Dadas las siguientes funciones efectúa las operaciones que se indican, calculando en cada caso el dominio de la función resultante:

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-4} \rightarrow Dom(f)=\Re-\{-2,2\}$

$g(x)=x^2-6 \rightarrow Dom(f)=\Re$

$h(x)=\dfrac{6x}{x^2-4} \rightarrow Dom(f)=\Re-\{-2,2\}$

$p(x)=\sqrt{x+1} \rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re / x+1\geq 0\}=[-1,+\infty)$

$j(x)=\dfrac{x-1}{x+1} \rightarrow Dom(f)=\Re-\{-1\}$

$k(x)=\dfrac{x+2}{x^2-1} \rightarrow Dom(f)=\Re-\{-1,1\}$

$l(x)=\sqrt{x^2-4x+3} \rightarrow Dom(f)=\{x\in\Re / x^2-4x+3\geq 0\}=(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

$m(x)=x-4 \rightarrow Dom(f)=\Re$

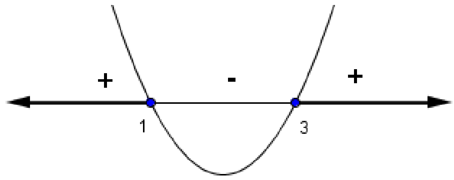
$s(x)=\dfrac{3-x}{x-1} \rightarrow Dom(f)=\Re-\{1\}$

$r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3} \rightarrow Dom(f)=\Re-\{-3\}$

Tenemos que resolver la inecuación: $x^2-4x+3\geq 0$

<u>Ceros</u>

$x^2-4x+3=0 \Leftrightarrow x=1$ ò $x=3$



i) $(g\circ m)(x)=g[m(x)]=g[x-4]=(x-4)^2-6=x^2-8x+10$

$Dom(g\circ m)=\{x\in Dom(m) / m(x)\in Dom(g)\}=\{x\in\Re / x-4\in\Re\}=\Re$

j) $(m\circ g)(x)=m[g(x)]=m[x^2-6]=(x^2-6)-4=x^2-10$

$Dom(m\circ g)=\{x\in Dom(g) / g(x)\in Dom(m)\}=\{x\in\Re /(x^2-6)\in\Re\}=\Re$

k) $(f\circ m)(x)=f[m(x)]=f[x-4]=\dfrac{1}{(x-4)^2-4}=\dfrac{1}{x^2-8x+12}$

$Dom(f\circ m)=\{x\in Dom(m) / m(x)\in Dom(f)\}=\{x\in\Re / x-4\in\Re-\{-2,2\}\}=\Re-\{2,6\}$

$x-4\neq -2 \Leftrightarrow x\neq 2$

$x-4\neq 2 \Leftrightarrow x\neq 6$

l) $(m\circ j)(x)=m[j(x)]=m\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right]=\dfrac{x-1}{x+1}-4=\dfrac{x-1-4x-4}{x+1}=\dfrac{-3x-5}{x+1}$

$Dom(m\circ j)=\{x\in Dom(j) / j(x)\in Dom(m)\}=\{x\in\Re-\{-1\} / \dfrac{x-1}{x+1}\in\Re\}=\Re-\{-1\}$

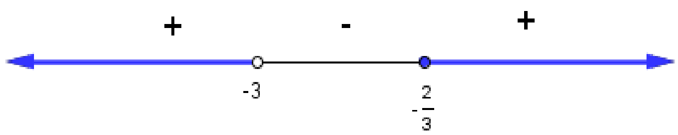
m) $(p\circ r)(x)=p[r(x)]=p\left[\dfrac{2x-1}{x+3}\right]=\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+3}+1}=\sqrt{\dfrac{2x-1+x+3}{x+3}}=\sqrt{\dfrac{3x+2}{x+3}}$

$Dom(p\circ r)=\{x\in Dom(r) / r(x)\in Dom(p)\}=\{x\in\Re-\{-3\} / \dfrac{2x-1}{x+3}\in[-1,+\infty)\}=(-\infty,-3)\cup\left[-\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

