Representa gráficamente las siguientes funciones definidas a trozos:

a) $f(x)=\begin{cases}3x-1 & si \quad x\leq -2\\ 1-x & si \quad -2<x<0\\ x^2+1 & si \quad 0\leq x\leq 2\end{cases} \Rightarrow Dom(f)=(-\infty,0)\cup(0,2]$

- $y=3x-1 \rightarrow$ función lineal

x	$-2^{\bullet}$	-3	-4
y	-7	-10	-11

- $y=1-x \rightarrow$ función lineal

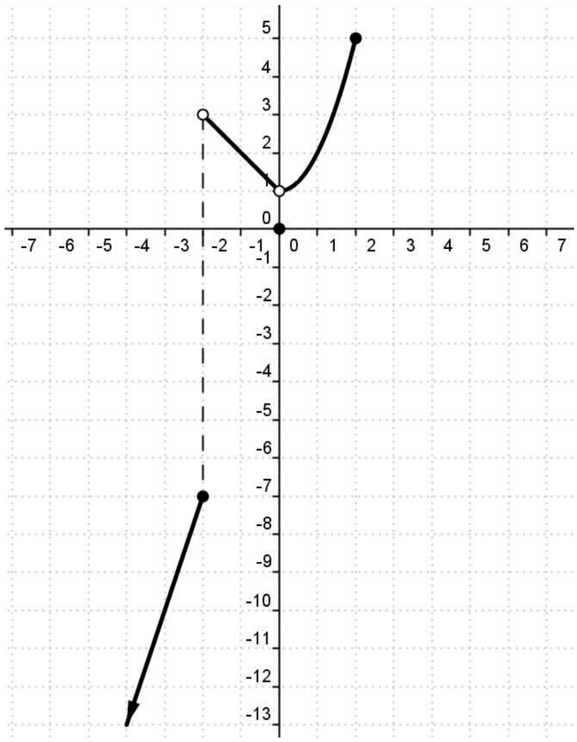
x	-2°	-1	0°
y	3	2	1

- $y=x^2 \rightarrow$ función cuadrática (parábola)

  $a=1>0 \rightarrow$ cóncava

  Vértice $\rightarrow (0,0)$

x	$0^{\bullet}$	1	$2^{\bullet}$
y	0	1	4



b) $f(x)=\begin{cases}-5 & si \quad x<-4\\ -x^2-2x+3 & si \quad -4\leq x<0\\ 1 & si \quad x>3\end{cases} \Rightarrow Dom(f)=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$

- $y=-5$ si $x<-4 \rightarrow$ función constante

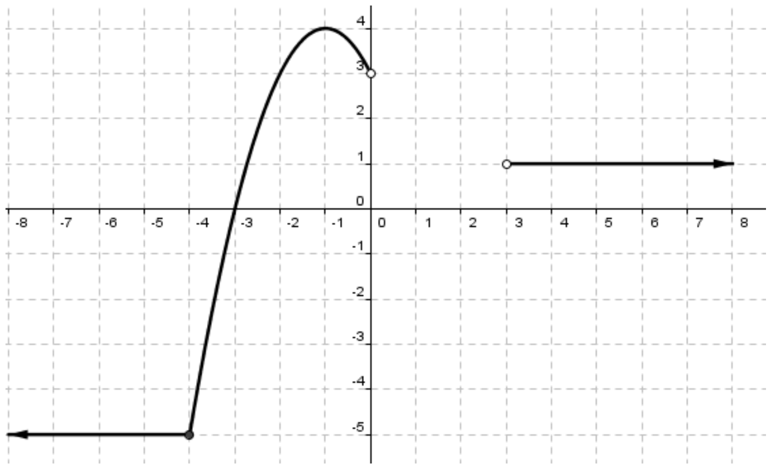
- $y=-x^2-2x+3 \rightarrow$ función cuadrática (parábola)

  $a=-1<0 \rightarrow$ convexa

  Vértice $\rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{2}{-2}=-1\\ y=-(-1)^2-2\cdot(-1)+3=-1+2+3=4\end{cases} \Rightarrow V(-1,4)$

x	$-4^{\bullet}$	-3	-2	-1	0°
y	-5	0	3	4	3

- $y = 1$ si $x > 3 \rightarrow$ función constante



c) $f(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ x^2 - 1 & si \quad 0 \le x < 2 \\ -x & si \quad 2 \le x < 4 \\ 1 & si \quad x \ge 4 \end{cases} \Rightarrow Dom(f) = \Re$

- $y = x \rightarrow$ función lineal

x	0°	-1	-2
y	0	-1	-2

- $y = x^2 - 1 \rightarrow$ función cuadrática (parábola)

$a = 1 > 0 \rightarrow$ cóncava

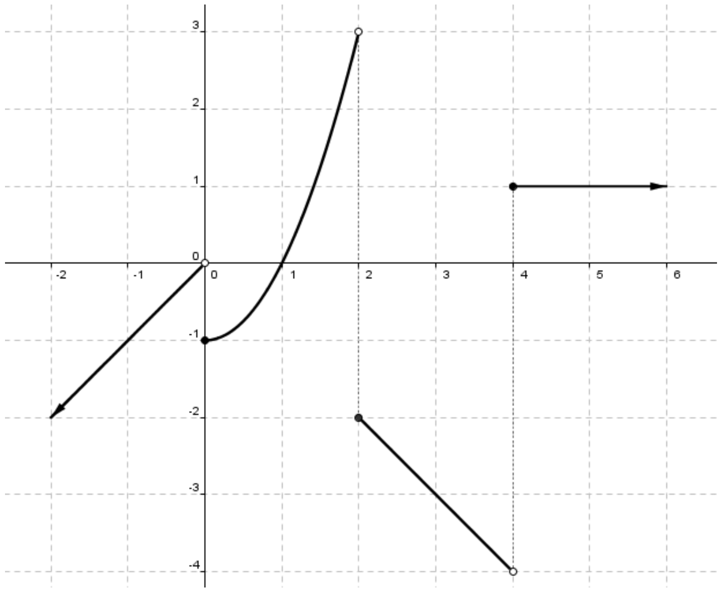
Vértice $\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{2} = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow (0,-1)$

x	$0^{\bullet}$	1	2°
y	-1	0	3

- $y = -x \rightarrow$ función lineal

x	$2^{\bullet}$	3	4°
y	-2	-3	-4

- $y = 1$ si $x \ge 4 \rightarrow$ función constante



d) $f(x)=\begin{cases} 1 & si \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x > 0 \end{cases} \Rightarrow Dom(f)=\Re$

