Resuelve

Página 81

■ **Resuelve los siguientes sistemas y calcula el determinante de cada matriz de coeficientes:**

a) $\begin{cases} 2x + 3y = 29 \\ 3x - \ \ y = \ \ 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 3y = \ \ \ 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 4x + \ \ y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 3x + 11y = 128 \\ 8x - \ \ 7y = \ \ 46 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + 3y = 29 \\ 3x - \ \ y = \ \ 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -11 \neq 0$ *Solución:* $x = 4, \ y = 7$

b) $\left.\begin{array}{r} 5x - 3y = \ \ \ 8 \\ -10x + 6y = -16 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -10 & 6 \end{vmatrix} = 0$ *Solución:* $x = \frac{8}{5} + \frac{3}{5}\lambda, \ y = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{r} 4x + \ \ y = 17 \\ 5x + 2y = 19 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ *Solución:* $x = 5, \ y = -3$

d) $\left.\begin{array}{r} 9x - 6y = 7 \\ -6x + 4y = 11 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ *Sistema incompatible*

e) $\left.\begin{array}{r} 18x + 24y = 6 \\ 15x + 20y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 18 & 24 \\ 15 & 20 \end{vmatrix} = 0$ *Solución:* $x = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\lambda, \ y = \lambda$

f) $\left.\begin{array}{r} 3x + 11y = 128 \\ 8x - \ \ 7y = \ \ 46 \end{array}\right\}$ $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -109 \neq 0$ *Solución:* $x = \frac{1\,402}{109}, \ y = \frac{886}{109}$

1 Determinantes de orden dos

Página 82

1 Siendo A una matriz 2×2, justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Para que $|A| = 0$ es necesario que sus cuatro elementos sean 0.

b) Si los dos elementos de la segunda columna de A son 0, entonces $|A| = 0$.

c) Si las dos filas de A coinciden, entonces $|A| = 0$.

d) Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -15$, entonces $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 15$.

e) Si $\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 43$, entonces $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 430$.

a) Falso, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

b) Verdadero, porque en los dos sumandos del determinante aparece algún elemento de la segunda fila.

c) Verdadero: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \to |A| = a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12} = 0$

d) Verdadero: $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - ad = -(ad - cb) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -(-15) = 15$

e) Verdadero: $\begin{vmatrix} m & 30 \\ n & 70 \end{vmatrix} = 70m - 30n = 10(7m - 3n) = 10\begin{vmatrix} m & 3 \\ n & 7 \end{vmatrix} = 10 \cdot 43 = 430$

2 Calcula el valor de los siguientes determinantes y di por qué son cero algunos de ellos:

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$

b) $\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -50$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 11 & 0 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene una columna de ceros.

d) $\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 0$, porque tiene sus dos filas iguales.

e) $\begin{vmatrix} 3 & 11 \\ 21 & 77 \end{vmatrix} = 0$, porque sus filas son proporcionales: (1.ª) · 7 = (2.ª).

f) $\begin{vmatrix} -140 & 7 \\ 60 & -3 \end{vmatrix} = 0$, porque sus dos columnas son proporcionales: (2.ª) · (–20) = (1.ª).

3 Sean $A = \begin{pmatrix} l & m \\ n & p \end{pmatrix}$ y $|A| = -13$. Calcula:

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix}$ **c)** $|3A|$ **d)** $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = -(-13) = 13$

b) $\begin{vmatrix} l & m \\ 7n & 7p \end{vmatrix} = 7 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 7 \cdot (-13) = -91$

c) $|3A| = \begin{vmatrix} 3l & 3m \\ 3n & 3p \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = 9 \cdot (-13) = -117$

d) $\begin{vmatrix} 3n & 5p \\ 3l & 5m \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} n & p \\ l & m \end{vmatrix} = (-1) \cdot 15 \cdot \begin{vmatrix} l & m \\ n & p \end{vmatrix} = (-15) \cdot (-13) = 195$

2 Determinantes de orden tres

Página 83

1 Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 \\ 9 & 6 & 8 \end{vmatrix} = -114$ b) $\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$

2 Halla el valor de estos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 14$ b) $\begin{vmatrix} 10 & 47 & 59 \\ 0 & 10 & 91 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 1\,000$

Página 85

3 Dados los determinantes

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 8 & 1 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 8 & 1 & 7 \\ 3 & 6 & -3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 20 \\ 8 & 1 & 8 \\ 3 & 6 & 18 \end{vmatrix}$$

justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $A = 0$ porque su tercera columna es suma de las dos primeras.

b) $B = 0$ porque su tercera columna es diferencia de las dos primeras.

c) $C = 0$ porque su tercera columna es producto de las dos primeras.

a) Verdadero por la propiedad 9 de los determinantes. Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero.

b) Verdadero por la porpiedad 9 de los determinantes. Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de las demás paralelas, entonces su determinante es cero.

c) Falso, porque el producto de dos líneas no es una combinación lineal de ellas.

4 Justifica, sin desarrollar, estas igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ -8 & -2 & -14 \end{vmatrix} = 0$ **c)** $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 2 & 9 & 7 \\ 27 & 94 & 71 \end{vmatrix} = 0$

a) Tiene una fila de ceros (propiedad 2).

b) La 3.ª fila es proporcional a la 1.ª:

(3.ª) = (–2) · (1.ª) (propiedad 6)

c) La 3.ª fila es combinación lineal de las dos primeras:

(3.ª) = (1.ª) + 10 · (2.ª) (propiedad 9)

5 **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$**, calcula sin desarrollar los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 = 3$

b) $\begin{vmatrix} 5x & 5y & 5z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot \dfrac{1}{5}\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$

c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

3 Menor complementario y adjunto

Página 86

1 Halla dos menores de orden dos y otros dos menores de orden tres de la matriz *M*.

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Menores de orden dos; por ejemplo:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=4$$

Menores de orden tres; por ejemplo:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}=68, \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}=21$$

2 Halla el menor complementario y el adjunto de los elementos a_{12}, a_{33} y a_{43}.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}=-2;\ A_{12}=(-1)^{(1+2)}\cdot\alpha_{12}=-1\cdot(-2)=2$$

$$\alpha_{33}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{vmatrix}=108;\ A_{33}=(-1)^{(3+3)}\cdot\alpha_{33}=1\cdot 108=108$$

$$\alpha_{43}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=16;\ A_{43}=(-1)^{(4+3)}\cdot\alpha_{43}=-1\cdot 16=-16$$

4 Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Página 87

1 Calcula el siguiente determinante aplicando la regla de Sarrus y desarrollándolo por cada una de sus filas y cada una de sus columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix}$$

Comprueba que se obtiene el mismo resultado en los siete casos.

Aplicando la regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 4 + (-5) \cdot 8 \cdot (-1) + 7 \cdot 6 \cdot 9 - (-1) \cdot 2 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 3 - 7 \cdot (-5) \cdot 4 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) - 7 \cdot (-74) - 1 \cdot (-58) = -120 + 518 + 58 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 36 + 2 \cdot 21 - 6 \cdot (-39) = 180 + 42 + 234 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 44 - 8 \cdot 13 + 4 \cdot 41 = 396 - 104 + 164 = 456$$

Desarrollando por la 1.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 9 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-40) + 5 \cdot 36 + 9 \cdot 44 = -120 + 180 + 396 = 456$$

Desarrollando por la 2.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = -7 \cdot (-74) + 2 \cdot 21 - 8 \cdot 13 = 518 + 42 - 104 = 456$$

Desarrollando por la 3.ª columna:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -1 \\ -5 & 2 & 6 \\ 9 & 8 & 4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-58) - 6 \cdot (-39) + 4 \cdot 41 = 58 + 234 + 164 = 456$$

2 Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2\,030$

(1) Desarrollando por la 2.ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desarrollando por la 4.ª fila.

También podríamos haber observado que la 4.ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

5 El rango de una matriz a partir de sus menores

Página 88

1 Calcula el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 3 & 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.
La 3.ª fila es la suma de las dos primeras, y la 4.ª fila es la suma de la 2.ª y la 3.ª $\rightarrow$ *ran* $(A) = 2$.

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 6 & 23 & 16 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Tomamos menores de orden 3: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \rightarrow$ Las 3 primeras filas son linealmente independientes.

Tomamos menores de orden 4: $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 12 \\ 12 & 10 & 6 & 23 \end{vmatrix} = 0;\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 12 & 8 \\ 12 & 10 & 23 & 16 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ *ran* $(B) = 3$.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, entonces *ran* $(C) = 4$.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -3 & -7 \\ 7 & 2 & -3 & -8 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 2: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Como $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$ y la 3.ª fila es la suma de las dos primeras, entonces *ran* $(D) = 3$.

6 Criterio para saber si un sistema es compatible

Página 89

1 Averigua si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ x+3y=-2 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4x+5y=7 \\ 2x-y=0 \\ 7x+11y=4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+z=2 \\ 2y-z=0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+3y-z=1 \\ 2x+z=2 \\ 2y-z=5 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=5 \\ x+3y=-2 \\ 2x-y=3 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A'=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right)$

$\left.\begin{array}{l} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=11\neq 0 \rightarrow ran\,(A)=2 \\ |A'|=0 \rightarrow ran\,(A')=2 \end{array}\right\}$ El sistema es *compatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} 4x+5y=7 \\ 2x-y=0 \\ 7x+11y=4 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$ $A'=\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & 11 & 4 \end{array}\right)$

$|A'|=147\neq 0 \rightarrow ran\,(A')=3\neq ran\,(A)=2$

El sistema es *incompatible*.

c) $\left.\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x\quad +z=2 \\ 2y-z=0 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$

Calculamos el rango de A:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-6\neq 0$ y $|A|=0 \rightarrow ran\,(A)=2$

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$ (pues la 1.ª y la 3.ª columna son iguales) $\rightarrow ran\,(A')=2=ran\,(A)$

Como la 4.ª columna de A' y la 1.ª son iguales, necesariamente $ran\,(A')=ran\,(A)$; es decir, el sistema es *compatible*.

d) $\left.\begin{array}{r} x+3y-z=1 \\ 2x\quad +z=2 \\ 2y-z=5 \end{array}\right\}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ $A'=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right)$

Sabemos que $ran\,(A)=2$ (ver apartado anterior).