$\dfrac{2x-1}{x+3}\geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+3}+1\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{x+3}\geq 0$

<u>Ceros</u> <u>Polos</u>

$3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$ $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$



n) $(p \circ j)(x) = p[j(x)] = p\left[\dfrac{x-1}{x+1}\right] = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}+1} = \sqrt{\dfrac{x-1+x+1}{x+1}} = \sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$

$Dom(p \circ j) = \{x \in Dom(j) / j(x) \in Dom(p)\} = \{x \in \Re - \{-1\} / \dfrac{x-1}{x+1} \in [-1,+\infty)\} = (-\infty,-1) \cup [0,+\infty)$

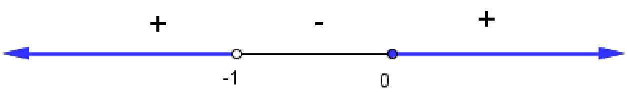
$\dfrac{x-1}{x+1} \geq -1 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+1}+1 \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1} \geq 0$

<u>Ceros</u>

$2x = 0 \Rightarrow x = 0$

<u>Polos</u>

$x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$



o) $(s \circ p)(x) = s[p(x)] = s[\sqrt{x+1}] = \dfrac{3-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}$

$Dom(s \circ p) = \{x \in Dom(p) / p(x) \in Dom(s)\} = \{x \in [-1,+\infty) / \sqrt{x+1} \in \Re - \{1\}\} = [-1,0) \cup (0,+\infty)$

$\sqrt{x+1} \neq 1 \Leftrightarrow x+1 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$

p) $(r \circ s)(x) = r[s(x)] = r\left[\dfrac{3-x}{x-1}\right] = \dfrac{2\left(\dfrac{3-x}{x-1}\right)-1}{\dfrac{3-x}{x-1}+3} = \dfrac{\dfrac{6-2x}{x-1}-1}{\dfrac{3-x+3x-3}{x-1}} = \dfrac{\dfrac{6-2x-x+1}{x-1}}{\dfrac{2x}{x-1}} = \dfrac{-3x+7}{2x}$

$Dom(r \circ s) = \{x \in Dom(s) / s(x) \in Dom(r)\} = \{x \in \Re - \{1\} / \dfrac{3-x}{x-1} \in \Re - \{-3\}\} = \Re - \{-1,0\}$

$\dfrac{3-x}{x-1} \neq -3 \Leftrightarrow 3-x \neq -3\cdot(x-1) \Leftrightarrow 3-x \neq -3x+3 \Leftrightarrow 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

q) m^{-1}

- Primero comprobaremos si $m(x) = x-4$ es inyectiva, es decir, [si $m(a) = m(b) \Rightarrow a = b$]

  $m(a) = m(b) \Rightarrow a-4 = b-4 \Rightarrow a = b$

  Por tanto, $m(x)$ es inyectiva y existe $m^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $m^{-1}(x)$

  1) $m(x) = x-4 \Rightarrow y = x-4$

  2) $x = y-4$

  3) $y = x+4$

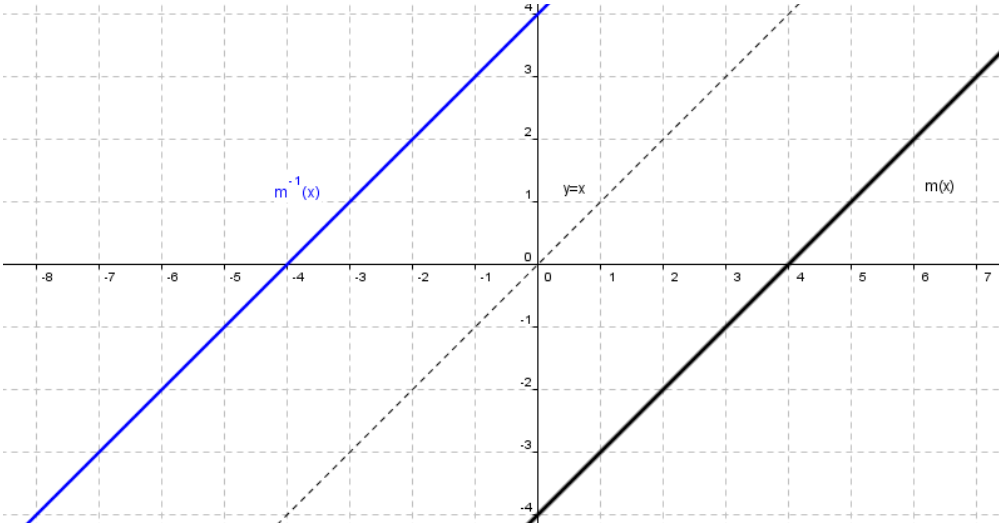
  4) $m^{-1}(x) = x+4$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