- $y = 1$ si $x \le 0 \rightarrow$ función constante

- $y = \dfrac{1}{x} \rightarrow$ hipérbola

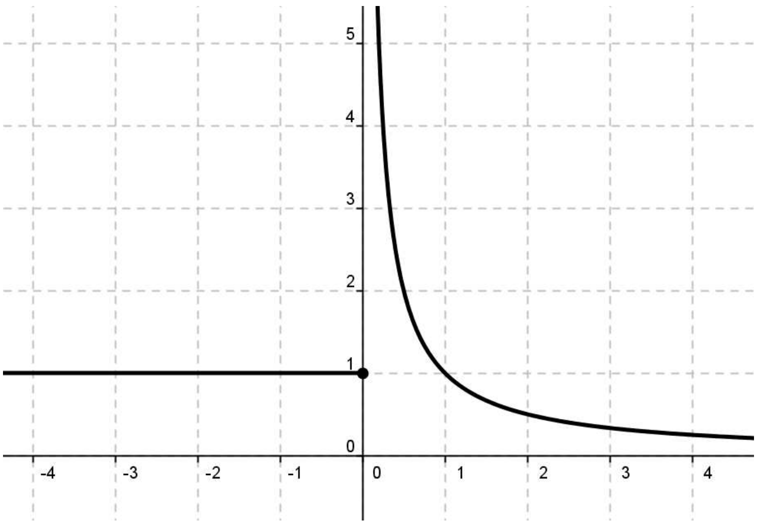
  $Dom(f)=\Re-\{0\}$

  No corta a los ejes coordenados

  $x = 0$ asíntota vertical

  $y = 0$ asíntota horizontal

x	0,5	1	2	4
y	2	1	0,5	0,25



e) $f(x)=\begin{cases} 2 & si \quad x<-2 \\ x^2 & si \ -2<x<1 \\ -2x+4 & si \quad x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow Dom(f)=\Re-\{-2\}$

- $y=2$ si $x<-2 \rightarrow$ función constante

- $y=x^2 \rightarrow$ función cuadrática (parábola)

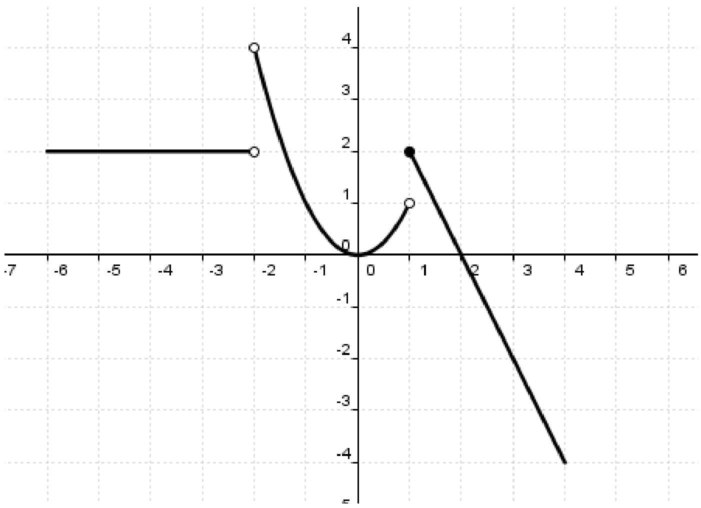
  $a=1>0 \rightarrow$ cóncava

  Vértice $\rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{0}{2}=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$

x	-2°	0	1°
y	-4	0	1

- $y=-2x+4 \rightarrow$ función lineal

x	$1^{\bullet}$	2	3
y	2	0	-2



f) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x>0 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x<0 \end{cases} \Rightarrow Dom(f)=\Re-\{0\}$

- $y=x-1 \rightarrow$ función lineal

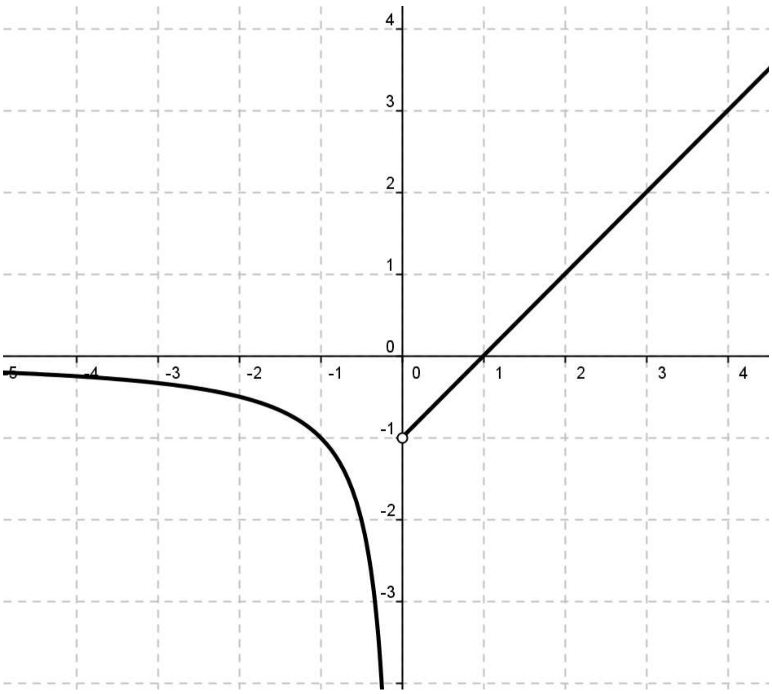
x	0°	1	2
y	-1	0	1

- $y=\dfrac{1}{x} \rightarrow$ hipérbola

  $Dom(f)=\Re-\{0\}$

$x=0$ asíntota vertical $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$ $y=0$ asíntota horizontal $\begin{cases} \lim_{x\to -\infty} f(x) = \frac{1}{-\infty} = 0^- \\ \lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \end{cases}$

x	$-0,5$	-1	-2	-4
y	-2	-1	$-0,5$	$-0,25$



g) $f(x) = \begin{cases} -x^2+1 & si \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{x-2} & si \quad 1 < x < 5 \\ x+1 & si \quad x \ge 5 \end{cases} \Rightarrow Dom(f) = \Re - \{2\}$

- $y = -x^2 + 1 \rightarrow$ función cuadrática (parábola)

  $a = -1 < 0 \rightarrow$ convexa

  Vértice $\rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{-2} = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow (0,1)$

x	$1^{\bullet}$	0	-1	-2
y	0	1	0	-3

- $y = \dfrac{1}{x-2} \rightarrow$ hipérbola

$Dom(f) = \Re - \{2\}$

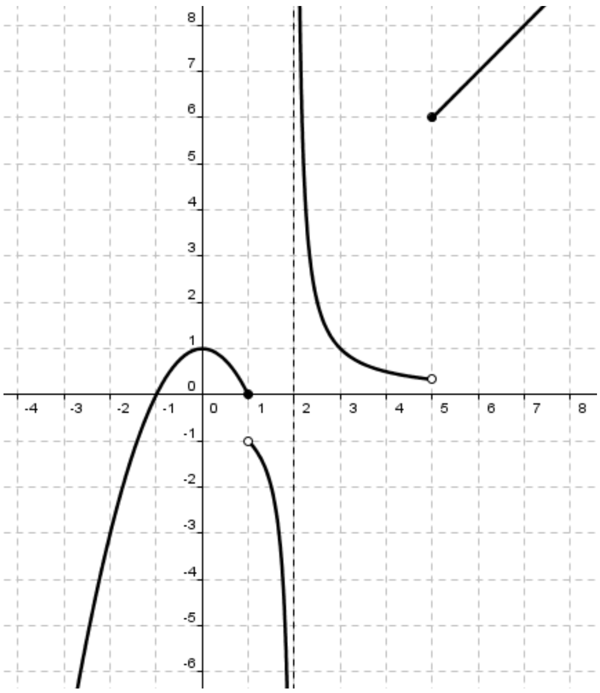
$x = 2$ asíntota vertical $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$

