$$\int_0^1 e^x(x+1)dx = \left[x\,e^x\right]_0^1 = e$$

11. Determina el área bajo la curva de la función $f(x) = \text{Ln}\,x$, en el intervalo $[1, e]$.

Solución:

Como que la función logaritmo neperiano no adopta valores negativos en intervalo $[1, e]$, para determinar el área pedida bastará con calcular:

$$\acute{A}rea = \int_1^e \text{Ln}\,x\,dx$$

Para resolver la integral indefinida es necesario recurrir al método de integración por partes:

$$u = \text{Ln}\,x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

Entonces:

$$\int \text{Ln}\,x\,dx = \text{Ln}\,x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = \text{Ln}\,x \cdot x - x = x\,(\text{Ln}\,x - 1) + C$$

Así:

$$Área = \int_1^e \text{Ln}(x)\,dx = [x(\text{Ln}\,x - 1)]_1^e = e\,(\text{Ln}\,e - 1) - 1\,(\text{Ln}\,1 - 1) = 0 - (-1) = 1 \text{ u}^2$$

12. Sea $f(x) = x^2 + bx$, donde b es una constante.

a) Encuentra b, sabiendo que hay una primitiva, F, de f, con $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$. Encuentra también la expresión de F.

b) Dibuja la curva $f(x)$ cuando $b = -1$ y halla el área delimitada por dicha curva y el eje de abscisas entre los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

a) Determinamos una primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (x^2 + bx)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + C$$

Como $F(0) = 2$ y $F(3) = 20$, tenemos que:

$$F(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad 0 + 0 + C = 2$$

$$F(3) = 20 \quad \Rightarrow \quad 9 + \frac{9b}{2} + C = 20$$

Resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido se llega a que:

$$b = 2 \quad \text{y} \quad C = 2$$

Por tanto, la expresión de F es:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + 2$$

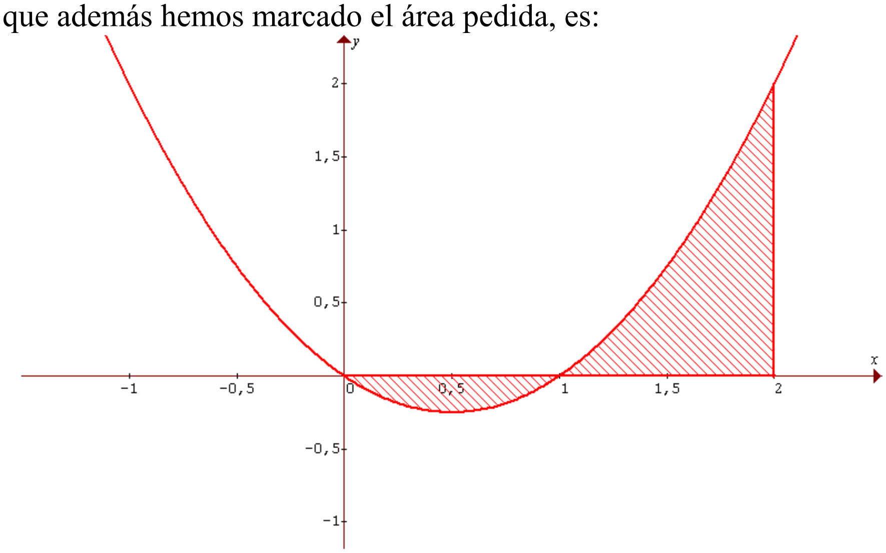
b) Si $b = -1$, tendremos que $f(x) = x^2 - x$. Se trata de una parábola con las ramas dirigidas hacia arriba. Su vértice tendrá como coordenadas al punto $V = \left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$. Por tanto, será:

$$x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \qquad y_V = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Los puntos de corte de esta parábola con el eje OX serán:

$$x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x\,(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ y } x = 1 \quad \Rightarrow \quad (0, 0) \text{ y } (1, 0)$$