$(m \circ m^{-1})(x) = m[m^{-1}(x)] = (x+4) - 4 = x$

$(m^{-1} \circ m)(x) = m^{-1}[m(x)] = (x-4) + 4 = x$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$Dom(m) = \Re$ $\quad$ $\mathrm{Re}\,c(m) = \Re$

$Dom(m^{-1}) = \Re$ $\quad$ $\mathrm{Re}\,c(m^{-1}) = \Re$

r) j^{-1}

- Primero comprobaremos si $j(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ es inyectiva, es decir, [si $j(a) = j(b) \Rightarrow a = b$]

$j(a) = j(b) \Rightarrow \dfrac{a-1}{a+1} = \dfrac{b-1}{b+1} \Rightarrow (a-1)\cdot(b+1) = (a+1)\cdot(b-1) \Rightarrow a\cdot b + a - b - 1 = a \cdot b - a + b - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2a = 2b \Rightarrow a = b$

Por tanto, $j(x)$ es inyectiva y existe $j^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $j^{-1}(x)$

1) $j(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow y = \dfrac{x-1}{x+1}$

2) $x = \dfrac{y-1}{y+1}$

3) $x \cdot (y+1) = y - 1 \Rightarrow xy + x = y - 1 \Rightarrow x + 1 = y - xy \Rightarrow x + 1 = y \cdot (1-x) \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{1-x}$

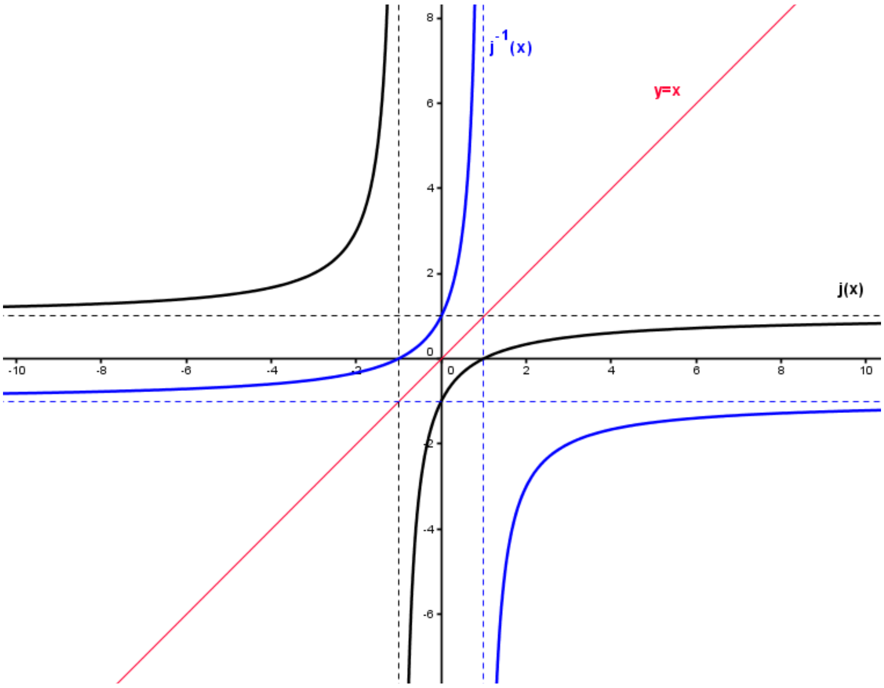
4) $j^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{1-x}$