$y = 0$ asíntota horizontal $\begin{cases} \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \dfrac{1}{-\infty} = 0^- \\ \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{+\infty} = 0^+ \end{cases}$

x	1^{O}	1,5	2,5	3	4	5^{O}
y	-1	-2	2	1	0,5	$\dfrac{1}{3}$

- $y = x + 1 \rightarrow$ función lineal

x	$5^{\bullet}$	6	7
y	6	7	8



h) $f(x)=\begin{cases} x-1 & si \quad x>0 \\ \dfrac{1}{x+2} & si \quad x<0 \end{cases} \Rightarrow Dom(f)=\Re-\{-2\}$

- $y=x-1 \rightarrow$ función lineal

x	0^{O}	1	2
y	-1	0	1

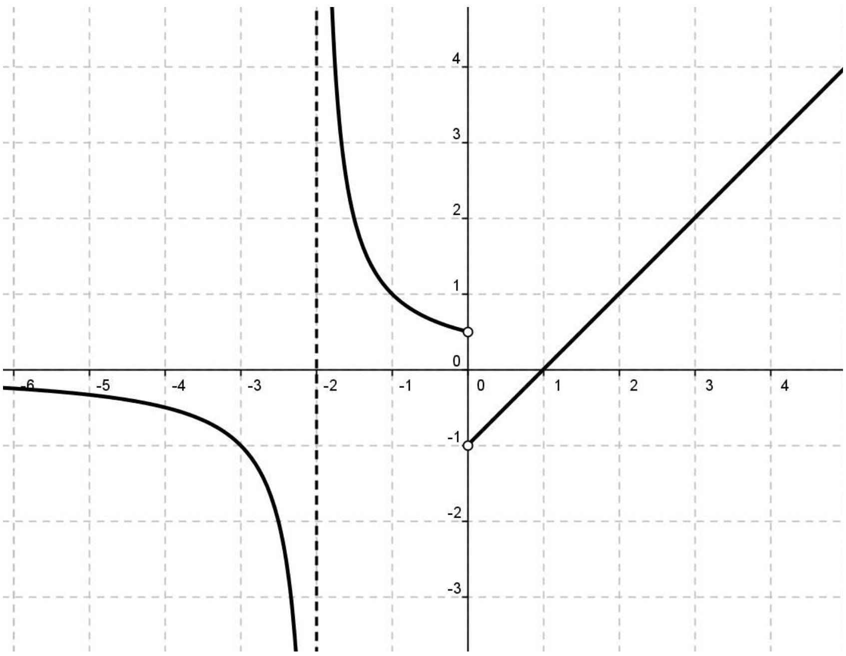
- $y=\dfrac{1}{x+2} \rightarrow$ hipérbola

$Dom(f)=\Re-\{-2\}$

$x=-2$ asíntota vertical $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=\dfrac{1}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$

$y=0$ asíntota horizontal $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{-\infty}=0^- \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{+\infty}=0^+ \end{cases}$

x	0^{O}	-1	$-1{,}5$	$-2{,}5$	-3	-4
y	$0{,}5$	1	2	-2	-1	$0{,}5$



i) $f(x)=\begin{cases} 2^{-x} & si \quad x\le 0 \\ 3-x & si \quad 0<x<4 \\ x-2 & si \quad x=4 \text{ o } x>5 \end{cases}$ $\qquad Dom(f)=(-\infty,4]\cup(5,+\infty)$

- $y=2^{-x}\rightarrow$ función exponencial

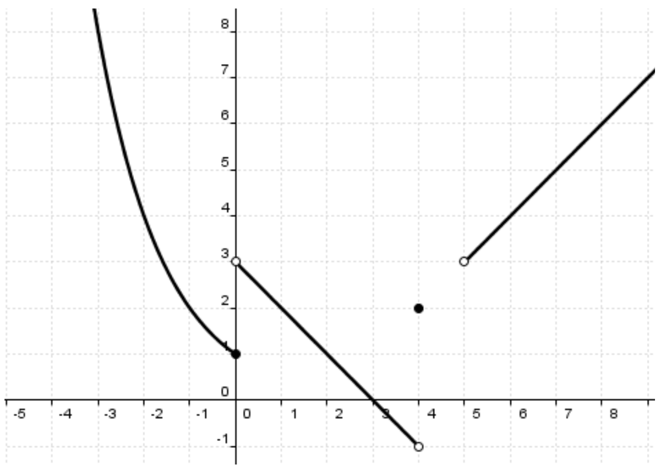
x	$0^{\bullet}$	-1	-2	-3
y	1	2	4	8

- $y=3-x\rightarrow$ función lineal

x	0^{O}	1	4^{O}
y	3	2	-1

- $y=x-2\rightarrow$ función lineal

x	4	5^{O}	6	7
y	2	3	4	5



j) $f(x)=\left|-x^2+4x-3\right|$

1º) Representamos la parábola: $y=-x^2+4x-3$

1) $a=-1<0\Rightarrow$ convexa $\cap$

2) Eje de simetría $x=\dfrac{-b}{2a}\Rightarrow x=\dfrac{-4}{-2}=2\Rightarrow x=2$

3) Vértice $\begin{cases} x_v=2 \\ y_v=f(2)=-(2)^2+4\cdot(2)-3=-4+8-3=1 \end{cases}\Rightarrow V(2,1)$

4) Puntos de corte con los ejes

Eje OX: $\left.\begin{matrix} y=-x^2+4x-3 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$

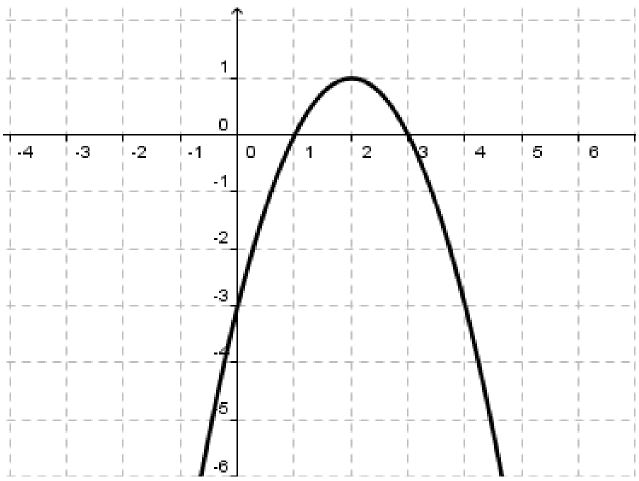
$-x^2+4x-3=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-12}}{-2}=\dfrac{-4\pm 2}{-2}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}\Rightarrow$ Los puntos de corte con el eje OX son (1,0) y (3,0)

Eje OY: $\left.\begin{array}{l} y = -x^2 + 4x - 3 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -3$