Calculamos el rango de A':

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-30\neq 0 \rightarrow ran\,(A')=3\neq ran\,(A)$

El sistema es *incompatible*.

7 Regla de Cramer

Página 90

1 Resuelve mediante la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} x - 3y + 5z = -24 \\ 2x - y + 4z = -8 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -24 & -3 & 5 \\ -8 & -1 & 4 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7; \; |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & -24 & 5 \\ 2 & -8 & 4 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix} = -2; \; |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -24 \\ 2 & -1 & -8 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 5$$

Por tanto: $x = 7$, $y = 2$, $z = -5$

b) $\left.\begin{array}{l} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 8 \\ 2x + 3y = 10 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 8 & -1 & 1 \\ 10 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -30; \; |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 8 & 1 \\ 2 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 0; \; |A_z| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 10 \end{vmatrix} = -18$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = 3$

2 Resuelve aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x - 5y + 3z = 4 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x + y + 7z = 11 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 13$

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 11 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 65; \; |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 0; \; |A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 1 & 11 \end{vmatrix} = -26$$

Por tanto: $x = 5$, $y = 0$, $z = -2$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x - 4y - z = 4 \\ y + z = 6 \\ 2x + 5y + 7z = -1 \end{array}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

Por tanto, $ran\,(A) < 3$.

Como hay menores de orden 2 distintos de cero, $ran\,(A) = 2$.

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \end{array}\right) \to ran\,(A') = 3$$

Por tanto, este sistema es *incompatible.*

Página 91

3 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a) $$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \text{ y } \ |A| = 0 \ \rightarrow \ ran(A) = 2$$

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \text{ (la 1.ª y la 3.ª columna son iguales) } \rightarrow \ ran(A') = 2$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 2.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ -2y + 7z = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x - y = 1 - 3z \ \rightarrow \ x = y + 1 - 3z = 1 + \dfrac{z}{2} \\ -2y = -7z \ \rightarrow \ y = \dfrac{7z}{2} \end{array}$$

Soluciones: $x = 1 + \lambda, \ \ y = 7\lambda, \ \ z = 2\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} x - y + 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = 3 \\ -2y + 7z = 10 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array}\right)$$

Sabemos, por el apartado a), que $ran(A) = 2$.

Calculamos el rango de A':

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 20 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A') = 3 \neq ran(A)$$

El sistema es *incompatible*.

4 **Resuelve estos sistemas:**

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x + y = 3 \\ y + z = 5 \\ x + z = 4 \\ 5x - y + z = 6 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 3$

Calculamos el rango de A':

$|A'| = 0 \rightarrow ran(A') = 3$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la última ecuación y aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{4}{2} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 4 \\ 2x + 6y = 23 \\ -2x + 3y = 1 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 6 & 23 \\ -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$

Como $|A'| = -309 \neq 0$, entonces $ran(A') = 3 \neq ran(A)$.

El sistema es *incompatible*.

8 Sistemas homogéneos

Página 92

1 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x-5y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y=0 \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+3z=0 \\ x-5y-9z=0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x+11y-4z=0 \\ -2x+4y+z=0 \\ x+y-2z=0 \\ 2x-16y+5z=0 \end{cases} \qquad \text{d) } \begin{cases} x+y+5z=0 \\ 3x-y-2t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{aligned} 3x-5y+z&=0 \\ x-2y+z&=0 \\ x+y&=0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \;\to\; ran(A) = 3 = n.^{o} \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

b) $$\left.\begin{aligned} x-y-z&=0 \\ x+y+3z&=0 \\ x-5y-9z&=0 \end{aligned}\right\} \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & -9 \end{vmatrix} = 0$$

Seleccionamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\to\; ran(A) = 2$

Podemos suprimir la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} x-y&=z \\ x+y&=-3z \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x&=-z \\ y&=-2z \end{aligned}$$

Soluciones: $x = -\lambda,\ y = -2\lambda,\ z = \lambda$

c) $$\left.\begin{aligned} x+11y-4z&=0 \\ -2x+4y+z&=0 \\ x+y-2z&=0 \\ 2x-16y+5z&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 11 & -4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -18 \;\to\; ran(A) = 3 = n.^{o} \text{ de incógnitas}$$

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$

d) $$\left.\begin{aligned} x+y+5z&=0 \\ 3x-y-2t&=0 \\ x-y+z-t&=0 \end{aligned}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -14 \neq 0 \;\to\; ran(A) = 3$$

Para resolverlo, pasamos la t al 2.° miembro:

$$\left.\begin{aligned} x+y+5z&=0 \\ 3x-y&=2t \\ x-y+z&=t \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2t & -1 & 0 \\ t & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-7t}{-14} = \frac{t}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2t & 0 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{7t}{-14} = \frac{-t}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2t \\ 1 & -1 & t \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0$$

Soluciones: $x = \lambda,\ y = -\lambda,\ z = 0,\ t = 2\lambda$

2 **Resuelve.**

a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \quad\;\; y + \;\; z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y \qquad = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ \quad\;\; y + \;\; z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x \qquad + 3z \qquad = 0 \\ \quad\; y \qquad\quad - \;\; t = 0 \\ x + \; y \qquad\quad + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + \;\; t = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x \qquad + 3z \qquad = 0 \\ \quad\; y \qquad\quad - \;\; t = 0 \\ x + \; y \qquad\quad + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 9t = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{matrix} x - 2y + 3z = 0 \\ y + \;\; z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y \qquad = 0 \end{matrix}\right\} \; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de A:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0; \; \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0; \; \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto, $ran(A) = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de las dos últimas ecuaciones y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{matrix} x - 2y = -3z \\ y = -z \end{matrix}\right\} \; \begin{matrix} x = -3z + 2y = -3z - 2z = -5z \\ y = -z \end{matrix}$$

Soluciones: $x = -5\lambda, \; y = -\lambda, \; z = \lambda$

b) $\left.\begin{matrix} x - 2y + 3z = 0 \\ y + \;\; z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ -x + 5y + 3z = 0 \end{matrix}\right\}$

El menor asociado a las 1.ª, 2.ª y 4.ª ecuaciones es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 3 = n.^o \text{ de incógnitas}$$

El sistema tiene solución única, que es la solución trivial por ser homogéneo.

Solución: $x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

c) $$\left.\begin{array}{r} x \qquad\; + 3z \qquad = 0 \\ y \qquad\; - \; t = 0 \\ x + \; y \qquad\; + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + \; t = 0 \end{array}\right\} \; A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \; |A| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \;\to\; ran(A) = 3 < n.^o \text{ de incógnitas}$$

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación y pasar la t al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{r} x - \quad 3z = 0 \\ y \qquad = t \\ x + y \qquad = -2t \end{array}\right\} \; \begin{array}{l} z = \dfrac{-x}{3} = \dfrac{3t}{3} = t \\ y = t \\ x = -2t - y = -2t - t = -3t \end{array}$$

Soluciones: $x = -3\lambda, \; y = \lambda, \; z = \lambda, \; t = \lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x \qquad\; + 3z \qquad = 0 \\ y \qquad\; - \; t = 0 \\ x + \; y \qquad\; + 2t = 0 \\ 2x + 2y + 3z + 9t = 0 \end{array}\right\} \; |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 9 \end{vmatrix} = -24 \neq 0 \;\to\; ran(A) = 4 = n.^o \text{ de incógnitas}$$

El sistema tiene solución única, que es la solución trivial por ser homogéneo.

Solución: $x = 0, \; y = 0, \; z = 0, \; t = 0$

9 Discusión de sistemas mediante determinantes

Página 94

1 Discute y resuelve.

a) $\begin{cases} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y = k \\ kx - y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x + y + az = 0 \\ ax - y = -1 \\ x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 0 \\ a & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = 4a^2 - 5a - 6 = 0 \rightarrow a = \frac{5 \pm \sqrt{25+96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8} = \frac{5 \pm 11}{8} \begin{array}{l} a = 2 \\ a = \frac{-3}{4} \end{array}$$

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}}_{A}\,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right) \quad \text{Tomamos el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A) \rightarrow \text{El sistema es } \textit{incompatible}.$$

- Si $a = -\frac{3}{4}$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -3/4 \\ -3/4 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 \end{array}}_{A}\,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right) \quad \text{Tomamos el menor: } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3/4 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{4} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3/4 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3 \neq ran(A) \rightarrow \text{El sistema es } \textit{incompatible}.$$

- Si $a \neq 2$ y $a \neq -3/4$ → *ran*(A) = *ran*(A') = *n.º de incógnitas* = 3, el sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ a & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}}{4a^2 - 5a - 6} = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$$

Solución: $x = \frac{6 - 4a}{4a^2 - 5a - 6}$, $y = \frac{a - 6}{4a^2 - 5a - 6}$, $z = \frac{3}{4a^2 - 5a - 6}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x + \ \ y = k \\ kx - \ \ y = 13 \\ 5x + 3y = 16 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & k \\ k & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

$$|A'| = 3k^2 - 11k + 10 = 0 \ \rightarrow \ k = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 120}}{6} = \frac{11 \pm 1}{6} \ \begin{array}{l} k = 2 \\ k = \dfrac{5}{3} \end{array}$$

- Si $k = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

Tomamos el menor: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2 = \textit{n.º de incógnitas}$

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ 2x - y = 13 \end{array}\right\} \ \text{Sumando: } 3x = 15 \ \rightarrow \ x = 5$$

$$y = 2 - x = 2 - 5 = -3$$

Solución: $x = 5, \ y = -3$

- Si $k = \dfrac{5}{3}$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5/3 \\ 5/3 & -1 & 13 \\ 5 & 3 & 16 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5/3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-8}{3} \neq 0 \ \rightarrow \ ran(A) = ran(A') = 2 = \textit{n.º de incógnitas}$$

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{5}{3}x - y = 13 \end{array}\right\} \ \text{Sumando: } \frac{8}{3}x = \frac{44}{3} \ \rightarrow \ x = \frac{44}{8} = \frac{11}{2}$$

$$y = \frac{5}{3} - x = \frac{5}{3} - \frac{11}{2} = \frac{-23}{6}$$

Solución: $x = \dfrac{11}{2}, \ y = \dfrac{-23}{6}$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq \dfrac{5}{3} \ \rightarrow \ ran(A') = 3 \neq ran(A)$, el sistema es *incompatible*.