➢ <u>COMPROBACIÓN</u>

$$(j\circ j^{-1})(x)=j[j^{-1}(x)]=j\left[\frac{x+1}{1-x}\right]=\frac{\frac{x+1}{1-x}-1}{\frac{x+1}{1-x}+1}=\frac{\frac{x+1-1+x}{1-x}}{\frac{x+1+1-x}{1-x}}=\frac{2x}{2}=x$$

$$(j^{-1}\circ j)(x)=j^{-1}[j(x)]=j^{-1}\left[\frac{x-1}{x+1}\right]=\frac{\frac{x-1}{x+1}+1}{1-\frac{x-1}{x+1}}=\frac{\frac{x-1+x+1}{x+1}}{\frac{x+1-x+1}{x+1}}=\frac{2x}{2}=x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$Dom(j)=\Re-\{-1\}$ $Rec(j)=\Re-\{1\}$

$Dom(j^{-1})=\Re-\{1\}$ $Rec(j^{-1})=\Re-\{-1\}$

s) r^{-1}

➢ Primero comprobaremos si $r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$ es inyectiva, es decir, [si $r(a)=r(b)\Rightarrow a=b$]

$$r(a)=r(b)\Rightarrow\frac{2a-1}{a+3}=\frac{2b-1}{b+3}\Rightarrow(2a-1)\cdot(b+3)=(a+3)\cdot(2b-1)\Rightarrow 2ab+6a-b-3=2ab-a+6b-3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7a=7b\Rightarrow a=b$$

Por tanto, $r(x)$ es inyectiva y existe $r^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $r^{-1}(x)$

1) $r(x)=\dfrac{2x-1}{x+3} \Rightarrow y=\dfrac{2x-1}{x+3}$

2) $x=\dfrac{2y-1}{y+3}$

3) $x\cdot(y+3)=2y-1 \Rightarrow xy+3x=2y-1 \Rightarrow 3x+1=2y-xy \Rightarrow 3x+1=y\cdot(2-x) \Rightarrow y=\dfrac{3x+1}{2-x}$

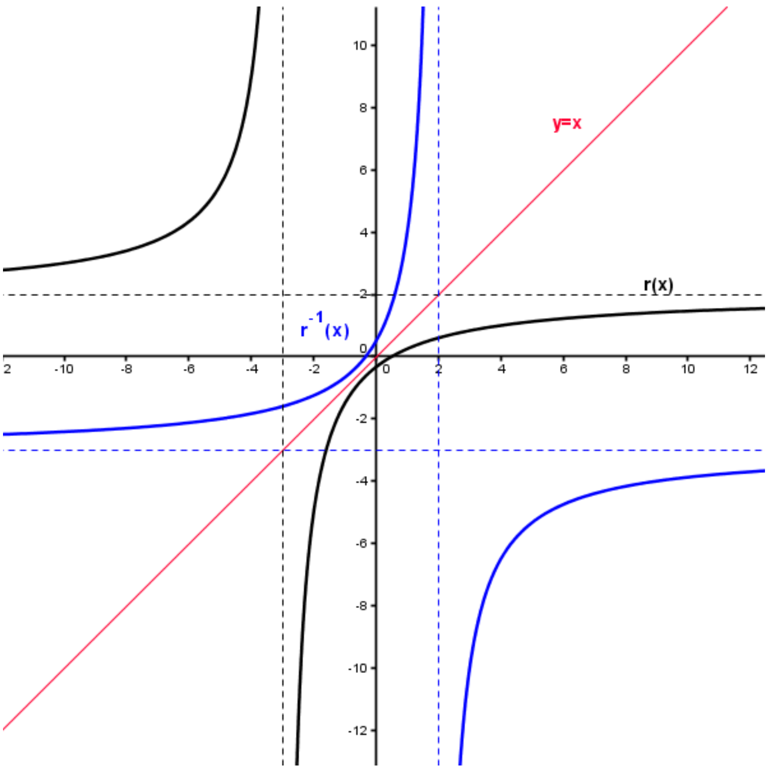
4) $r^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{2-x}$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