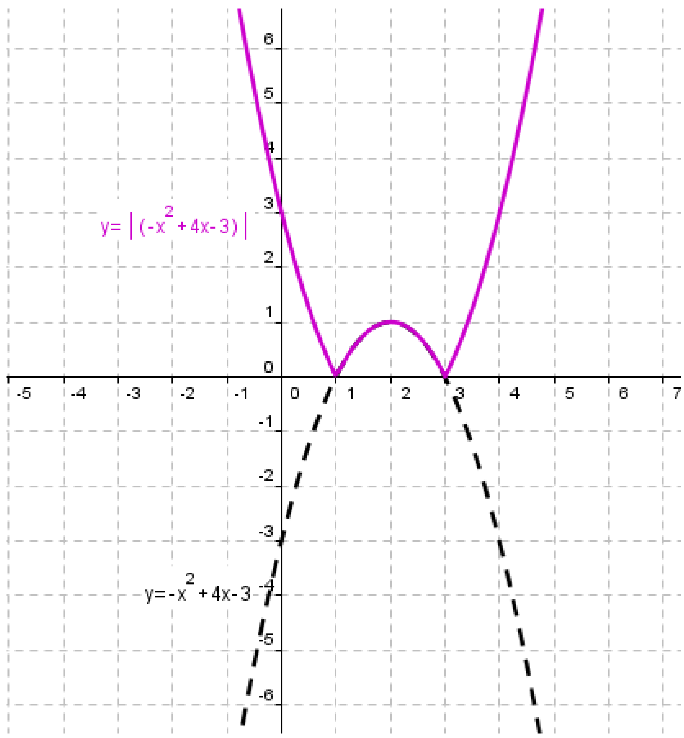
El punto de corte con el eje OY es $(0,-3)$

5) Tabla de valores

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-8	-3	0	1	0	-3	-8



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A| = \begin{cases} -A & \text{si} \quad A < 0 \\ A & \text{si} \quad A \geq 0 \end{cases}$



k) $f(x)=x^2-|x|-2=\begin{cases} x^2+x-2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2-x-2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$

- $y=x^2+x-2$

1) $a=1>0 \Rightarrow$ cóncva $\cup$

2) Eje de simetría $x=\dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x=\dfrac{-1}{2}=-0{,}5 \Rightarrow x=-0{,}5$

3) Vértice $\begin{cases} x_v=-\dfrac{1}{2} \\ y_v=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)-2=-\dfrac{9}{4}=-2{,}25 \end{cases} \Rightarrow V\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$

4) Puntos de corte con los ejes

Eje OX: $\left.\begin{array}{l} y=x^2+x-2 \\ y=0 \end{array}\right\}$

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow$ Los puntos de corte con el eje OX son $(1,0)$ y $(-2,0)$

Eje OY: $\left.\begin{array}{l} y=x^2+x-2 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=-2$

El punto de corte con el eje OY es $(0,-2)$

5) Tabla de valores

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2
y	4	0	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	0	4

- $y=x^2-x-2$

1) $a=1>0 \Rightarrow$ cóncva $\cup$

2) Eje de simetría $x=\dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x=\dfrac{1}{2}=0{,}5$

3) Vértice $\begin{cases} x_v=\dfrac{1}{2} \\ y_v=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)-2=-\dfrac{9}{4}=-2{,}25 \end{cases} \Rightarrow V\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{9}{4}\right)$

4) Puntos de corte con los ejes

Eje OX: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - x - 2 \\ y = 0 \end{array}\right\}$

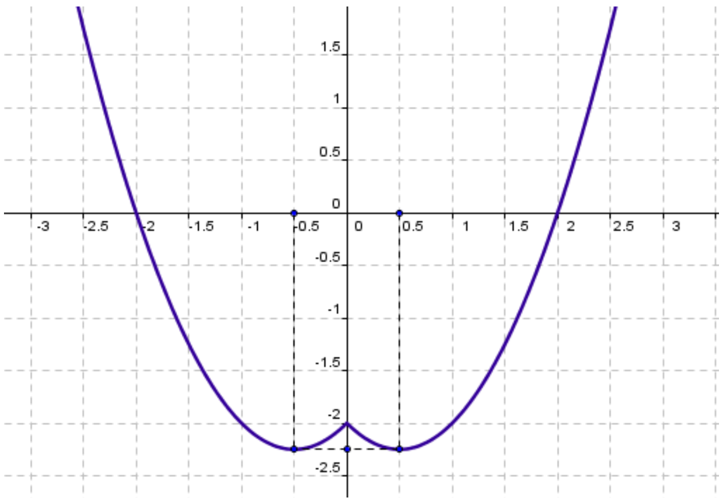
$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow$ Los puntos de corte con el eje OX son $(-1{,}0)$ y $(2{,}0)$

Eje OY: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - x - 2 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -2$

El punto de corte con el eje OY es $(0,-2)$

5) Tabla de valores

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	4	0	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	0	4



l) $f(x) = \left| x^2 - 5x - 4 \right|$

1º) Representamos la parábola: $y = x^2 - 5x - 4$

1) $a = 1 > 0 \Rightarrow$ cóncava $\cup$

2) Eje de simetría $x = \dfrac{-b}{2a} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$

3) Vértice $\begin{cases} x_v = 2{,}5 \\ y_v = f\left(\dfrac{5}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \left(\dfrac{5}{2}\right) - 4 = -\dfrac{41}{4} = -10{,}25 \end{cases} \Rightarrow V\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{41}{4}\right)$

4) Puntos de corte con los ejes

Eje OX: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 5x - 4 \\ y = 0 \end{array}\right\}$

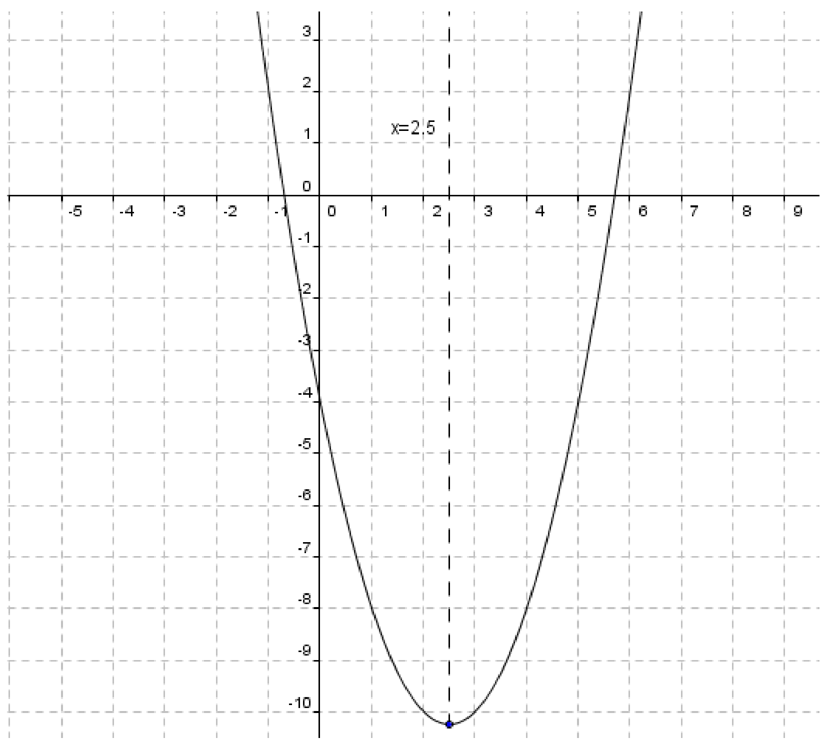
$x^2 - 5x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25+16}}{-2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{41}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+\sqrt{41}}{2} \cong 5{,}7 \\ x = \dfrac{5-\sqrt{41}}{2} \cong -0{,}7 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Los puntos de corte con el eje OX son $\left(\dfrac{5+\sqrt{41}}{2}, 0\right)$ y $\left(\dfrac{5-\sqrt{41}}{2}, 0\right)$

Eje OY: $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 5x - 4 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -4$