Su gráfica, en la que además hemos marcado el área pedida, es:



Por tanto, para calcular el área pedida habrá que descomponerla en la suma de los valores absolutos de dos integrales definidas:

$$\acute{A}rea = \left|\int_0^1 (x^2 - x)\,dx\right| + \int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 =$$

$$= \left|\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - 0\right]\right| + \left[\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right] = \left|-\frac{1}{6}\right| + \left[\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right)\right] = 1 \text{ u}^2$$

13. Sea la función $f(x) = (x + a)\; e^{\frac{x}{2}+1}$, donde a es una constante.

a) Encuentra una primitiva de f.

b) Calcula a, sabiendo que $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 8$.

Solución:

a) Se trata de resolver la siguiente integral indefinida:

$$\int f(x)dx = \int (x+a)e^{\frac{x}{2}+1}\,dx = \int x\,e^{\frac{x}{2}+1}\,dx + a\int e^{\frac{x}{2}+1}\,dx$$

La segunda integral es inmediata:

$$\int e^{\frac{x}{2}+1}\,dx = 2\,e^{\frac{x}{2}+1}$$

Para resolver la primera integral es necesario recurrir al método de integración por partes:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{\frac{x}{2}+1}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = 2\;e^{\frac{x}{2}+1}$$

Por tanto:

$$\int x\,e^{\frac{x}{2}+1}\,dx = 2x\;e^{\frac{x}{2}+1} - 2\int e^{\frac{x}{2}+1}\,dx = 2x\;e^{\frac{x}{2}+1} - 4\;e^{\frac{x}{2}+1}$$

Entonces:

$$\int (x+a)e^{\frac{x}{2}+1}\,dx = 2x\;e^{\frac{x}{2}+1} - 4\;e^{\frac{x}{2}+1} + 2a\;e^{\frac{x}{2}+1} + C = 2\;e^{\frac{x}{2}+1}\;(x - 2 + a) + C$$

b) Como sabemos que $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 8$, entonces:

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \left[2\,e^{\frac{x}{2}+1}(x-2+a)\right]_{-2}^{2} = 2a\,e^2 - 2(a-4) = 2a\;e^2 - 2\;(a-4) = 2a\;e^2 - 2a + 8$$

$$2a\;e^2 - 2a + 8 = 8 \quad \Rightarrow \quad 2a\;e^2 - 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a\;(e^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

14. Sea la función $f(x) = 3ax^2 + \dfrac{2a}{x^3} + 5$ $(x > 0)$, donde a es una constante.

a) Encuentra el valor de a sabiendo que cierta función F es una primitiva de f y verifica que $F(1) = 6$ y $F(2) = 42$.

b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior, encuentra el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

a) Encontremos una primitiva de $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3ax^2 + \frac{2a}{x^3} + 5)\,dx = ax^3 - \frac{a}{x^2} + 5x + C$$

Aplicando las condiciones que debe cumplir la primitiva buscada, tenemos que:

$$F(1) = 6 \quad \Rightarrow \quad a - a + 5 + C = 6 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$F(2) = 42 \quad \Rightarrow \quad 8a - \frac{a}{4} + 10 + C = 42 \quad \Rightarrow \quad 8a - \frac{a}{4} = 31 \quad \Rightarrow \quad 31a = 124 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Entonces:

$$F(x) = 4x^3 - \frac{4}{x^2} + 5x + 1$$

b) Cuando $a = 4$ la función será $f(x) = 12x^2 + \dfrac{8}{x^3} + 5$. Como esta función está definida para valores positivos de x, en el intervalo de integración la función no se anula, es decir, no corta al eje OX, y por tanto, el área pedida viene dada por:

$$\text{Área} = \int_1^2 (12x^2 - \frac{8}{x^3} + 5)\,dx = \left[4x^3 + \frac{4}{x^2} + 5x\right]_1^2 = (32 + 1 + 10) - (4 + 4 + 5) = 43 - 13 = 30 \text{ u}^2$$