2 Discute y resuelve, en función del parámetro a, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r} (a-1)x + y = 0 \\ (a-1)x + (a+1)y = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = (a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)(a+1-1) = a(a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

- Si $a = 0$, queda:

  $$\left.\begin{array}{r} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{array}\right\} \quad y = x \rightarrow \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

  Soluciones: $x = \lambda$, $y = \lambda$

- Si $a = 1$, queda:

  $$\left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2y = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Sistema } \textit{compatible indeterminado}.$$

  Soluciones: $x = \lambda$, $y = 0$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \rightarrow ran(A) = 2$

  El sistema tiene solo la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$

10 Cálculo de la inversa de una matriz

Página 95

1 Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -1 \neq 0 \to$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -15 & 9 & -5 \\ 8 & -5 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -15 & -9 & -5 \\ -8 & -5 & -3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ -5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 15 & 8 & 3 \\ 9 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$|B| = -3 \neq 0 \to$ existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 Calcula la inversa de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A:

$|A| = -1 \neq 0 \to$ existe A^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B:

$|B| = 3 \neq 0 \to$ existe B^{-1}

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 12 & 21 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 12 & -21 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 12 & -4 \\ -2 & -21 & 8 \end{pmatrix}$$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 96

1. Rango de matrices a partir de sus menores

Hazlo tú. Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro k:

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & -k & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ k & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ **b)** $N = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & k \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) El menor formado por las tres primeras columnas es:

$$\begin{vmatrix} 1 & -k & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ k & -4 & 6 \end{vmatrix} = 9k^2 - 36k + 36 \to 9k^2 - 36k + 36 = 0 \to k = 2$$

- Si $k \neq 2 \to ran(M) = 3$
- Si $k = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & -9 & 6 \\ 2 & -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Todas las columnas son porporcionales, luego $ran(M) = 1$.

b) Hallamos los valores que anulan el determinante de N:

$$|N| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \begin{cases} k = 2 \\ k = 1 \end{cases}$$

- Si $k \neq 2$ y $k \neq 1 \to ran(N) = 3$
- Si $k = 2$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(N) = 2$$

- Si $k = 1$:

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(N) = 2$$

c) Resolvemos la ecuación $|P| = 0$:

$$|P| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & k \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (1.^{a}) \\ (2.^{a}) - 2 \cdot (1.^{a}) \\ (3.^{a}) + (1.^{a}) \\ (4.^{a}) + (1.^{a}) \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & k+1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & k+1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8k - 16 = 0 \to k = 2$$

- Si $k \neq 2 \to ran(P) = 4$
- Si $k = 2 \to ran(P) < 4$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 8 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \to ran(P) \geq 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 8 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -15 \neq 0 \to ran(P) = 3$$

Página 97

2. Regla de Cramer

Hazlo tú. Resuelve aplicando la regla de Cramer.

a) $\begin{cases} 7x - 5y = 8 \\ -3x + 2y = -9 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 5x + y - 3z = 18 \end{cases}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1$; $|A_x| = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ -9 & 2 \end{vmatrix} = -29$; $|A_y| = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ -3 & -9 \end{vmatrix} = -39$

$x = \dfrac{-29}{-1} = 29$, $y = \dfrac{-39}{-1} = 39$

Solución: (29, 39)

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$

Quitamos la 3.ª ecuación por ser combinación lineal de las anteriores:

$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Pasamos z al segundo miembro para tener el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. Hacemos $z = \lambda$ (parámetro).

$\begin{cases} x + y = 4 + \lambda \\ x - y = 3 \end{cases}$

$|A_x| = \begin{vmatrix} 4+\lambda & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda - 7$; $|A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 4+\lambda \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\lambda - 1$

Soluciones: $\left(\dfrac{\lambda+7}{2}, \dfrac{\lambda+1}{2}\right)$

3. Estudio de la compatibilidad de un sistema

Hazlo tú. Estudia el siguiente sistema según los valores de k y resuélvelo cuando sea posible:

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ x + z = 1 \\ 3x + 4y + z = k \end{cases}$$

Buscamos el valor de k para el cual $|A'| = 0$.

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - (1.^a) \\ (4.^a) - 3 \cdot (1.^a) \end{matrix} \rightarrow = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & k-12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & k-12 \end{vmatrix} = 15 - 3k = 0 \rightarrow k = 5$$

- Si $k \neq 5 \rightarrow ran\ (A') = 4 \rightarrow$ el sistema es *incompatible*.
- Si $k = 5 \rightarrow ran\ (A) = ran\ (A') = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, eliminamos la cuarta ecuación y aplicamos la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4&1&-1\\3&-1&0\\1&0&1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{-8}{-3}=\frac{8}{3};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&4&-1\\1&3&0\\1&1&1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{1}{-3};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&4\\1&-1&3\\1&0&1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{5}{-3}$$

Solución: $\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

Página 98

4. Discusión de sistemas aplicando el teorema de Rouché

Hazlo tú. Discute los siguientes sistemas de ecuaciones y resuélvelos cuando sean compatibles:

a) $\left\{\begin{aligned}x+y+z&=a-1\\2x+y+az&=a\\x+ay+z&=1\end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned}x-y+z&=2\\2x+y-z&=4\\mx+y+3z&=6\\x-2z&=0\end{aligned}\right.$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a-1\\2&1&a&a\\1&a&1&1\end{array}\right)\to|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}=-a^2+3a-2=0 \begin{cases}a=2\\a=1\end{cases}$

- Si $a\neq 2$ y $a\neq -1 \to ran(A)=3=ran(A')$ → el sistema es *compatible determinado*.

  Para cada valor de a distinto de –1 y 2, tenemos un sistema con solución única, que por la regla de Cramer es:

  $$x=\frac{\begin{vmatrix}a-1&1&1\\a&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}}{-a^2+3a-2};\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&a-1&1\\2&a&a\\1&1&1\end{vmatrix}}{-a^2+3a-2};\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&a-1\\2&1&a\\1&a&1\end{vmatrix}}{-a^2+3a-2}$$

  Solución: $\left(a+1, \frac{2-a}{a-1}, -\frac{a}{a-1}\right)$

  Son tres planos que se cortan en un punto.

- Si $a=-1$:

  $$\left.\begin{aligned}x+y+z&=-2\\2x+y-z&=-1\\x-y+z&=1\end{aligned}\right\}\quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&-2\\2&1&-1&-1\\1&-1&1&1\end{array}\right)$$

  $$\left.\begin{aligned}&\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\to ran(A)=2\\&\begin{vmatrix}1&1&-2\\2&1&-1\\1&-1&1\end{vmatrix}=3\neq 0\to ran(A')=3\end{aligned}\right\}\text{ El sistema es } \textit{incompatible.}$$

  Son tres planos que se cortan dos a dos.

- Si $a=2$:

  $$\left.\begin{aligned}x+y+z&=1\\2x+y+2z&=2\\x+2y+z&=1\end{aligned}\right\}\quad A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\2&1&2&2\\1&2&1&1\end{array}\right)$$

  $$\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=-1\neq 0\to ran(A)=2$$

Como la columna de términos independientes es igual a la columna de coeficientes de z, tenemos que $ran(A') = 2 = ran(A)$, el sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}\right\} \to x = 1 - \lambda,\ y = 0,\ z = \lambda$$

Los planos se cortan en una recta.

b) Empezamos estudiando el rango de A', ya que puede ser 4:

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ m & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 12 - 12m = 0 \to m = 1$$

- Si $m \neq 1 \to ran(A') = 4 \neq ran(A)$, el sistema es *incompatible*.
- Si $m = 1$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to \text{el sistema es } \textit{compatible determinado}.$$

Quitando la tercera ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x - y + z &= 2 \\ 2x + y - z &= 4 \\ x - 2z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Aplicamos la regla de Cramer y obtenemos: } x = 2,\ y = 1,\ z = 1$$

Los planos se cortan en un punto.

Página 99

5. Cálculo de la matriz inversa

Hazlo tú. Dada esta matriz:

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{pmatrix}}$$

a) Halla los valores de a para los cuales A es regular.

b) Para $a = 2$, halla la matriz inversa de A.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ 4 & 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 \to -a^2 + 4a - 3 = 0 \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases}$

A es regular para $a \neq 3$ y $a \neq 1$.

b) $a = 2$:

$|A| = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Sistemas homogéneos

Hazlo tú. Discute y resuelve:

$$\left\{\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 3x + ay + 4z &= 0 \end{aligned}\right.$$

Es un sistema homogéneo, luego siempre es compatible. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & a & 4 \end{vmatrix} = 20 - 2a \;\to\; 20 - 2a = 0 \;\to\; a = 10$$

- Si $a \neq 10 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema es *compatible determinado*.