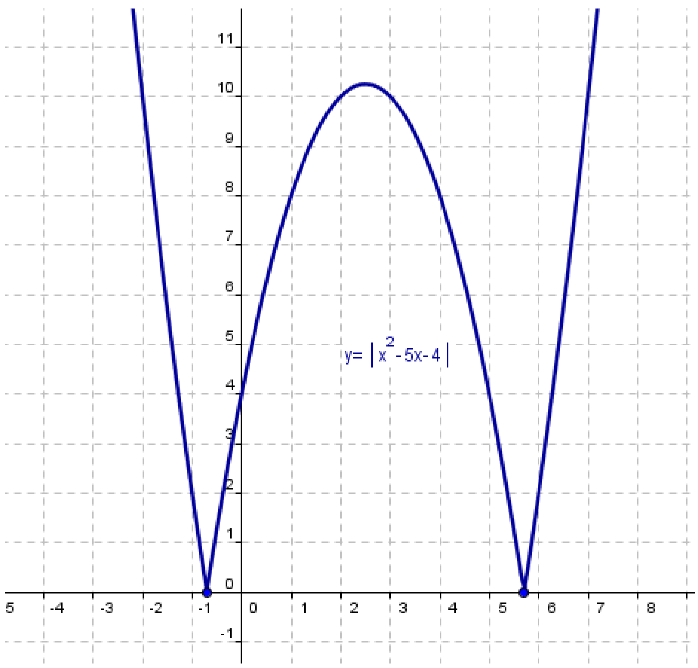
El punto de corte con el eje OY es $(0,-4)$

5) Tabla de valores

x	0	1	2	$\dfrac{5}{2}$	3	4	5
y	-4	-8	-10	$-\dfrac{41}{4}$	-10	-8	-4



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A| = \begin{cases} -A & \text{si} \quad A < 0 \\ A & \text{si} \quad A \geq 0 \end{cases}$

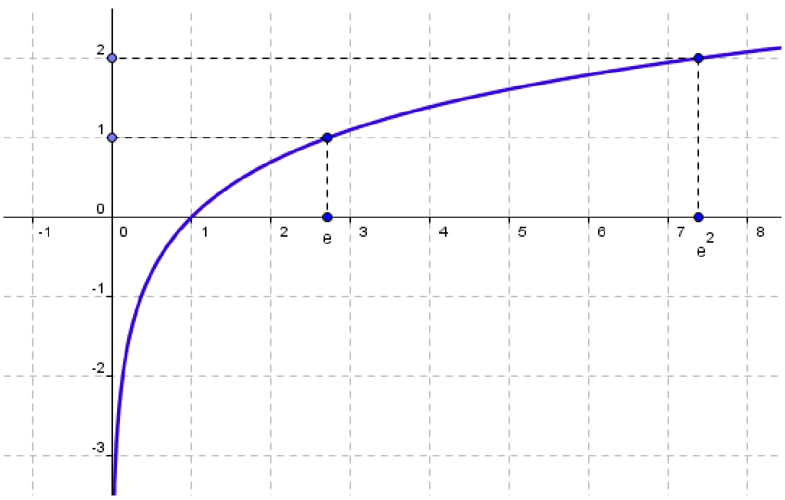


m) $f(x)=|\ln x|$

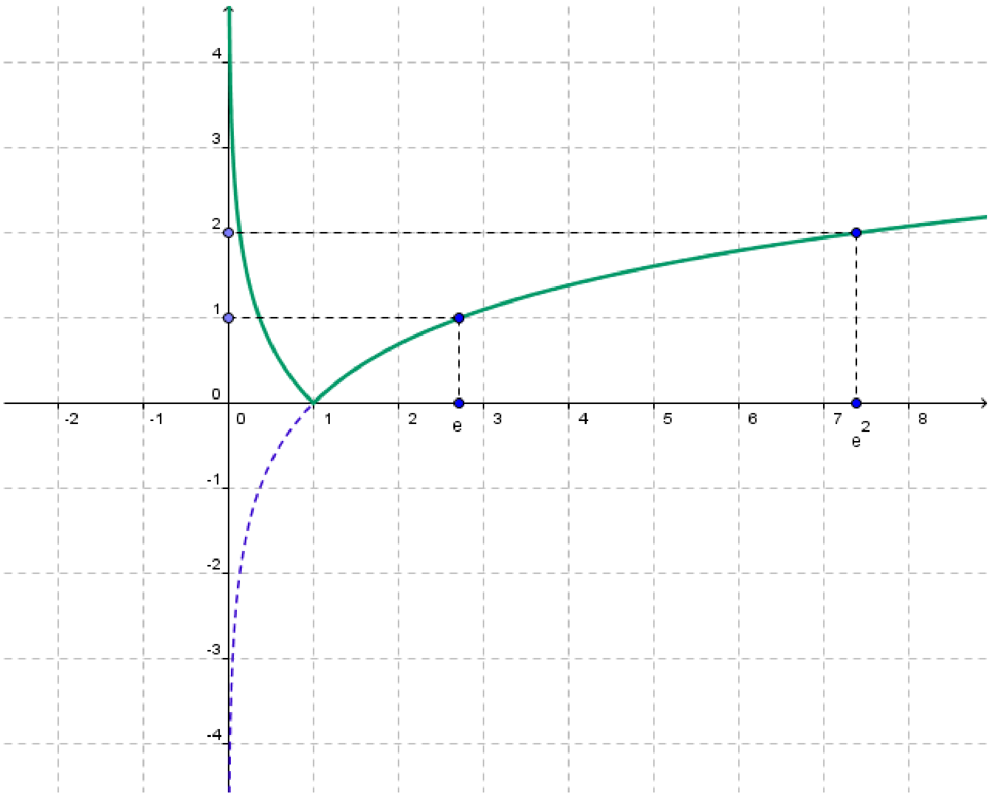
1º) Representamos la función logarítmica: $y=\ln x$

- $Dom(y=\ln x)=(0,+\infty)$
- Corta al eje OX en el punto $(1,0)$
- No corta al eje OY
- $x=0$ es asíntota vertical por la derecha $(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty)$
- <u>Tabla de valores</u>

x	0^+	1	e	e^2
y	$-\infty$	0	1	2



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A|=\begin{cases}-A & \text{si} \quad A<0\\ A & \text{si} \quad A\geq 0\end{cases}$



