

Ejercicios resueltos de cálculo de límites de funciones

Calcular los siguientes límites:

1 $\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - 5x + 6)$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 - 5x + 6) = -1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$$

2 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 5x + 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2}{x^2 - 5x + 2} = \frac{3^2 - 2}{3^2 - 5 \cdot 3 + 2} = -\frac{7}{4}$$

3 $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x})$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + x}) = (\sqrt{1^2 + 3 \cdot 1} - \sqrt{1^2 + 1}) = 2 - \sqrt{2}$$

4
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

En los puntos $x = -1$ y $x = 1$

En $x = -1$, los límites laterales son:

Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow -1^-} 1 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1$

Como en ambos casos coinciden, existe el límite y vale **1**.

En $x = 1$, los límites laterales son:

Por la izquierda: $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$

Por la derecha: $\lim_{x \rightarrow 1^+} 2 = 2$

Como no coinciden los límites laterales **no tiene** límite en $x = 1$.

$$5 \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \infty$$

$$6 \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 5x + 6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 5x + 6) = -\infty$$

$$7 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x^4 + x^3 - 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3x^4 + x^3 - 2x} = 0$$

Calcular los límites cuando x tiende a menos infinito:

$$1 \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^4 - x^3 + 2x) = \infty$$

$$2 \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 5x + 6)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 5x + 6) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 5x - 6) = \infty$$

$$3 \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2 - 8x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^3 - 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(-x)^3 - 5(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x^3 + 5x}$$

No existe el límite, porque el radicando toma valores negativos.

$$4 \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - 5x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^3 - 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{(-x)^3 - 5(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{-x^3 + 5x} = -\infty$$

Hallar los siguientes límites:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) = 2$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} = 6$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

No tiene límite en $x = -1$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+9-9)(\sqrt{x+16}+4)}{(x+16-16)(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Calcular los límites:

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{x^4 - x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^2}{x^4 - x^3} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^5}{x^5} - \frac{3x^2}{x^5}}{\frac{x^4}{x^5} - \frac{x^3}{x^5}} = \frac{2 - \frac{3}{x^3}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0}{0 - 0} = \infty$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+2} + 2^x}{3^{x-2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^{x+2} + 2^x}{3^{x-2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x \cdot 3^2 + 2^x}{3^x \cdot 3^{-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^x \cdot 3^2}{3^x} + \frac{2^x}{3^x}}{\frac{3^x \cdot 3^{-2}}{3^x}} = \frac{9 + 0}{\frac{1}{9}} = 81$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 1}{\sqrt[3]{5x^3 + 4x - 2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x - 1}{\sqrt[3]{5x^3 + 4x - 2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{7x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\frac{5x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3} - \frac{2}{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{5 + \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3}}} = \frac{7}{\sqrt[3]{5}}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5} = \infty$$

Al elevar el binomio del numerador al cuadrado obtenemos x^4 , y por tanto el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x \cdot 2 + 3^x \cdot 3}{2^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} = 3$$