  Para cada valor de a distinto de 10, tenemos un sistema con solución única: (0, 0, 0), la solución trivial.

- Si $a = 10 \to ran(A) = 2 = ran(A') \to$ el sistema es *compatible indeterminado*.

  Para resolverlo, tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro:

  $$\left.\begin{aligned} x + y &= z \\ x + 3y &= -z \end{aligned}\right\}$$

  Soluciones: $x = 2\lambda,\ y = -\lambda,\ z = \lambda$

Ejercicios y problemas guiados

Página 100

1. Propiedades de los determinantes

Si c_1, c_2 y c_3 son las columnas 1.ª, 2.ª y 3.ª de una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|c_1\ c_2\ c_3| = 7$, calcular:

a) $|c_3\ c_1\ c_2|$ **b)** $|3c_1\ \ c_2 + c_1\ \ -c_3|$ **c)** $|c_1 + 2c_3\ \ c_2\ \ 2c_3 - c_1|$

a) $|c_3\ \ c_1\ \ c_2| = (-1)^2|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = 7$

b) $|3c_1\ \ c_2 + c_1\ \ -c_3| = 3(-1)|c_1\ \ c_2 + c_1\ \ c_3| = -3|c_1\ \ c_2\ \ c_3| = -21$

c) $|c_1 + 2c_3\ \ c_2\ \ 2c_3 - c_1| = |c_1\ \ c_2 + c_1\ \ 4c_3| = 4|c_1\ \ c_2 + c_1\ \ c_3| = 28$

2. Resolver una ecuación

Hallar el valor de x para el cual $|2B| = 160$ siendo B la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$|2B| = 2^3|B| \to 2^3|B| = 160 \to |B| = 20$

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 3 & 1 \\ x+1 & 4 & 2 \\ x & 2-x^2 & 1 \end{vmatrix} = x^3 - x^2 + x - 1 = 20 \to x^3 - x^2 + x - 21 = 0 \to$$

$$\to (x-3)(x^2 + 2x + 7) = 0 \to x = 3$$

3. Sistema compatible para cualquier valor del parámetro

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = a + 2 \\ 2x - ay + z = -2 \\ x - y + az = a \end{cases}$$

a) Comprobar que es compatible para cualquier valor de a.

b) Calcular su solución en forma matricial en el caso a = 0.

c) Resolver para a = 1 utilizando el método de Gauss.

a) $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -a & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = -a^3 - 1 = 0 \to a = -1$

- Si $a \neq -1 \to ran(A) = 3 = ran(A') \to$ el sistema es *compatible determinado*, tiene solución única.
- Si $a = -1$:

$$\left.\begin{aligned} -x + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x - y - z &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la columna de términos independientes:

$$\left|\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \cline{1-2} 1 & -1 & -1 \end{array}\right| = 0 \to ran(A') = 2 = ran(A)$$

El sistema es *compatible indeterminado*, tiene infinitas soluciones.

Por tanto, el sistema es *compatible* para cualquier valor de a.

b) $a = 0$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}}_{B}\to X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-2\\2&-1&2\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-2\\2&-1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\6\end{pmatrix}$$

c) $a = 1$:

$$\left.\begin{aligned}x+y+z&=3\\2x-y+z&=-2\\x-y+z&=1\end{aligned}\right\}\ \left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\2&-1&1&-2\\1&-1&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a)-2\cdot(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{matrix}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-8\\0&-2&0&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix}(1.^a)\\(2.^a)\\3\cdot(3.^a)-2\cdot(2.^a)\end{matrix}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&-3&-1&-8\\0&0&2&10\end{array}\right)\to x=-3,\ y=1,\ z=5$$

4. Resolver una ecuación matricial

Dada la matriz $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}-2&m&0\\0&0&m\\1&-1&0\end{pmatrix}}$:

a) Calcular los valores de $\boldsymbol{m}$ ***para los que*** $\boldsymbol{A}$ ***tiene inversa.***

b) Para $\boldsymbol{m=1}$, ***calcular la matriz*** $\boldsymbol{X}$ ***que verifica*** $\boldsymbol{XA+X-2A=0}$.

a) $|A|=\begin{vmatrix}-2&m&0\\0&0&m\\1&-1&0\end{vmatrix}=m^2-2m\to m^2-2m=0 \begin{cases}m=0\\m=2\end{cases}$

A tiene inversa si $m\neq 0$ y $m\neq 2$.

b) $XA+X-2A=0\to X(A+I)=2A\to X=2A(A+I)^{-1}$

Para comprobar que este paso es válido, veamos si $(A+I)^{-1}$ existe.

$$A+I=\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

$|A+I|=-1$, luego tiene inversa.

$$(A+I)^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

$$X=2A(A+I)^{-1}=2\begin{pmatrix}-2&1&0\\0&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&-1\\-1&1&-1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&2\\2&0&2\\-2&0&0\end{pmatrix}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 101

Para practicar

Determinantes.

1 Calcula el valor de estos determinantes:

$$\text{a) }\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{b) }\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} \qquad \text{c) }\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{d) }\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{a) }\begin{vmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{b) }\begin{vmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{c) }\begin{vmatrix} 7 & 8 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -25 \qquad \text{d) }\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

2 Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de los siguientes determinantes? Justifica las respuestas:

$$\text{a) }\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \qquad \text{b) }\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \qquad \text{c) }\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$$

$$\text{d) }\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \qquad \text{e) }\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \qquad \text{f) }\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$$

$$\text{a) }\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{b) }\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$$

$$\text{c) }\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -3\begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} 3\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$$

$$\text{d) }\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} 2\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 2\begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} -2\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$$

$$\text{e) }\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} \frac{1}{m} \cdot m\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$$

$$\text{f) }\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0, \text{ pues las dos columnas son proporcionales.}$$

(1) Si a una fila le sumamos otra multiplicada por un número, el determinante no varía.

(2) El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.

(3) Si cambiamos de orden dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.

(4) Si multiplicamos una fila o una columna por un número, el determinante queda multiplicado por ese número.

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 7 - 7a = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3 = 0 \rightarrow a = 1,\ a = -3$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 12 = 0 \rightarrow a = \sqrt{3},\ a = -\sqrt{3}$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = -a^3 - a^2 + 6a = 0 \rightarrow a = -3,\ a = 0,\ a = 2$

4 ¿Qué valor de a anula estos determinantes?:

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(a-1) = (a-1)^2 = 0 \rightarrow a = 1$

b) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-2 & 1 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a-2) + a + a(a-2) = 2(a-1)(a-2) + a(a-1) =$

$$= (a-1)(3a-4) = 0 \left\langle \begin{matrix} a = 1 \\ a = \dfrac{4}{3} \end{matrix} \right.$$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -2 \end{vmatrix} = (1-a)(-2-2a) = -2(1-a)(1+a) = 0 \left\langle \begin{matrix} a = 1 \\ a = -1 \end{matrix} \right.$

d) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ -a-1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & a^2-a-1 \end{vmatrix} = (a+1)(a^2-a) =$

$$= a(a+1)(a-1) = 0 \left\langle \begin{matrix} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{matrix} \right.$$

5 **Sabiendo que** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, **calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -x & -z & -y \\ a & c & b \end{vmatrix}$

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3.ª fila. El 2.° determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{COLUMNAS} \\ \hline (1.^a)-(3.^a) \\ (2.^a)+(3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -a & b & c \\ -x & y & z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -5$$

(1) Sacamos –1 factor común de la 1.ª columna.

c) $$\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ \hline (1.^a) \\ (2.^a)-(3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \text{FILAS} \\ \hline (1.^a)+(3.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \rightarrow 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3.ª fila.

d) $$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -x & -z & -y \\ a & c & b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -x & -z & -y \\ a & c & b \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & b \\ x & z & y \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = -2 \cdot 5 = -10$$

Rango de una matriz

6 **Estudia el rango de las siguientes matrices:**

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) El rango es 3, ya que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0$.

b) 4.ª fila = 2.ª fila – 1.ª fila.

3.ª fila = 1.ª fila + 2.ª fila.

Por tanto: $ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$ El rango es 2.

7 Halla el rango de estas matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow ran(A) \geq 2$

Las dos últimas filas son linealmente independientes.

Veamos si la 2.ª fila depende linealmente de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 6 & 10 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$ La 2.ª fila depende linealmente de las dos últimas.

Veamos si la 1.ª fila depende de las dos últimas:

$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Por tanto, $ran\ (A) = 3$.

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$

Las dos primeras columnas son linealmente independientes. Luego, $ran\ (B) \geq 2$.

Veamos si la 3.ª columna depende linealmente de las dos primeras:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Por tanto, $ran\ (B) = 3$.

c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos $|C|$:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \text{FILAS} \\ (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(2-1) = 2 \neq 0 \rightarrow ran\,(C) = 4$$

(1) Desarrollamos por la 1.ª columna.

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 7 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Tomamos un menor de orden 2 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

Las dos primeras filas son linealmente independientes.

Veamos si la 3.ª fila depende linealmente de las dos primeras:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 4 + 7 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -8 - 6 + 14 = 0$$

La 3.ª fila depende linealmente de las otras dos.

Por tanto, $ran\,(D) = 2$.