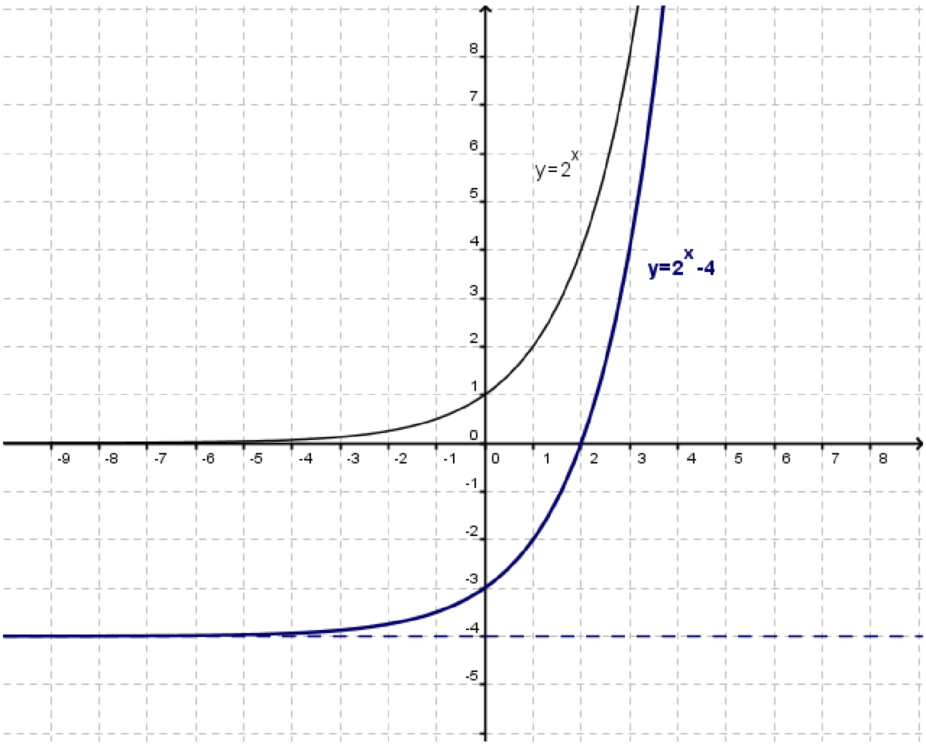
n) $f(x) = \left|2^x - 4\right|$

1º) Representamos la función exponencial: $y = 2^x - 4$ (que, a su vez, es la función $y = 2^x$ trasladada verticalmente 4 unidades hacia abajo)

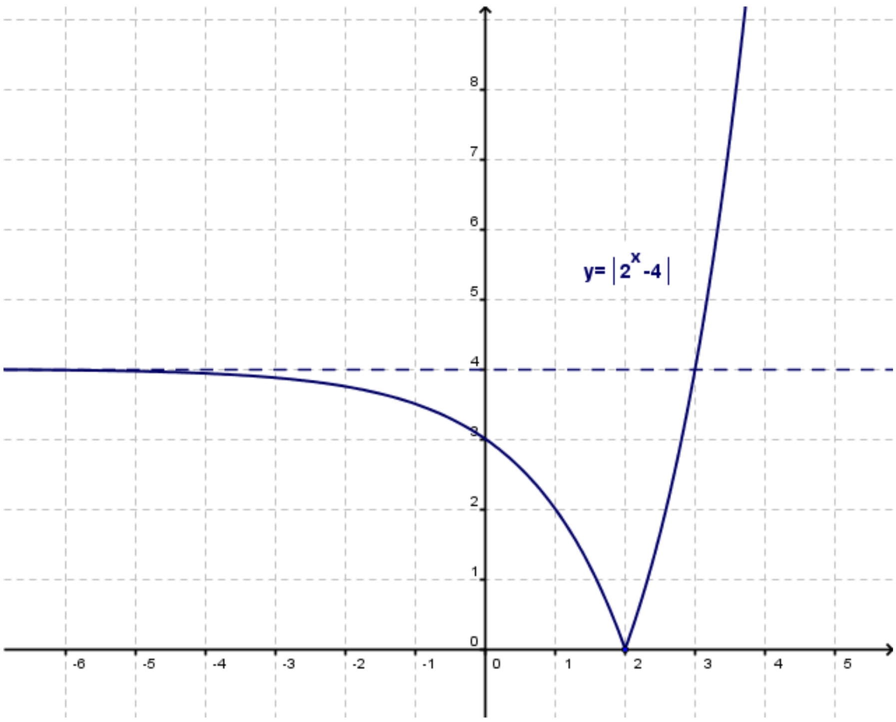
- $y = 2^x$

- $Dom(y = 2^x) = \Re$
- $\operatorname{Re}c(y = 2^x) = (0, +\infty)$
- No corta al eje OX
  Punto ce corte con el eje OY (0,1)
- Asíntota horizontal por la izquierda $y = 0$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A| = \begin{cases} -A & \text{si} \quad A < 0 \\ A & \text{si} \quad A \geq 0 \end{cases}$



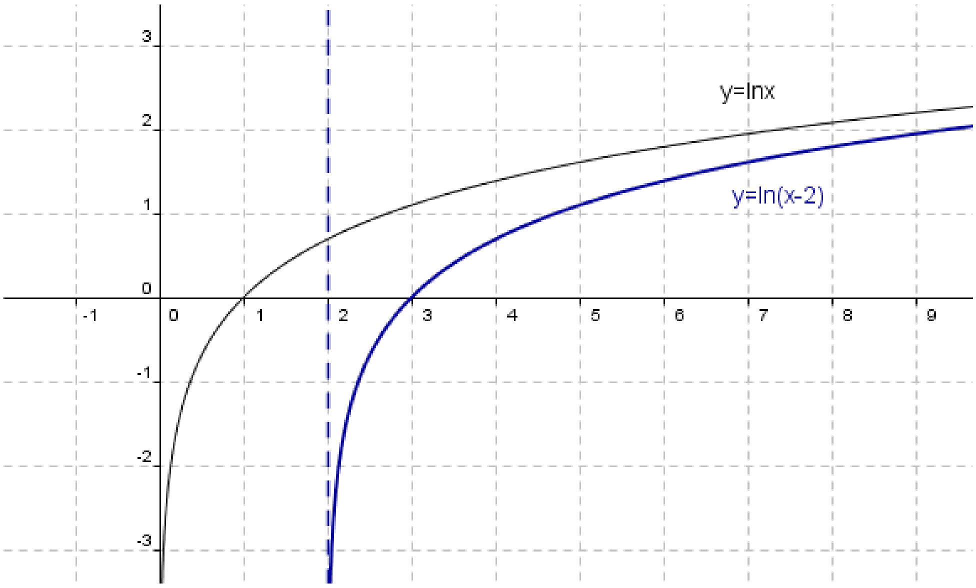
o) $f(x) = \left|\ln(x-2)\right|$

1º) Representamos la función logarítmica: $y = \ln(x-2)$ (que, a su vez, es la función $y = \ln x$ trasladada horizontalmente 2 unidades a la derecha)