15. Sea la función $f(x) = x^3 - 27 + ax\,e^{x^2}$, donde a es una constante.

a) Encuentra una primitiva de f.

b) Si $a = 0$, dibuja la función f y encuentra el área limitada por la curva y el eje OX entre $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

a) Se trata de determinar $\int f(x)\,dx$:

$$\int f(x)\,dx = \int (x^3 - 27 + axe^{x^2})\,dx = \frac{x^4}{4} - 27x + \frac{a}{2}e^{x^2} + C$$

b) Si $a = 0$, tenemos que $f(x) = x^3 - 27$. Representémosla:

- *Dom* $f = \mathbb{R}$.
- Cortes con los ejes:

  Eje OX $(y = 0)$:

  $x^3 - 27 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad (3, 0)$

  Eje OY $(x = 0)$:

  $y = -27 \quad \Rightarrow \quad (0, -27)$
- Simetrías

$$f(-x) = (-x)^3 - 27 = -x^3 - 27 \quad \Rightarrow \quad f(-x) \neq f(x) \quad \text{y} \quad f(-x) \neq -f(x)$$

Por tanto no hay simetrías ni par ni impar.

- Monotonía y extremos:

  Para estudiar la monotonía, calculemos $f'(x)$:

  $$f'(x) = 3x^2$$

  Los puntos singulares son las soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$:

  $$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ (doble)}$$

  Si estudiamos el signo de la derivada, observamos que siempre es positiva ($3x^2 \geq 0$), salvo en dicho punto singular. Por tanto, la función será creciente en todo su dominio. El punto $x = 0$ no es un extremos, ya que en él no cambia la monotonía.

- Curvatura y puntos de inflexión:

  Para estudiar la curvatura, calculemos $f''(x)$:

  $$f''(x) = 6x$$

  Los puntos de inflexión son las soluciones de la ecuación $f''(x) = 0$:

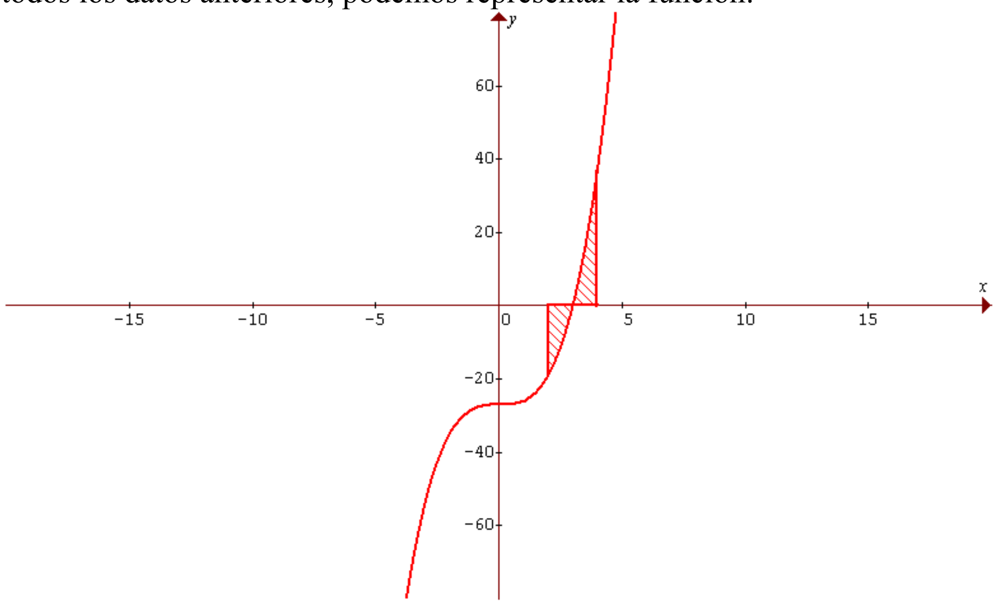
  $$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

  Si estudiamos el signo de la derivada segunda, observamos que siempre es positiva para valores positivos de x, y que es negativa para valores negativos de x. Por tanto, es cóncava en $(-\infty, 0)$ y convexa en $(0, +\infty)$. El punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

- Asíntotas:

  No tiene (es una función polinómica).