8 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro que aparece en ellas:**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **c)** $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **d)** $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 6 + 4 - a = a - 2 = 0 \rightarrow a = 2$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 2$

- Si $a \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = 3$

b) $|B| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & 2a & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4a^2 - 2 - 2a + 2 = 4a^2 - 2a = 0 \rightarrow 2a(2a-1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Observamos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\,(B) \geq 2$

- Si $a = 0 \to |B| = 0 \to ran(B) = 2$
- Si $a = \frac{1}{2} \to |B| = 0 \to ran(B) = 2$
- Si $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2} \to |B| \neq 0 \to ran(B) = 3$

c) $$|C| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ a & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - a^2 - 12 - 9a + 8 + 2a = -a^2 - 7a + 8 = 0 \to$$

$$\to a = \frac{7 \pm \sqrt{49+32}}{-2} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{-2} = \frac{7 \pm 9}{-2} \begin{cases} a = -8 \\ a = 1 \end{cases}$$

Observamos que $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0 \to ran(C) \geq 2$

Por tanto:

- Si $a = 1 \to |C| = 0 \to ran(C) = 2$
- Si $a = -8 \to |C| = 0 \to ran(C) = 2$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -8 \to |C| \neq 0 \to ran(C) = 3$

d) $$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 + 1 + a - 1 - a = -a^2 + 1 = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

- Si $a = 1 \to D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(D) = 2$
- Si $a = -1 \to D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(D) = 2$
- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1 \to |D| \neq 0 \to ran(D) = 3$

Teorema de Rouché. Regla de Cramer

9 Aplica el teorema de Rouché para averiguar si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a) $\begin{cases} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = -2 \\ 2x - y - 3z = -3 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ -x - 5y + z = 0 \\ 3x + y - z = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 5 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + 3y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \\ 2x + y + 3z = 5 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \\ 5x + 2y = -5 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{array}}_{A} \left| \begin{array}{c} 6 \\ -1 \\ -5 \end{array}\right.\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que: $ran(A) = ran(A') = 2 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 6 \\ 4x + y = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Sumando: } 5x = 5 \to x = 1 \\ y = -1 - 4x = -1 - 4 = -5 \end{array} \Bigg\} \; \textit{Solución: } x = 1, \; y = -5$$

b) $\left.\begin{array}{r} x+\ y-\ z=-2 \\ 2x-\ y-3z=-3 \\ x-2y-2z=0 \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -2 & -2\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}-2\\ -3\\ 0\end{matrix}\end{array}\right)$

Tenemos que $|A|=0$ y que $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3\neq 0 \ \to\ ran\,(A)=2$

Como $\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0 \ \to\ ran\,(A')=3\neq ran\,(A)=2$

Por tanto, el sistema es *incompatible.*

c) $\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=3 \\ -x-5y+z=0 \\ 3x+\ y-z=6 \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}2 & 3 & -1\\ -1 & -5 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}3\\ 0\\ 6\end{matrix}\end{array}\right)$

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & -5\end{vmatrix}=-7\neq 0$, tenemos que $ran\,(A)=2$.

Además, $\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ -1 & -5 & 0\\ 3 & 1 & 6\end{vmatrix}=0$. Luego $ran\,(A')=2=ran\,(A)<$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la tercera ecuación:

$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=3 \\ -x-5y+z=0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} 2x-z=3-3y \\ -x+z=5y \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Sumando: } x=3+2y \\ z=5y+x=5y+3+2y=3+7t\end{array}$

Soluciones: $x=3+2\lambda,\ \ y=\lambda,\ \ z=3+7\lambda$

d) $\left.\begin{array}{r} x-y-2z=2 \\ 2x+y+3z=1 \\ 3x\qquad+z=5 \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\ 1\\ 5\end{matrix}\end{array}\right)$

Como $|A|=0$ y $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0$, tenemos que $ran\,(A)=2$.

Como $\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 3\end{vmatrix}=6\neq 0 \ \to\ ran\,(A')=3\neq ran\,(A)=2$

Por tanto, el sistema es *incompatible.*

e) $\left.\begin{array}{r} x+\ y+\ z=2 \\ x-2y-7z=0 \\ y+\ z=-1 \\ 2x+3y\qquad=0 \end{array}\right\}\ A'=\left(\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -7\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}2\\ 0\\ -1\\ 0\end{matrix}\end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & -7\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=5\neq 0$ y $|A'|=0$, tenemos que $ran\,(A)=ran\,(A')=3=$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado.*

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3, \ y = -2, \ z = 1$

f) $$\left.\begin{aligned} x + 3y + z &= -1 \\ x - y - z &= -1 \\ 2x + y + 3z &= 5 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$$
$$\underbrace{}_{A}$$

Como $|A| = -14 \neq 0$, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado*.

Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{0}{-14} = 0\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{14}{-14} = -1\,; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-28}{-14} = 2$$

Solución: $x = 0, \ y = -1, \ z = 2$

10 Resuelve estos sistemas aplicando la regla de Cramer:

a) $\begin{cases} \mathbf{8x + 14y = 2} \\ \mathbf{3x - 5y = 11} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \mathbf{x + y - z + t = 1} \\ \mathbf{x - y \phantom{{}- z} - t = 2} \\ \mathbf{\phantom{x + y - {}} z - t = 0} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \mathbf{3x - y \phantom{{}+ 2z} = 2} \\ \mathbf{2x + y + z = 0} \\ \mathbf{\phantom{2x + {}} 3y + 2z = -1} \end{cases}$

d) $\begin{cases} \mathbf{x - y - z + t = 4} \\ \mathbf{x + y + z - t = 2} \end{cases}$

a) $$\left.\begin{aligned} 8x + 14y &= 2 \\ 3x - 5y &= 11 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 14 & 2 \\ 3 & -5 & 11 \end{array}\right) \to |A| = -82 \neq 0$$
$$\underbrace{}_{A}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 14 \\ 11 & -5 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{-164}{-82} = 2; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 11 \end{vmatrix}}{-82} = \frac{82}{-82} = -1$$

Solución: $x = 2, \ y = -1$

b) $$\left.\begin{aligned} x + y - z + t &= 1 \\ x - y \phantom{{}- z} - t &= 2 \\ z - t &= 0 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc:c|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \text{Tenemos que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$
$$\underbrace{}_{A}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 - t & 1 & -1 \\ 2 + t & -1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-3 - t}{-2} = \frac{3 + t}{2}\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 - t & -1 \\ 1 & 2 + t & 0 \\ 0 & t & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1 + t}{-2} = \frac{-1 - t}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-t \\ 1 & -1 & 2+t \\ 0 & 0 & t \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2t}{-2} = t$$

Soluciones: $x = \dfrac{3+\lambda}{2},\ y = \dfrac{-1-\lambda}{2},\ z = \lambda,\ t = \lambda$

c) $\left.\begin{array}{r} 3x - y \phantom{{}+z} = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3y + 2z = -1 \end{array}\right\}\ A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}\right) \to |A| = 1 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-1}{1} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-5}{1} = -5; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{7}{1} = 7$$

Solución: $x = -1,\ y = -5,\ z = 7$

d) $\left.\begin{array}{r} x - y - z + t = 4 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x - y = 4 + z - t \\ x + y = 2 - z + t \end{array}\right\}\qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z-t & -1 \\ 2-z+t & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z-t \\ 1 & 2-z+t \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2-2z+2t}{2} = -1 - z + t$$

Soluciones: $x = 3,\ y = -1 - \lambda + \mu,\ z = \lambda,\ t = \mu$

Página 102

11 Estudia y resuelve estos sistemas, cuando sea posible:

a) $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -2x + y + z = -2 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x - y = 1 \\ -y - z = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x + z = 6 \\ y + z = 7 \\ 2x + y + z = 11 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y - z = 1 \end{array}\right\}\ A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right)$

Como $|A| = -6 \neq 0$, tenemos que: *ran* $(A) =$ *ran* $(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos mediante la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{2}{-6} = \frac{-1}{3}$$

Solución: $x = \dfrac{-1}{3},\ y = \dfrac{2}{3},\ z = \dfrac{-1}{3}$

b) $$\left.\begin{array}{r} x-2y+\ \ z=-2\\ -2x+\ \ y+\ \ z=-2\\ x+\ \ y-2z=-2\end{array}\right\}\quad A'=\left(\underbrace{\begin{array}{cc:c} 1&-2&1\\ -2&1&1\\ \hdashline 1&1&-2\end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c}-2\\-2\\-2\end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix}1&-2\\-2&1\end{vmatrix}=-3$ y $|A|=0$, tenemos que $ran(A)=2$.

Además, $\begin{vmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\1&1&-2\end{vmatrix}=18\neq 0$. Luego $ran(A')=3\neq ran(A)=2$.

Por tanto, el sistema es *incompatible*.

c) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=0\\ -x-\ \ y\qquad=1\\ -\ \ y-z=-1\end{array}\right\}\quad A'=\left(\underbrace{\begin{array}{cc:c} 1&2&1\\ -1&-1&0\\ \hdashline 0&-1&-1\end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c}0\\1\\-1\end{array}\right)$$

Como $|A|=0$, $\begin{vmatrix}1&2\\-1&-1\end{vmatrix}=1\neq 0$ y $\begin{vmatrix}1&2&0\\-1&-1&1\\0&-1&-1\end{vmatrix}=0$, tenemos que:

$ran(A)=ran(A')=2<$ *n.º de incógnitas*

El sistema es *compatible indeterminado*. Para hallar sus soluciones, podemos prescindir de la 1.ª ecuación y resolverlo en función de y:

$$\left.\begin{array}{r} -x-y\qquad=1\\ -y-z=-1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l} x=-1-y\\ z=1-y\end{array}\right\}$$

Soluciones: $x=-1-\lambda,\ y=\lambda,\ z=1-\lambda$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+y\qquad=5\\ x\qquad+z=6\\ y+z=7\\ 2x+y+z=11\end{array}\right\}\quad A'=\left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1&1&0\\ 1&0&1\\ 0&1&1\\ \hdashline 2&1&1\end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c}5\\6\\7\\11\end{array}\right)$$

Tenemos que $|A'|=0$ y $\begin{vmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-2\neq 0$. Luego $ran(A)=ran(A')=3=$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&1&0\\6&0&1\\7&1&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-4}{-2}=2;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&5&0\\1&6&1\\0&7&1\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-6}{-2}=3;\quad z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&5\\1&0&6\\0&1&7\end{vmatrix}}{-2}=\frac{-8}{-2}=4$$

Solución: $x=2,\ y=3,\ z=4$

12 Estudia y resuelve los siguientes sistemas:

a) $$\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{cases}$$

b) $$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, tenemos que $ran\ (A) = 2$.