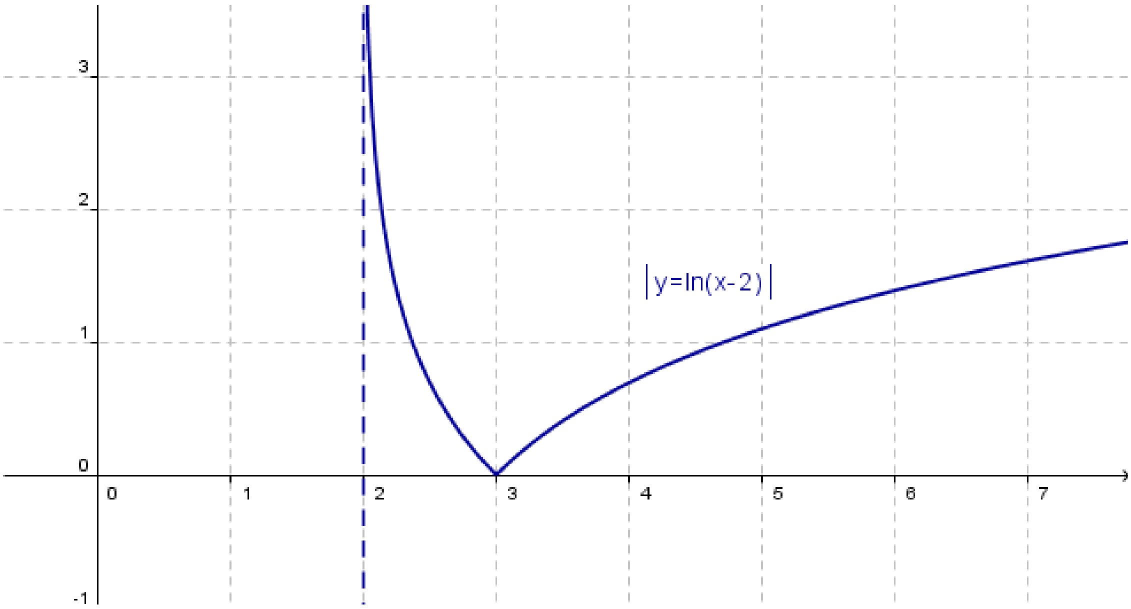
- $y = \ln x$

- $Dom(y = \ln x) = (0, +\infty)$
- Corta al eje OX en el punto $(1,0)$
- No corta al eje OY
- $x = 0$ es asíntota vertical por la derecha $(\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty)$
- <u>Tabla de valores</u>

x	0^+	1	e	e^2
y	$-\infty$	0	1	2



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A| = \begin{cases} -A & \text{si} \quad A < 0 \\ A & \text{si} \quad A \geq 0 \end{cases}$



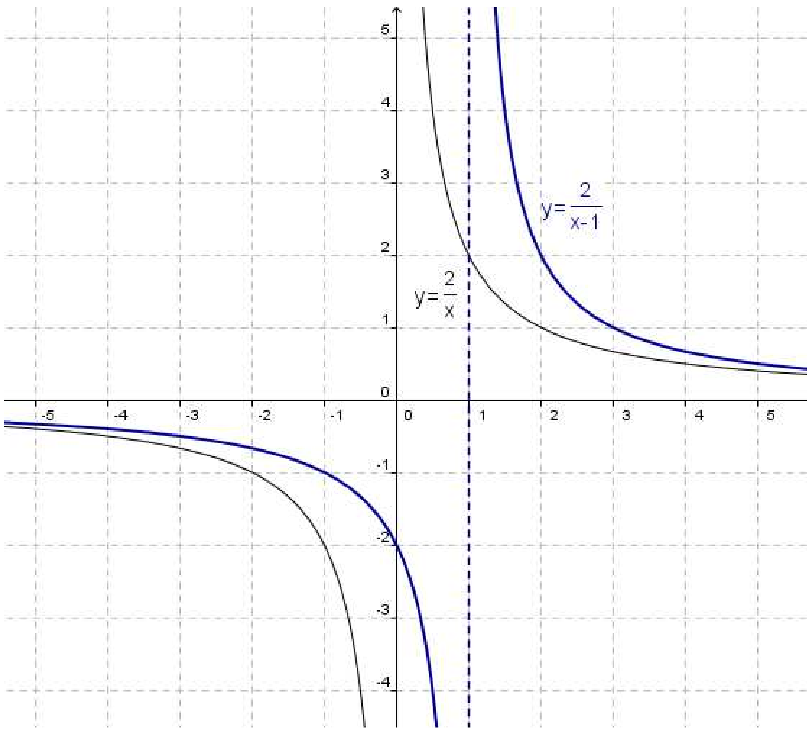
p) $f(x) = \left| \dfrac{2}{x-1} \right|$

1º) Representamos la función $y=\frac{2}{x-1}$, que a su vez, es la función $y=\frac{2}{x}$ trasladada horizontalmente 1 unidad a la derecha

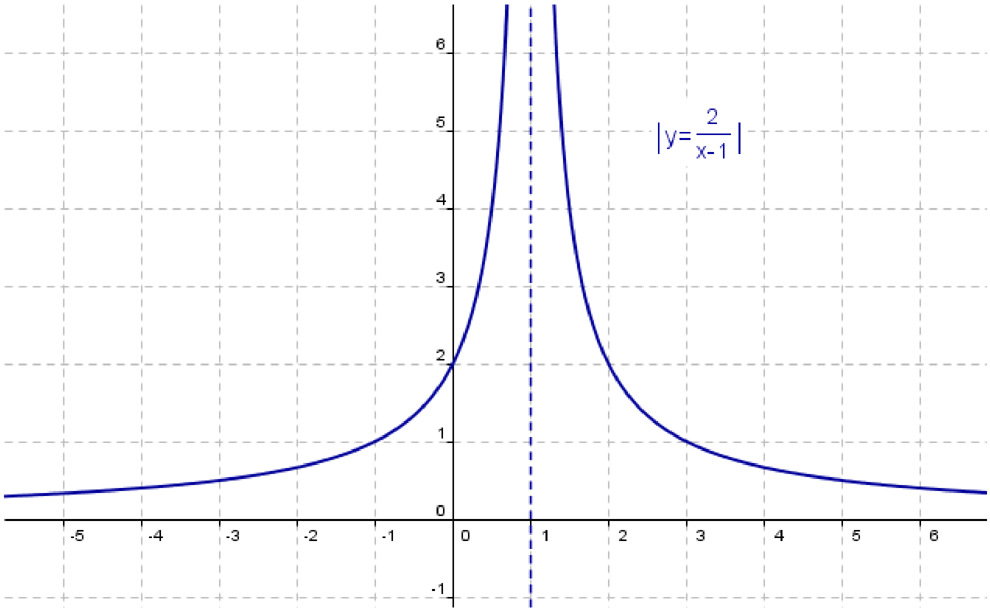
- $y=\frac{2}{x}$

- $Dom(f)=\Re-\{0\}$
- $\mathrm{Re}c(f)=\Re-\{0\}$
- No corta a los ejes coordenados
- $x=0$ asíntota vertical $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2}{x}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{x}=+\infty\end{cases}$
- $y=0$ asíntota horizontal $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2}{x}=0^-\\ \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0^+\end{cases}$
- Tabla valores

x	-4	-2	-1	$-0{,}5$	$0{,}5$	1	2	4
y	$-0{,}5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0{,}5$



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A|=\begin{cases}-A & \text{si} & A<0\\ A & \text{si} & A\geq 0\end{cases}$



