

Trigonometría

Atención: Los resultados serán válidos sólo cuando los razonamientos empleados se incluyan. Todos los problemas valen 2 puntos. Los resultados deben simplificarse.

- 1) Sabiendo que $\alpha > 180^\circ$ y que $\cos \alpha = -1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.
- 2) Resolver un triángulo del que conocemos: $a = 10m$; $b = 7m$; $B = 30^\circ$, hallando todas las soluciones posibles.
- 3) Sin usar la calculadora, hallar el valor de: a) $\cos 5910^\circ$; b) $\sin (-4350^\circ)$
- 4) Demostrar la siguiente identidad:
$$\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = 1$$
- 5) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60° . Alejándose $40 m$ en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30° . Averiguar la altura de la elevación.

SOLUCIONES

1) Sabiendo que $\alpha > 180^\circ$ y que $\cos \alpha = -1/3$, calcular el resto de razones trigonométricas de α sin usar la calculadora. Posteriormente, decir el valor de α en grados, minutos y segundos, ayudándose de la calculadora.

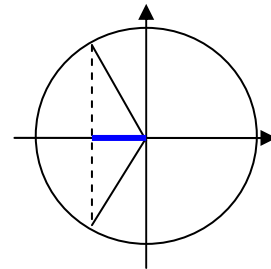
Si $\alpha > 180^\circ$ y $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \alpha$ está en el tercer cuadrante. Pues bien:

Como $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - (-1/3)^2 = 1 - 1/9 = 8/9 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{8/9} = -\sqrt{8}/3 = -2\sqrt{2}/3$, negativo por ser del tercer cuadrante.

$$\text{Por tanto, como } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{8}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Las otras razones son: } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{8}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{8}};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3; \quad \cotg \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



Por último, como $\cos \alpha = -1/3$, con la calculadora obtenemos que: $\alpha = 109,47^\circ$. Trasladándolo al tercer cuadrante: $180^\circ - 109,47^\circ = 70,53^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ + 70,53^\circ = 250,53^\circ = 250^\circ 31' 44''$ (Ver figura).

2) Resolver un triángulo del que conocemos: $a = 10m$; $b = 7m$; $B = 30^\circ$, hallando todas las soluciones posibles.

Como conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, usamos el Teorema del Seno:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{10 \sin 30^\circ}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = 45,58^\circ \text{ ó } A = 180^\circ - 45,58^\circ = 134,41^\circ \text{ (dos soluciones válidas).}$$

- Si $A = 45,58^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 45,58^\circ - 30^\circ = 104,42^\circ$. Y además:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{7 \sin 104,42^\circ}{\sin 30^\circ} = 13,56 \text{ m}$$

- Si $A = 134,41^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - 134,41^\circ - 30^\circ = 15,58^\circ$. De modo que:

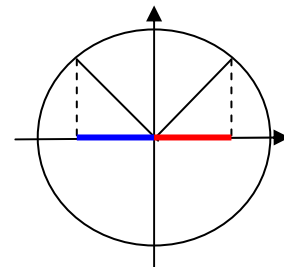
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{7 \sin 15,58^\circ}{\sin 30^\circ} = 3,76 \text{ m}$$

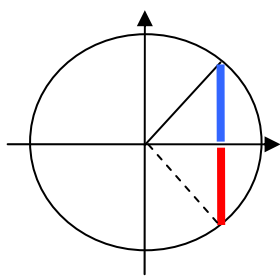
3) Sin usar la calculadora, hallar el valor de: a) $\cos 5910^\circ$; b) $\sin (-4350^\circ)$.

Dividiendo 5910 entre 360 se obtiene 16 de cociente y 150 de resto. Es decir: $5910^\circ = 360^\circ \cdot 16 + 150^\circ$. Luego 5910° coincide, sobre la circunferencia, con 150° , después de dar 16 vueltas. Por tanto, $\cos 5910^\circ = \cos 150^\circ$.

Además $\cos 150^\circ = -\cos (180 - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\sqrt{3}/2$

De la misma forma, $4350 = 360 \cdot 12 + 30^\circ \Rightarrow -4350^\circ$ coincide con -30° , después de 12 vueltas en sentido negativo. Y



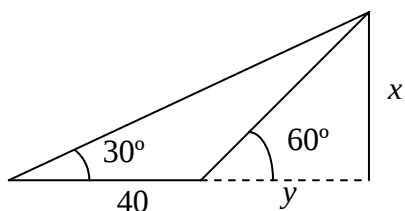


además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: $\sin(-4350^\circ)$
 $= \sin(-30^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}.$

4) Demostrar la siguiente identidad: $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} = 1.$

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha} &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha)^2 - (\sin^2 \alpha)^2} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

5) El punto más alto de una elevación se ve, desde un punto del suelo, bajo un ángulo de 60° . Alejándose 40 m en línea recta con la base de dicha elevación, se ve bajo un ángulo de 30° . Averiguar la altura de la elevación.



En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x e y , deducimos:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \operatorname{tg} 60^\circ \quad (1)$$

En el triángulo rectángulo cuyos catetos son x y $40+y$, se tiene:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{40+y} \Rightarrow x = (40+y) \operatorname{tg} 30^\circ$$

Igualando:

$$\begin{aligned} y \operatorname{tg} 60^\circ &= (40+y) \operatorname{tg} 30^\circ = 40 \operatorname{tg} 30^\circ + y \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y \operatorname{tg} 60^\circ - y \operatorname{tg} 30^\circ = 40 \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow y(\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ) = 40 \operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow y = \frac{40 \operatorname{tg} 30^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ} = 20 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1): $x = 20 \operatorname{tg} 60^\circ = 34,64 \text{ m}$