Además, $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Luego $ran\ (A') = 2 = ran\ (A) <$ *n.º de incógnitas*.

El sistema es *compatible indeterminado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la primera ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2x + y = 1 - 3z \\ 3x = 3 - z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3 - z}{3} = 1 - \dfrac{z}{3} \\ y = 1 - 3z - 2x = -1 - \dfrac{7z}{3} \end{array}\right\} \quad \text{Hacemos } z = 3\lambda.$$

Soluciones: $x = 1 - \lambda,\ y = -1 - 7\lambda,\ z = 3\lambda$

b) $$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - 2y - 7z = 0 \\ y + z = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ y $|A'| = 0$, tenemos que:

$ran\ (A) = ran\ (A') =$ *n.º de incógnitas* $= 3$

El sistema es *compatible determinado*.

Para resolverlo, podemos prescindir de la 4.ª ecuación. Aplicamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{15}{5} = 3; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-10}{5} = -2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

Solución: $x = 3,\ y = -2,\ z = 1$

13 Resuelve los siguientes sistemas homogéneos:

a) $$\left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 12x - 3y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 12 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, entonces, $ran(A) = 2$.

El sistema es *compatible indeterminado*. Para resolverlo, podemos prescindir de la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = z \\ x - 2y = -z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} z & 1 \\ -z & z-2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-z}{-3} = \frac{z}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2z}{-3} = \frac{2z}{3}$$

Soluciones: $x = \frac{\lambda}{3}$, $y = \frac{2\lambda}{3}$, $z = \lambda$

b) $$\left.\begin{array}{r} 9x + 3y + 2z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ 8x + y + 4z = 0 \\ x + 2y - 2z = 0 \end{array}\right\} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, entonces $ran(A) = 3 =$ *n.º de incógnitas*.

El sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Cálculo de la matriz inversa con determinantes

14 Halla la matriz inversa de las siguientes matrices:

a) $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

b) $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$

a) $|M| = 2 \neq 0 \rightarrow$ la matriz M tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (M_{ij}) \longrightarrow (M_{ji}) \longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|}(M_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5/2 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa.

b) $|N| = 6 \neq 0 \rightarrow$ la matriz N tiene inversa. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (N_{ij}) \longrightarrow (N_{ji}) \longrightarrow N^{-1} = \frac{1}{|N|}(N_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad N^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 5/6 & 1/2 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa.

15 a) Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Resuelve las ecuaciones $AX = B$ y $XB = A$ siendo A y B las matrices del apartado anterior.

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}.

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -6 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow$ Existe B^{-1}.

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -19 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

$XB = A \rightarrow XBB^{-1} = AB^{-1} \rightarrow X = AB^{-1}$

$$X = AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3/2 & -7/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

16 Calcula la inversa de las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

17 Halla los valores del parámetro t para los cuales las matrices A y B no son regulares y calcula:

a) A^{-1} si $t = 1$. **b) B^{-1} si $t = 2$.**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & t & 4 \\ -1 & 3 & t \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 1 & 1 & 0 \\ t & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = t^2 + 4t - 12 = 0 \to t = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \left\langle \begin{matrix} t = 2 \\ t = -6 \end{matrix} \right.$

A no es invertible para $t = 2$ ni para $t = -6$.

Calculamos A^{-1} para $t = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to |A| = -7$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ -12 & 5 & 3 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -11 & -4 & 1 \\ 12 & 5 & -3 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{-1}{7}\begin{pmatrix} -11 & 12 & -4 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $|B| = 1 - t^2 = 0 \left\langle \begin{matrix} t = 1 \\ t = -1 \end{matrix} \right.$

B no es invertible para $t = 1$ ni para $t = -1$.

Calculamos B^{-1} para $t = 2$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to |B| = -3$$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (B_{ij}) \longrightarrow (B_{ji}) \longrightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para resolver

18 Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\left\{\begin{aligned} 7y + 5z &= -7 \\ 3x + 4y + mz &= -1 \\ 7x \qquad + 5z &= 7 \end{aligned}\right.$ **b)** $\left\{\begin{aligned} mx + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}\right.$

c) $\left\{\begin{aligned} 2x + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 3 \\ 5x - 5y + 2z &= m \end{aligned}\right.$ **d)** $\left\{\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x + 2y + mz &= 6 \\ mx \qquad &= 0 \end{aligned}\right.$

a) $$\left.\begin{aligned} 7y + 5z &= -7 \\ 3x + 4y + mz &= -1 \\ 7x \qquad + 5z &= 7 \end{aligned}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} -7 \\ -1 \\ 7 \end{matrix}\right)$$

El sistema tendrá solución si $ran(A) = ran(A')$, según el teorema de Rouché.

Buscamos los valores que hacen $|A| = 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & m \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 49m - 245 = 0 \to m = 5$$

- Si $m = 5 \to \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = 2$

  $$\begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 3 & 4 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -49 + 196 - 147 = 0 \to ran(A') = 2$$

  El sistema es *compatible indeterminado.*

- Si $m \neq 5 \to ran(A) = ran(A') = 3$, el sistema es *compatible determinado.*

b) $$\left.\begin{aligned} mx + y - z &= 1 \\ x - 2y + z &= 1 \\ 3x + 4y - 2z &= -3 \end{aligned}\right\} A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 4m - 4 + 3 - 6 - 4m + 2 = -5$$

Como $|A| \neq 0$ para cualquier valor de m, $ran(A) = ran(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado* para todo m.

c) $$\left.\begin{array}{r}2x+\ y-\ z=1\\ x-2y+\ z=3\\ 5x-5y+2z=m\end{array}\right\}\ A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}2&1&-1\\1&-2&1\\5&-5&2\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}1\\3\\m\end{matrix}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-2&1\\5&-5&2\end{vmatrix}=-8+5+5-10+10-2=0$$

$$\begin{vmatrix}2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0\ \to\ ran\,(A)=2$$

$$\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-2&3\\5&-5&m\end{vmatrix}=-4m-5+15+10+30-m=-5m+50=0\ \to\ m=10$$

- Si $m=10\ \to\ ran\,(A)=ran\,(A')=2$. El sistema es *compatible indeterminado*.
- Si $m\neq 10\ \to\ ran\,(A)=2\neq ran\,(A')=3$. El sistema es *incompatible*.

d) $$\left.\begin{array}{r}x+\ y+\ z=6\\ 2x+2y+mz=6\\ mx\qquad\quad =0\end{array}\right\}\ A'=\left(\underbrace{\begin{matrix}1&1&1\\2&2&m\\m&0&0\end{matrix}}_{A}\ \middle|\ \begin{matrix}6\\6\\0\end{matrix}\right)$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&m\\m&0&0\end{vmatrix}=m\,(m-2)=0\ \begin{cases}m=0\\m=2\end{cases}$$

- Si $m=0\ \to\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&2&0&6\\0&0&0&0\end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}\neq 0\ \to\ ran\,(A)=ran\,(A')=2\ \to$$ El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $m=2\ \to\ A'=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\2&2&2&6\\2&0&0&0\end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix}2&2\\2&0\end{vmatrix}\neq 0;\ \begin{vmatrix}1&1&6\\2&2&6\\2&0&0\end{vmatrix}\neq 0\ \to\ ran\,(A)=2\neq ran\,(A')=3\ \to$$ El sistema es *incompatible*.

- Si $m\neq 0$ y $m\neq 2\ \to\ ran\,(A)=ran\,(A')=3\ \to$ El sistema es *compatible determinado*.

19 Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:

a) $$\begin{cases}2x-ay+\ 4z=0\\ x+\ y+\ 7z=0\\ x-\ y+12z=0\end{cases}$$

b) $$\begin{cases}x\qquad -\ z=0\\ \qquad ay+3z=0\\ 4x+\ y-az=0\end{cases}$$

a) Los sistemas homogéneos son siempre compatibles porque $ran\,(A)=ran\,(A')$. Pueden tener solución única o infinitas soluciones. Estudiamos el rango de A:

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-a&4\\1&1&7\\1&-1&12\end{vmatrix}=24-4-7a-4+14+12a=5a+30=0\ \to\ a=-6$$

- Si $a = -6 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2$, porque $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

  El sistema es *compatible indeterminado*.
- Si $a \neq -6 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado*.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -a^2 + 4a - 3 = 0 \; < \begin{array}{l} a = 1 \\ a = 3 \end{array}$

- Si $a = 1 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.
- Si $a = 3 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.
- Si $a \neq 1$ y $a \neq 3 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3$

  El sistema es *compatible determinado*.