$$(r\circ r^{-1})(x)=r[r^{-1}(x)]=r\left[\frac{3x+1}{2-x}\right]=\frac{2\cdot\left(\frac{3x+1}{2-x}\right)-1}{\frac{3x+1}{2-x}+3}=\frac{\frac{6x+2}{2-x}-1}{\frac{3x+1+6-3x}{2-x}}=\frac{6x+2-2+x}{7}=\frac{7x}{7}=x$$

$$(r^{-1}\circ r)(x)=r^{-1}[r(x)]=r^{-1}\left[\frac{2x-1}{x+3}\right]=\frac{3\cdot\left(\frac{2x-1}{x+3}\right)+1}{2-\frac{2x-1}{x+3}}=\frac{\frac{6x-3}{x+3}+1}{\frac{2x+6-2x+1}{x+1}}=\frac{6x-3+x+3}{7}=\frac{7x}{7}=x$$

Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$Dom(r)=\Re-\{-3\}$ $\quad$ $\mathrm{Re}c(r)=\Re-\{2\}$

$Dom(r^{-1})=\Re-\{2\}$ $\quad$ $\mathrm{Re}c(r^{-1})=\Re-\{-3\}$

t) s^{-1}

- Primero comprobaremos si $s(x)=\dfrac{3-x}{x-1}$ es inyectiva, es decir, $[\text{si} \quad s(a)=s(b)\Rightarrow a=b]$

  $$s(a)=s(b)\Rightarrow \frac{3-a}{a-1}=\frac{3-b}{b-1}\Rightarrow (3-a)\cdot(b-1)=(a-1)\cdot(3-b)\Rightarrow 3b-3-ab+a=3a-ab-3+b\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow -2a=-2b\Rightarrow a=b$$

  Por tanto, $s(x)$ es inyectiva y existe $s^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $r^{-1}(x)$

  1) $s(x)=\dfrac{3-x}{x-1}\Rightarrow y=\dfrac{3-x}{x-1}$

  2) $x=\dfrac{3-y}{y-1}$

  3) $x\cdot(y-1)=3-y\Rightarrow xy-x=3-y\Rightarrow xy+y=3+x\Rightarrow y\cdot(x+1)=3+x\Rightarrow y=\dfrac{3+x}{x+1}$

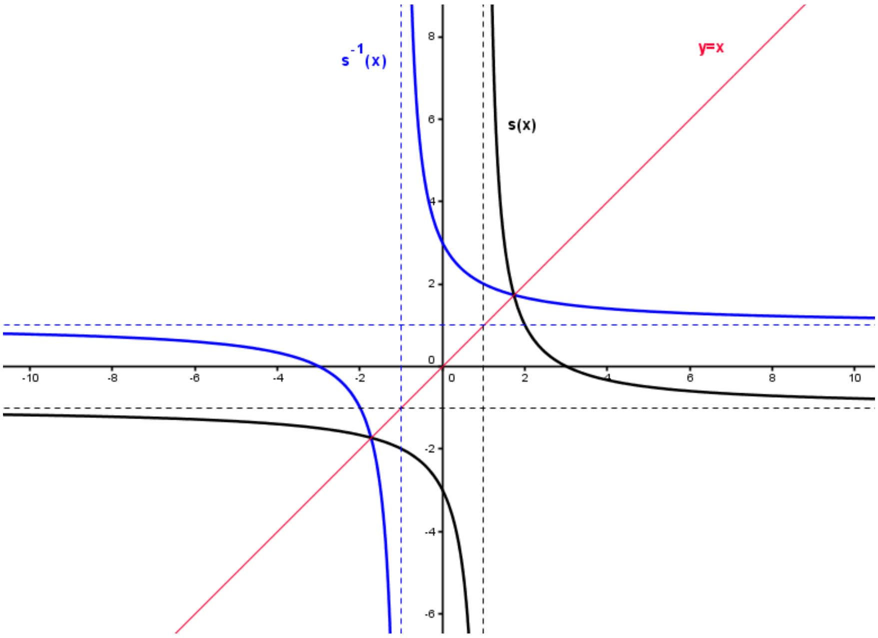
  4) $s^{-1}(x)=\dfrac{3+x}{x+1}$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