Resumiendo todos los datos anteriores, podemos representar la función:



Para determinar el área pedida (parte rayada en la figura anterior), tengamos en cuenta que la función corta al eje OX en el punto $x = 3$, con lo cual:

$$\left| \int_2^3 (x^3 - 27)\, dx \right| + \int_3^4 (x^3 - 27)\, dx = \left| \left[\frac{x^4}{4} - 27x \right]_2^3 \right| + \left[\frac{x^4}{4} - 27x \right]_3^4 =$$

$$= \left| \left(\frac{81}{4} - 81 \right) - (4 - 54) \right| + \left[(64 - 108) - \left(\frac{81}{4} - 81 \right) \right] = \left| -\frac{43}{4} \right| + \frac{67}{4} = \frac{110}{4} = \frac{55}{2} \text{ u}^2$$

16. a) Dada la función $f(x) = \dfrac{a}{x} + 3x^2 - x^3$, encuentra a para que $f'(-1) = -10$.
b) Encuentra el área limitada por la curva $f(x) = 3x^2 - x^3$ y el eje OX, entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:
a) Calculemos $f'(x)$:

$$f'(x) = -\frac{a}{x^2} + 6x - 3x^2$$

Como $f'(-1) = -10$, se tiene que:

$$f'(-1) = -10 \quad \Rightarrow \quad -a - 6 - 3 = -10 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

b) Para calcular el área pedida, estudiemos los puntos en los que la función f corta al eje OX:

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(3 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ (doble) y } x = 3$$

Como la función se anula en $x = 0$, para calcular el área pedida vendrá dada por (se ha de tener en cuenta que tanto en el intervalo $[-1, 0]$, como en el intervalo $[0, 2]$ la función es positiva, es decir, su gráfica se mantiene por encima del eje OX):

$$Área = \int_{-1}^{0} (3x^2 - x^3)\,dx + \int_{0}^{2} (3x^2 - x^3)\,dx = \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[x^3 - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \left[0 - \left(-1 - \frac{1}{4}\right)\right] + \left[(8-4) - 0\right] = \frac{21}{4} \text{ u}^2$$

17. Calcula una función real $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las condiciones siguientes:

$$f'(0) = 5, \qquad f''(0) = 1, \qquad f(0) = 0 \qquad \text{y} \qquad f'''(x) = x + 1$$

Solución:
Como $f'''(x) = x + 1$, integremos esta función para obtener $f''(x)$.

$$f''(x) = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + C$$

La constante C la podemos calcular teniendo en cuenta la condición $f''(0) = 1$.

$$f''(0) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{0^2}{2} + 0 + C = 1 \qquad \Rightarrow \qquad C = 1$$

Así pues, $f''(x) = \dfrac{x^2}{2} + x + 1$.
Calculemos ahora $f'(x)$, integrando $f''(x)$.

$$f'(x) = \int \left(\frac{x^2}{2} + x + 1\right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x + C'$$

Hallemos C', teniendo en cuenta la condición de que $f'(0) = 5$.

$$f'(0) = 5 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{0^3}{6} + \frac{0^2}{2} + 0 + C' = 5 \qquad \Rightarrow \qquad C' = 5$$

Así pues, $f'(x) = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2}{2} + x + 5$.
Finalmente, integrando $f'(x)$, encontraremos $f(x)$.

$$f(x) = \int\left(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+5\right)dx = \frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+5x+\text{C''}.$$

Para conocer C'', imponemos la condición $f(0) = 0$.