20 ¿Existe algún valor de *a* para el cual estos sistemas tengan infinitas soluciones?:

a) $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right.$

a) $\left.\begin{array}{r} 3x - 2y - 3z = 2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 3 & -2 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{matrix}\right)$

$|A| = 9a + 27 = 0 \rightarrow a = -3$

- Si $a = -3$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$

  Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -5$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20$, entonces $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$.

  El sistema es *incompatible*.
- Si $a \neq -3 \rightarrow ran\,(A) = ran\,(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, no existe ningún valor de *a* para el que el sistema tenga infinitas soluciones.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{array}\right\} \; A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} a - 1 \\ a \\ 1 \end{matrix}\right)$

$|A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \rightarrow a = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-2} = \dfrac{-3 \pm 1}{-2} \; < \begin{array}{l} a = 1 \\ a = 2 \end{array}$

- Si $a = 1$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

  La 1.ª y la 3.ª ecuaciones son contradictorias, luego el sistema es *incompatible*.

- Si $a = 2$, queda:

  $$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \end{array}\right)$$ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales, y $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

  Por tanto, $ran(A) = ran(A') = 2$. El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 \rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

21 **Discute los siguientes sistemas homogéneos en función del parámetro a:**

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - 4y - az = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & -a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -5a - 25 = 0 \rightarrow a = -5$

- Si $a = -5 \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -5 \rightarrow ran\ (A) = ran\ (A') = 3$.

  El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ ax + 2z = 0 \\ 2x - y + az = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 2 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$$|A| = -a^2 - a + 6 = 0 \rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{-2} = \frac{1 \pm 5}{-2} \begin{cases} a = -3 \\ a = 2 \end{cases}$$

- Si $a = -3$ o $a = 2 \rightarrow$ Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -3$ y $a \neq 2 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3$.

  El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

c) $\left.\begin{array}{r} ax + y - z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 3x + 10y + 4z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Como es homogéneo, sabemos que $ran(A) = ran(A')$.

$|A| = -2a - 5 = 0 \to a = \dfrac{-5}{2}$

- Si $a = -\dfrac{5}{2} \to$ Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -\dfrac{5}{2} \to ran(A) = ran(A') = 3$

  El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 3y - z = 0 \\ 4x + 2y - az = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array}\right\}$ $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & -a \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \to |A| = 3a - 46 = 0 \to a = \dfrac{46}{3}$

- Si $a = \dfrac{46}{3} \to$ Como $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq \dfrac{46}{3} \to ran(A) = ran(A') = 3$.

  El sistema es *compatible determinado*, solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$.

22 Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m:

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ 3x + y + z = -1 \\ 2y - z = -2 \\ x - y + mz = -5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = m \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = m \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{array}\right\}$ $A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 4 \\ m \\ 2 \end{array}\right.\right)$

$|A| = m^2 - 1 = 0 \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$

- Si $m = 1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- Si $m = -1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$ Contradictorias → Sistema *incompatible*.

- Si $m \neq 1$ y $m \neq -1 \to ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

  El sistema es *compatible determinado*.

b) $$\left.\begin{aligned} x + y + z &= m-1 \\ 2x + y + mz &= m \\ x + my + z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} m-1 \\ m \\ 1 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -m^2 + 3m - 2 = 0 \;\to\; m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \frac{-3 \pm 1}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.\right) \quad \text{Contradictorias} \;\to\; \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $m = 2$, queda:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right.\right).$$ Las columnas 1.ª, 3.ª y 4.ª son iguales.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\to\; ran(A') = ran(A) = 2 <$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.*

- Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \;\to\; ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado.*

c) $$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + my + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -2m + 2 = 0 \;\to\; m = 1$$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right.\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, entonces: $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$

El sistema es *incompatible.*

- Si $m \neq 1 \to ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado.*

d) $$\left.\begin{aligned} x + my + z &= 4 \\ x + 3y + z &= 5 \\ mx + y + z &= 4 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{matrix}}_{A}\left|\begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = m^2 - 4m + 3 = 0 \;\to\; m = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 3$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \quad \text{Contradictorias} \rightarrow \text{Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $m = 1$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right). \text{ La 1.ª y la 3.ª fila son iguales.}$$

Además, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Luego, $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.*

- Si $m \neq 3$ y $m \neq 1$ $\rightarrow$ $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas.*

El sistema es *compatible determinado.*

Página 103

23 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{pmatrix}$, **halla:**

a) Los valores de x para los que la matriz A posee inversa.

b) La inversa de A para $x = 2$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 4x - 3 = 0 \rightarrow x = 3, \ x = 1$

A posee inversa si $x \neq 3$ y $x \neq 1$.

b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1$

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -12 & -8 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -1 & 2 \\ 12 & 2 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

24 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}$**:**

a) Calcula $A(2I - A)$.

b) Justifica si existen las matrices inversas de A y $2I - A$.

c) ¿Para qué valor de k se verifica $A^{-1} = kI - A$?

a) $A(2I - A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \left(2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A(2I - A) = I \rightarrow A$ y $2I - A$ tienen inversa y cada una es la inversa de la otra:

$A^{-1} = 2I - A$

$(2I - A)^{-1} = A$

c) $k = 2$

25 Dada $A = \begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}$, halla X tal que $AXA = \begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$.

$$AXA = \begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix} \to X = A^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}A^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix} \to (A_{ji}) = \begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

26 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$, encuentra la matriz X tal que $AXB = \begin{pmatrix}1&3\\0&-1\end{pmatrix}$.

$$AXB = \begin{pmatrix}1&3\\0&-1\end{pmatrix} \to A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\end{pmatrix}B^{-1} \to X = A^{-1}\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\end{pmatrix}B^{-1}$$

Calculamos A^{-1}:

$$\begin{vmatrix}1&-1\\-1&2\end{vmatrix} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix} \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix} \to (A_{ji}) = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$$

Calculamos B^{-1}:

$$\begin{vmatrix}2&1\\1&0\end{vmatrix} = -1$$

$$B = \begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix} \to (B_{ij}) = \begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix} \to (B_{ji}) = \begin{pmatrix}0&-1\\-1&2\end{pmatrix} \to B^{-1} = \begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&-8\\2&-3\end{pmatrix}$$

27 Resuelve la ecuación $AXB = C$ siendo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$AXB = C \to A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1} \to X = A^{-1}CB^{-1}$$

Calculamos A^{-1} y B^{-1} ($|A| = 1$ y $|B| = 1$ → existen A^{-1} y B^{-1}):

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix} \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix}3&-4\\-2&3\end{pmatrix} \to (A_{ji}) = \begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}$$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix} \to (B_{ij}) = \begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix} \to (B_{ji}) = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix} \to B^{-1} = \begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix}3&-2\\-4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$$

28 Dadas las matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{-8} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

halla la matriz X que verifica $(AB^t + C)X = D$.

$(AB^t + C)X = D \to (AB^t + C)^{-1}(AB^t + C)X = (AB^t + C)^{-1}D \to X = (AB^t + C)^{-1}D$

- Sea $E = AB^t + \text{C} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- Calculamos E^{-1} ($|E| = 6 \neq 0 \to$ existe E^{-1}):

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to (E_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \to (E_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \to E^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

- Por tanto:

$$X = (AB^t + C)^{-1}D = E^{-1}D = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

29 Halla X tal que $3AX = B$, siendo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$3AX = B \to X = \frac{1}{3}A^{-1}B$

Calculamos A^{-1} ($|A| = -1 \neq 0 \to$ existe A^{-1}):

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to (A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

30 Dadas las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{m} & \mathbf{4} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

a) ¿Para qué valores de m existe A^{-1}?

b) Para $m = 1$, halla la matriz X tal que $XA + B = C$.

a) $|A| = \begin{vmatrix} m & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2m$

Existe A^{-1} si $m \neq 0$.

b) $XA + B = C \to XA = C - B \to X = (C - B)A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C - B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = (C - B)A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

31 Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Determina para qué valores de k la matriz AB tiene inversa.

b) Resuelve la ecuación $ABX = 3I$ para $k = 0$, donde I es la matriz unidad de orden 2.

a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3k - 2 = 0 \rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Existe $(AB)^{-1}$ para $k \neq -\dfrac{2}{3}$.

b) $ABX = 3I \rightarrow X = 3(AB)^{-1}$

$$k = 0 \rightarrow AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = 3\begin{pmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$$

32 Escribe en la forma habitual estos sistemas y resuélvelos si es posible:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\left.\begin{aligned} x + 3y + 2x &= 4 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x + 3y &= 4 - 2\lambda \\ x - y &= \lambda \end{aligned}\right\}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4-2\lambda & 3 \\ \lambda & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4-\lambda}{-4} = \frac{4+\lambda}{4}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4-2\lambda \\ 1 & \lambda \end{vmatrix}}{-4} = \frac{-4+3\lambda}{-4} = \frac{4-3\lambda}{4}$$

Soluciones: $x = \dfrac{4+\lambda}{4}$, $y = \dfrac{4-3\lambda}{4}$, $z = \lambda$

b) $\left.\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 3x - y &= 0 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0 \rightarrow ran(A') = 3$$

Como $ran(A) \neq ran(A')$, el sistema es *incompatible*.