  $$(s\circ s^{-1})(x)=s[s^{-1}(x)]=s\left[\frac{3+x}{x+1}\right]=\frac{3-\dfrac{3+x}{x+1}}{\dfrac{3+x}{x+1}-1}=\frac{\dfrac{3x+3-3-x}{x+1}}{\dfrac{3+x-x-1}{x+1}}=\frac{2x}{2}=x$$

  $$(s^{-1}\circ s)(x)=s^{-1}[s(x)]=s^{-1}\left[\frac{3-x}{x-1}\right]=\frac{3+\dfrac{3-x}{x-1}}{\dfrac{3-x}{x-1}+1}=\frac{\dfrac{3x-3+3-x}{x-1}}{\dfrac{3-x+x-1}{x-1}}==\frac{2x}{2}=x$$

  Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y=x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$Dom(s) = \Re - \{1\}$ $\quad$ $\mathrm{Re}c(s) = \Re - \{-1\}$

$Dom(s^{-1}) = \Re - \{-1\}$ $\quad$ $\mathrm{Re}c(s^{-1}) = \Re - \{1\}$

u) p^{-1}

- Primero comprobaremos que $p(x) = \sqrt{x+1}$ es inyectiva, es decir, [si $p(a) = p(b) \Rightarrow a = b$]

  $p(a) = p(b) \Rightarrow \sqrt{a+1} = \sqrt{b+1} \Rightarrow a+1 = b+1 \Rightarrow a = b$

  Por tanto, $p(x)$ es inyectiva y existe $p^{-1}(x)$

- Ahora calculamos $p^{-1}(x)$

  1) $p(x) = \sqrt{x+1} \Rightarrow y = \sqrt{x+1}$

  2) $x = \sqrt{y+1} \Rightarrow x^2 = y+1$

  3) $y = x^2 + 1$

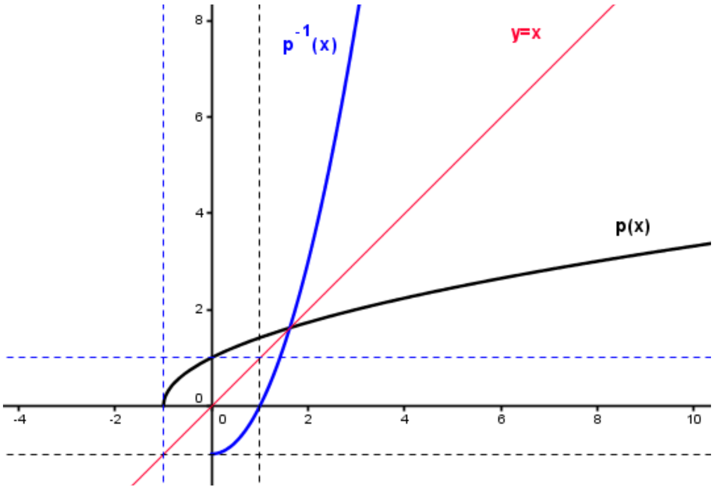
  4) $p^{-1}(x) = x^2 - 1$ con $x \in [0, +\infty)$

- <u>COMPROBACIÓN</u>

  $(p \circ p^{-1})(x) = p[p^{-1}(x)] = \sqrt{x^2 - 1 + 1} = x$

  $(p^{-1} \circ p)(x) = p^{-1}[p(x)] = (\sqrt{x+1})^2 - 1 = x$

  Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primer y tercer cuadrantes)



$Dom(p) = [-1, +\infty)$ $\quad$ $\mathrm{Rec}(p) = [0, +\infty)$

$Dom(p^{-1}) = [0, +\infty)$ $\quad$ $\mathrm{Rec}(p^{-1}) = [-1, +\infty)$