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{0^4}{24}+\frac{0^3}{6}+\frac{0^2}{2}+5\cdot 0+\text{C''}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{C''} = 0$$

Por tanto, la función pedida es:

$$f(x) = \frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+5x$$

18. Se sabe que la gráfica de una función f pasa por el punto (1, 1) y que $f'(1) = 2$. Se conoce también que su derivada segunda es la función $g(x) = 2$. Calcula razonadamente la función f.

Solución:

Tengamos en cuenta que $g(x) = f''(x) = 2$. La función f' es primitiva de la función f''. Se tiene entonces:

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x + \text{C}$$

Pero como $f'(1) = 2$, se tiene que $2 = 2\cdot 1 + \text{C}$, con lo que C = 0.

Por otra parte, f es una primitiva de la función f', con lo cual:

$$f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad \int f'(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + \text{K}$$

Como la gráfica de f pasa por (1, 1), se tiene que $1 = 1^2 + \text{K}$, con lo que K = 0.

Por lo tanto, la función f buscada es $f(x) = x^2$.

19. Halla una primitiva de la función $f(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^4}}$ que se anule en $x = 1$.

Solución:

El conjunto de todas las primitivas de la función f viene dado por la integral indefinida:

$$\text{F}(x) = \int\frac{-x}{\sqrt{1-x^4}}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = -\frac{\text{arcsen}\,x^2}{2}+\text{C}$$

La primitiva que buscamos se anula en $x = 1$, luego:

$$\text{F}(1) = -\frac{\text{arcsen}\,x^2}{2}+\text{C}=0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+\text{C}=0 \quad \Rightarrow \quad \text{C} = \frac{\pi}{4}$$

Por tanto, la primitiva pedida es: $\quad \text{F}(x) = -\dfrac{\text{arcsen}\,x^2}{2}+\dfrac{\pi}{4}$

20. Calcular la integral $\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx$.

Solución:
Calculemos esta integral mediante un cambio de variable. Sea:

$$x = t^2 \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2t\, dt$$

Así:

$$\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{2t\, dt}{t^2+t} = 2\int \frac{dt}{t+1} = 2 \text{ Ln } |t+1| + \text{C} = 2 \text{ Ln } (x^2+1) + \text{C}$$

21. Resuelve $\int \frac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1+16^x}\, dx$

Solución:
En primer lugar escribimos de otra forma la integral anterior, teniendo en cuenta que:

$$16^x = (4^2)^x = 4^{2x}.$$

$$\int \frac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1+16^x}\, dx = \int \frac{4^x + 5 \cdot 4^{2x}}{1+4^{2x}}\, dx$$

Hagamos ahora el siguiente cambio de variable:

$$t = 4^x \qquad \Rightarrow \qquad dt = 4^x \cdot \text{Ln } 4 \cdot dx$$

$$\int \frac{4^x + 5 \cdot 4^{2x}}{1+4^{2x}}\, dx = \frac{1}{\text{Ln}4} \int \frac{(1+5\cdot 4^x)\cdot 4^x \cdot \text{Ln}4 \cdot dx}{1+(4^x)^2} = \frac{1}{\text{Ln}4} \int \frac{(1+5t)dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{\text{Ln}4}\left[\int \frac{dt}{1+t^2} + \frac{5}{2}\int \frac{2t\, dt}{1+t^2}\right] = \frac{1}{\text{Ln}4}\left[\text{arctg}\,(t) + \frac{5}{2}\text{Ln}(1+t^2)\right] + \text{C}$$

Deshaciendo el cambio de variable realizado anteriormente, se llega a:

$$\int \frac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1+16^x}\, dx = \frac{1}{\text{Ln}4}\left[\text{arctg}\,(t) + \frac{5}{2}\text{Ln}(1+t^2)\right] + \text{C} = \frac{\text{arctg}\,(4^{2x})}{\text{Ln}4} + \frac{5 \cdot \text{Ln}(1+4^{2x})}{2 \cdot \text{Ln}4} + \text{C}$$