q) $f(x)=\left|\frac{1-x}{x+1}\right|$

1º) Representamos la función $y=\frac{1-x}{x-1}=\frac{-x+1}{x+1}$

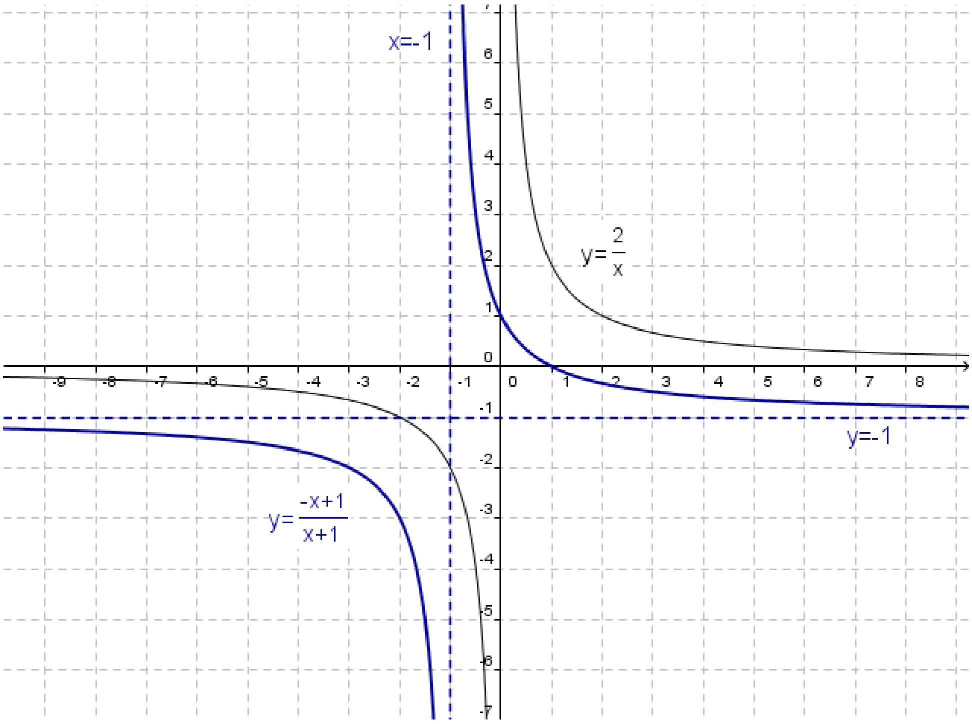
$y=\frac{-x+1}{x+1} \Rightarrow y=\frac{2}{x+1}-1 \Rightarrow$ Es la función $y=\frac{2}{x}$ $\begin{cases} \text{T.V. } 1 \text{ unidad abajo} \\ \text{T.H. } 1 \text{ unidad a la izquierda} \end{cases}$

$$\begin{array}{r|l} -x+1 & x+1 \\ \underline{+x+1} & \overline{-1} \\ 2 & \end{array}$$

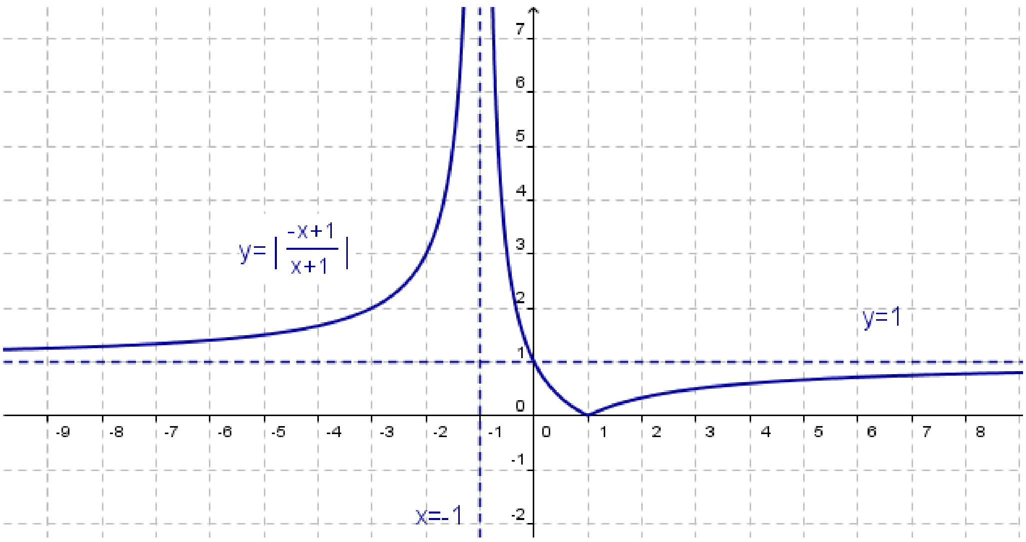
➢ $y=\frac{2}{x}$

- $Dom(f)=\Re-\{0\}$
- $\operatorname{Re}c(f)=\Re-\{0\}$
- No corta a los ejes coordenados
- $x=0$ asíntota vertical $\begin{cases} \lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x}=-\infty \\ \lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x}=+\infty \end{cases}$
- $y=0$ asíntota horizontal $\begin{cases} \lim_{x\to -\infty}\frac{2}{x}=0^- \\ \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0^+ \end{cases}$
- Tabla valores

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$0,5$	1	2	4
y	$-0,5$	-1	-2	-4	4	2	1	$0,5$



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A| = \begin{cases} -A & \text{si} \quad A < 0 \\ A & \text{si} \quad A \geq 0 \end{cases}$



r) $f(x) = \left|\dfrac{2}{3-x}\right|$

1º) Representamos la función $y = \dfrac{2}{3-x} = \dfrac{-2}{x-3}$, que es la función $y = \dfrac{-2}{x}$ trasladada horizontalmente 3 unidades a la derecha

- $y = \dfrac{-2}{x}$

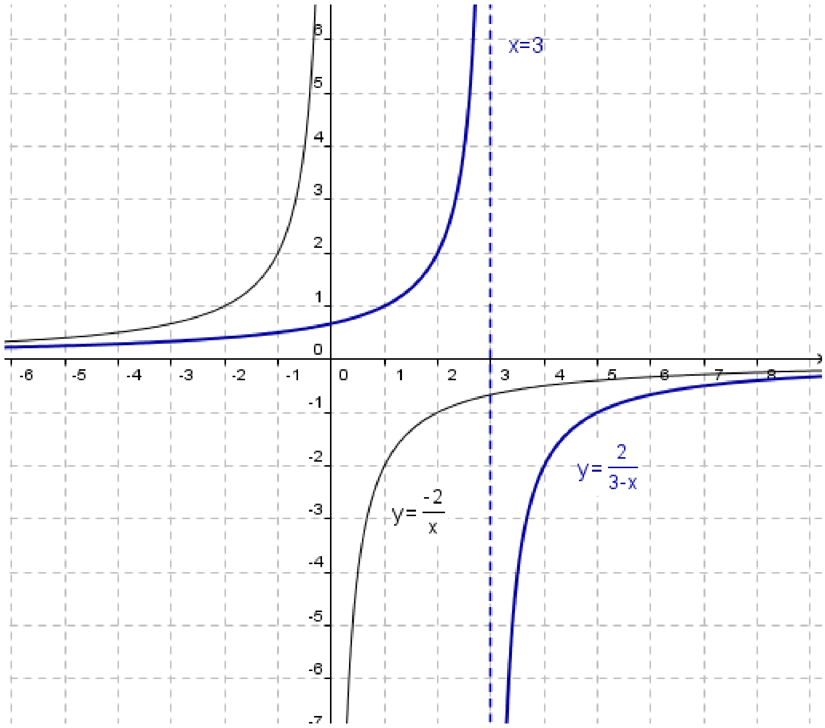
- $Dom(f) = \Re - \{0\}$
- $Rec(f) = \Re - \{0\}$
- No corta a los ejes coordenados

- $y = 0$ asíntota horizontal $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2}{x} = 0^{+} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{x} = 0^{-} \end{cases}$

- $x = 0$ asíntota vertical $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^{-}} \dfrac{-2}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^{+}} \dfrac{-2}{x} = -\infty \end{cases}$

- Tabla valores

x	-4	-2	-1	$-0,5$	$0,5$	1	2	4
y	$0,5$	1	2	-4	-4	-2	-1	$-0,5$



2º) Representamos $f(x)$: Recuerda $|A| = \begin{cases} -A & \text{si} & A < 0 \\ A & \text{si} & A \geq 0 \end{cases}$