22. Calcula la integral $\int e^{3x} \cdot \cos 2x\, dx$.

Solución:
Resolvemos esta integral por el método de integración por partes: $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

$$u = \cos 2x \qquad \Rightarrow \qquad du = -2 \text{ sen } 2x\, dx$$

$$\text{e}^{3x}\, dx = dv \qquad \Rightarrow \qquad v = \int e^{3x}\, dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

Por tanto:

$$\int e^{3x} \cdot \cos 2x\, dx = \frac{e^{3x}}{3} \cdot \cos 2x + \frac{2}{3}\int e^{3x} \cdot \text{sen } 2x\, dx$$

La integral que nos aparece ahora la podemos intentar resolver de nuevo mediante integración por partes.

$$u = \text{sen } 2x \qquad \Rightarrow \qquad du = 2 \cos 2x\, dx$$

$$e^{3x}\,dx = dv \quad \Rightarrow \quad v = \int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\int e^{3x}\cdot \text{sen}\,2x\,dx = \frac{e^{3x}}{3}\cdot \text{sen}\,2x - \frac{2}{3}\int e^{3x}\cdot \cos 2x\,dx$$

Esto es:

$$\int e^{3x}\cdot \cos 2x\,dx = \frac{e^{3x}}{3}\cdot \cos 2x + \frac{2}{3}\left[\frac{e^{3x}}{3}\cdot \text{sen}\,2x - \frac{2}{3}\int e^{3x}\cdot \cos 2x\,dx\right] =$$

$$= \frac{e^{3x}}{3}\cdot \cos 2x + \frac{2e^{3x}}{9}\cdot \text{sen}\,2x - \frac{4}{9}\int e^{3x}\cdot \cos 2x\,dx$$

Llamando a la integral original J, se tiene que:

$$J = \frac{e^{3x}}{3}\cdot \cos 2x + \frac{2e^{3x}}{9}\cdot \text{sen}\,2x - \frac{4}{9}J$$

De aquí obtenemos que $\quad J + \frac{4}{9}J = \frac{e^{3x}}{3}\cdot \cos 2x + \frac{2e^{3x}}{9}\cdot \text{sen}\,2x$

Esto es: $\frac{13}{9}\ J = \frac{e^{3x}}{3}\cdot \cos 2x + \frac{2e^{3x}}{9}\cdot \text{sen}\,2x$

De aquí se deduce que $J = \int e^{3x}\cdot \cos 2x\,dx = \frac{9e^{3x}}{39}\cdot \cos 2x + \frac{2e^{3x}}{13}\cdot \text{sen}\,2x$

23. Calcula la integral $\int x\cdot \text{Ln}\,x\,dx$.

Solución:

Resolvemos esta integral por el método de integración por partes: $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$u = \text{Ln}\,x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$x\,dx = dv \quad \Rightarrow \quad v = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto:

$$\int x\cdot \text{Ln}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot \text{Ln}\,x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\cdot \text{Ln}\,x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot \text{Ln}\,x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\cdot \text{Ln}\,x - \frac{x^2}{4} + \text{C}$$

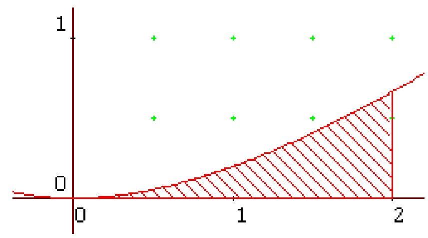
24. Dada la función $f(x) = x - 4 + \frac{16}{x+4}$, calcula el área limitada por la gráfica de la función, el eje OX y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

Veamos en primer lugar cuales son las raíces de esta función ($f(x) = 0$).

$$x - 4 + \frac{16}{x+4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 16 + 16}{x+4} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Por tanto, en el intervalo de integración la gráfica de la función no va a cortar al eje OX.



$f(x) = x - 4 + \dfrac{16}{x+4}$

Así, el área pedida será:

$$\text{Área} = \int_0^2 \left(x - 4 + \frac{16}{x+4} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 4x + 16 \,\text{Ln}\,|x+4| \right]_0^2 = (-6 + 16 \text{ Ln}6) - (16 \text{ Ln}4) =$$

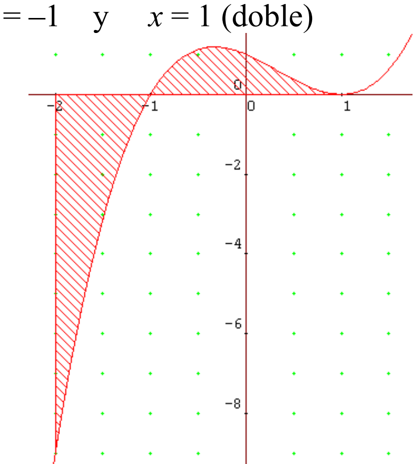
$$= 16 \text{ Ln } \frac{3}{2} - 6 \approx 0{,}4874 \text{ u}^2.$$

25. Calcula el área de la región limitada por la curva $f(x) = (x-1)^2\,(x+1)$ y las rectas $y = 0$, $x = -2$, $x = 1$.

Solución:
Calculemos en primer lugar si en el intervalo de integración (–2, 1) la función corta al eje OX.

$0 = (x-1)^2\,(x+1) \qquad \Rightarrow \qquad$ Raíces: $x = -1$ y $x = 1$ (doble)

Como la raíz $x = -1$ está en el intervalo de integración significa que la función tendrá una parte positiva (por encima del eje OX) y otra negativa (por debajo del eje OX). Así pues, debemos separa la integral en dos partes. Una irá desde $x = -2$ hasta $x = -1$ y la otra desde $x = -1$ hasta $x = 1$. Sólo nos falta ver en cual de las dos partes la función es negativa y en cual positiva. Se comprueba fácilmente (sin más que darle a la función valores) que la parte en la cual la gráfica de la función está por debajo del eje OX (negativa) es en el tramo entre $x = -2$ y $x = -1$. En el otro tramo, entre $x = -1$ y $x = 1$ la gráfica de la función está por encima del eje OX (positiva).



$f(x) = (x-1)^2\,(x+1)$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

$$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = -\int_{-2}^{-1} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right) dx + \int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right) dx =$$

$$= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1} =$$

$$= -\left[\left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} + (-2) \right) \right] +$$

$$+ \left[\left(\frac{(1)^4}{4} - \frac{(1)^3}{3} - \frac{(1)^2}{2} + (1) \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) \right] =$$

$$= -\left[\left(\frac{-11}{12} \right) - \left(\frac{8}{3} \right) \right] + \left[\left(\frac{5}{12} \right) - \left(\frac{-11}{12} \right) \right] = -\left[-\frac{43}{12} \right] + \left[\frac{16}{12} \right] = \frac{59}{12} \text{ u}^2.$$

26. Calcular el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = |x| \cdot \text{sen}\, x$ y el eje OX, en el intervalo $[-\pi, 2\pi]$.

Solución:
En esta integral aparece un valor absoluto. Por ello, debemos dividir el intervalo de integración en dos partes. Una será aquella en la que la función que aparece en el interior del valor absoluto es positiva y otra en la que es negativa. Así pues, como

$$|x| = \begin{cases} -x & si \quad x < 0 \\ x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Pero a su vez, debemos tener en cuenta que en el intervalo $(-\pi, 0)$, el seno es negativo, y por tanto la gráfica de la función estará por debajo del eje OX. Para que sea positiva la integral, debemos cambiarle el signo.
Por otra parte, en el intervalo $(0, 2\pi)$, la función $f(x) = x \cdot \text{sen}\, x$, toma valores positivos y negativos, y por tanto debemos dividir a su vez este intervalo en otros dos: $(0, \pi)$ y $(\pi, 2\pi)$.

$$\int_{-\pi}^{2\pi} |x| \cdot \text{sen}\, x\, dx = \int_{-\pi}^{0} x \cdot \text{sen}\, x\, dx + \int_{0}^{\pi} x \cdot \text{sen}\, x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} x \cdot \text{sen}\, x\, dx = (*)$$

$$(*) = \left[-x \cdot \cos x + \text{sen}\, x\right]_{-\pi}^{0} + \left[-x \cdot \cos x + \text{sen}\, x\right]_{0}^{\pi} - \left[-x \cdot \cos x + \text{sen}\, x\right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$= [0 - (-\pi)] + [(\pi) - 0] - [(-2\pi) - (\pi)] = 5\pi \text{ u}^2.$$

(*) Realicemos esta integral por el método de integración por partes:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$v = \text{sen}\, x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \text{sen}\, x\, dx = -\cos x$$

$$\int x \cdot \text{sen}\, x\, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \text{sen}\, x$$

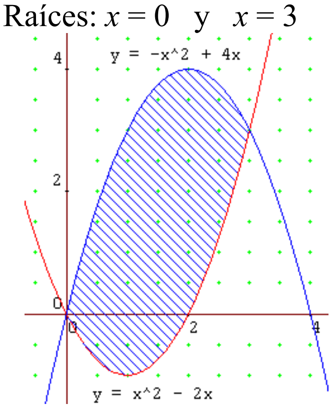
27. Calcula el área del recinto limitado por dos parábolas de ecuaciones $y = x^2 - 2x$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solución:
Calculemos los puntos de corte de las dos parábolas. Para ello resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = -x^2 + 4x \end{cases}$$

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } x = 0 \text{ y } x = 3$$

Estas dos parábolas se cortan en los puntos del plano (0, 0) y (3, 3). Podemos hacer un esbozo de ambas gráficas, resultando:



Así pues, el área pedida será:

$$\text{Área} = \int_0^3 \left[\left(-x^2+4x\right)-\left(x^2-2x\right)\right]dx = \int_0^3 \left(-2x^2+6x\right)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^3 =$$

$$= (-18 + 27) - (0 + 0) = 9 \text{ u}^2.$$

28. Calcula el valor de "*a*" ($a > 0$) sabiendo que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ es 36.

Solución:
Podemos plantear el problema teniendo en cuenta que el área comprendido entre las gráficas de dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ es 36. Podemos calcular ese área mediante la integral:

$$\text{Área} = \int_b^c \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

siendo b y c los puntos de corte de ambas curvas. Apliquemos lo anterior a nuestro caso:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -x \\ g(x) &= x^2 + ax \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad -x = x^2 + ax \quad \Rightarrow \quad x^2 + (a+1)\cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Raíces: } \begin{cases} x = 0 \\ x = -(a+1) \end{cases}$$

Así pues:

$$\text{Área} = \int_b^c \left[f(x)-g(x)\right]dx = \int_{-(a+1)}^0 \left[-x-(x^2+ax)\right]dx = \int_{-(a+1)}^0 \left[-x^2-(a+1)\,x\right]dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{(a+1)x^2}{2}\right]_{-(a+1)}^0 = \left[0 - \left(-\frac{-(a+1)^3}{3} - \frac{(a+1)^3}{2}\right)\right] = \frac{(a+1)^3}{6} = 36$$

De aquí se deduce que $\dfrac{(a+1)^3}{6} = 36$ y por tanto:

$(a+1)^3 = 216 \qquad \Rightarrow \qquad a + 1 = 6 \qquad \Rightarrow \qquad a = 5$