33 **Escribe las ecuaciones lineales del sistema $AX = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, y resuélvelo.**

$$AX = B \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices del primer término:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + 4z = 11 \\ 3x + y = 5 \\ -x + z = 2 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 4 & 11 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \underbrace{}_{A} \; \underbrace{}_{B}$$

$|A| = 8 \to ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. Sistema *compatible determinado.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 11 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{8}{8} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 11 & 4 \\ 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{8} = \frac{16}{8} = 2; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Solución: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

34 **Expresa en forma matricial y resuelve utilizando la matriz inversa:**

a) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 3z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + y = -1 \\ y + z = -2 \\ x + z = 3 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 3y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$

a) $$\left.\begin{array}{r} 2x + y = 2 \\ y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$A \cdot X = B \to A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \to X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$

b) $$\left.\begin{array}{r} x+y-z=3\\ 2x+y+z=-2\\ x-2y-3z=1\end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&1\\1&-2&-3\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 11 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix}-1&-7&-5\\-5&-2&-3\\2&3&-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1&7&-5\\5&-2&3\\2&-3&-1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}$$

Luego:

$$A\cdot X = B \to A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \to X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-1&5&2\\7&-2&-3\\-5&3&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix}-11\\22\\-22\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\2\\-2\end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = -1,\ y = 2,\ z = -2$

c) $$\left.\begin{array}{r} x+y=-1\\ y+z=-2\\ x+z=3\end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 2 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\1&1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Luego:

$$A\cdot X = B \to A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \to X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 2,\ y = -3,\ z = 1$

d) $$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=3\\ 3y+z=4\\ x+2y+2z=4\end{array}\right\} \underbrace{\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 3 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix}4&-1&-3\\2&1&0\\-1&1&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4&1&-3\\-2&1&0\\-1&-1&3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}$$

Luego:

$$A\cdot X = B \to A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \to X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&-2&-1\\1&1&-1\\-3&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Por tanto: $x = 0,\ y = 1,\ z = 1$

35 **Resuelve el siguiente sistema:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|A| = 16 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -5 & 7 & 2 \\ -5 & -9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A \cdot X = B \to X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 3 & 5 & -5 \\ 1 & 7 & 9 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 \\ -16 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego: $x = 1,\ y = -1,\ z = 1$

36 **Estudia los siguientes sistemas de ecuaciones. Resuélvelos cuando sean compatibles e interpreta geométricamente las soluciones obtenidas:**

a) $\begin{cases} x + ay - z = 1 + a \\ x + y - az = a \\ x - y - z = a \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{cases}$

a) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 - a^2 \to 1 - a^2 = 0 \to a = \pm 1$

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \to ran(A) = ran(A') = 3 \to$ El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos usando la regla de Cramer:

  $$x = \frac{-a + a^2 + 1}{a - 1};\quad y = \frac{1}{a+1};\quad z = \frac{2}{a^2 - 1}$$

- Si $a = -1$:

  $$\left.\begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - z = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna y la 3.ª fila:

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

  Luego, $ran(A) \neq ran(A') \to$ El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 1$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna y la 2.ª fila:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 3$$

  Luego, $ran(A) \neq ran(A')$ → El sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica:

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = -1$, el primer y el tercer plano son paralelos y el segundo los corta.
- Si $a = 1$, el primer y el segundo plano son paralelos y el tercero los corta.

b) $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 \\ 1 & a-1 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 3a - 2 \;\rightarrow\; a^2 - 3a + 2 = 0 \;\rightarrow\; a = 2,\; a = 1$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ → $ran(A) = ran(A') = 3$ → El sistema es *compatible determinado*.

  Usando la regla de Cramer:

  $$x = \frac{a-1}{a-2};\quad y = \frac{a-1}{a-2};\quad z = -\frac{1}{a-2}$$

- Si $a = 1$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + \ z = 1 \\ y = 0 \\ x + \ z = 1 \end{array}\right\}$$

  Las ecuaciones 1.ª y 3.ª son iguales. Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

  $$\left.\begin{array}{r} x + \ z = 1 \\ y = 0 \end{array}\right\}$$

  Soluciones: $x = 1 - \lambda,\; y = 0,\; z = \lambda$

- Si $a = 2$:

  $$\left.\begin{array}{r} x + \ z = 1 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A) = 2$$

  Añadimos la 4.ª columna y la 3.ª fila:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran(A') = 3$$

  Luego, $ran\ (A) \neq ran\ (A')$ → El sistema es *incompatible*.

Interpretación geométrica:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$, tenemos tres planos que se cortan en un punto.
- Si $a = 1$, dos planos son coincidentes y se cortan en una recta con el tercero.
- Si $a = 2$, los planos se cortan dos a dos.

37 **Sea la matriz:** $A = \begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

a) Determina para qué valores de m **la matriz es singular.**

b) Resuelve, si es posible, el siguiente sistema para $m = 1$ **y** $m = -1$**:**

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

a) $|A| = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m+2 & 2 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m+1 & m+1 \end{vmatrix} =$

$$= (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m-1 \end{vmatrix} = (m-1)^2(m+1) = 0 \to m = \pm 1$$

A es singular para $m = -1$ y $m = 1$.

b) • Si $m = -1 \to A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y = 2 \\ -2x + y + 2z = 8 \\ -2x + y = 8 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

Añadimos la 4.ª columna y la 3.ª fila:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

El sistema es *incompatible*.

• Si $m = 1 \to A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 3y + 2z = 8 \\ 3y + 2z = 8 \end{array}\right\} \text{ Las ecuaciones 2.ª y 3.ª son iguales.}$$

Nos quedamos con las dos primeras ecuaciones y tomamos x como parámetro.

$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ 3y + 2z = 8 \end{array}\right\}$$

Soluciones: $x = \lambda,\ y = 2,\ z = 1$

38 **a) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y calcula el rango de las matrices AA^t y A^tA.**

b) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es A^tA.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es AA^t.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \to ran\,(AA^t) = 2$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to ran\,(A^tA) = 2$$

b) Como el rango es 2, seleccionamos el menor:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Podemos suprimir la 3.ª ecuación y pasar la z al segundo miembro:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 2y &= -z \\ 2x + y &= -z \end{aligned}\right\} \to x = z,\ y = -3z$$

Soluciones: $x = \lambda,\ y = -3\lambda,\ z = \lambda$

c) Como $ran\,(AA^t) = 2 =$ *n.º de incógnitas*, el sistema solo tiene la solución trivial: $x = 0,\ y = 0$.

Página 104

39 **Dada la matriz:**

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

determina B para que se verifique $B - I = A^tA^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos A^{-1}:

$|A| = 4 \neq 0 \to$ Existe A^{-1}. La calculamos:

$$\alpha_{ij} \longrightarrow (A_{ij}) \longrightarrow (A_{ji}) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos $A^t \cdot A^{-1}$:

$$A^t \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^t \cdot A^{-1} + I = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

40 **Estudia el rango de las siguientes matrices según los valores del parámetro que contienen:**

a) $A=\begin{pmatrix} k & k & -1 & 2\\ 3 & -k & 0 & 0\\ 5 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$ **b)** $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1\\ k & k & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ **c)** $C=\begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0\\ -1 & -1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{pmatrix}$ **d)** $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\\ -t & 6 & 3-t & 9-t\end{pmatrix}$

a) $$|A|=\begin{vmatrix} k & k & -1 & -2\\ 3 & -k & 0 & 0\\ 5 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} = \begin{array}{l}\text{FILAS}\\ (1.^a)-2\cdot(4.^a)\\ (2.^a)\\ (3.^a)\\ (4.^a)\end{array} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5 & 0\\ 3 & -k & 0 & 0\\ 5 & k & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} k-2 & k & -5\\ 3 & -k & 0\\ 5 & k & 0\end{vmatrix} \overset{(2)}{=}$$

$$= -5\begin{vmatrix} 3 & -k\\ 5 & k\end{vmatrix} = -40k = 0 \to k = 0$$

(1) Desarrollamos por la 4.ª columna.

(2) Desarrollamos por la 3.ª columna.

- Si $k=0 \to A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ 5 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2\\ 5 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A)=3$
- Si $k \neq 0 \to |A| \neq 0 \to ran(A)=4$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3\\ k & k & 3\\ -1 & 3 & 3\end{vmatrix} = 6k-18 \to 6k-18=0 \to k=3$

- Si $k=3 \to B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1\\ 3 & 3 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 3 & 0\end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1\\ 3 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 0\end{vmatrix} = 18 \neq 0 \to ran(B)=3$
- Si $k \neq 3 \to ran(B)=3$

Por tanto, $ran(B)=3$ para cualquier valor de k.

c) Observamos que $ran\ (C) \leq 3$ porque solo hay tres filas.

$\begin{vmatrix} 1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\ (C) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0\\ -1 & k & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix} = k^2-2k-3=0 \begin{array}{l} k=-1\\ k=3\end{array}$; $\begin{vmatrix} k & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & k\end{vmatrix} = -k^2+1=0 \begin{array}{l} k=1\\ k=-1\end{array}$

- Si $k=-1 \to ran(C)=2$
- Si $k \neq -1 \to ran(C)=3$

d) Observamos que $ran\ (D) \leq 3$ porque solo hay tres filas.

$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran\ (D) \geq 2$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -t & 6 & 3-t\end{vmatrix} = t-9=0 \to t=9$; $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -t & 6 & 9-t\end{vmatrix} = t-9=0 \to t=9$

- Si $t \neq 9 \to ran\ (D)=3$
- Si $t=9 \to ran\ (D)=2$

41 **Calcula el rango de estas matrices en función del parámetro t:**

a) $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 & 2 \\ 2 & t & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 3-t & 3 & 2t \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ t+2 & 0 & t \end{pmatrix}$ d) $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & -4 & 8 & t \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

a) Observamos que $ran\ (A) \le 3$ porque solo hay tres filas.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \ne 0 \to ran\ (A) \ge 2$$

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^2 - 5t + 2 = 0 \begin{cases} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{cases}; \quad \begin{vmatrix} t & 1 & 2 \\ 2 & t^2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2t^3 - 4t^2 - t + 2 = 0 \begin{cases} t = 2 \\ t = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

- Si $t = 2 \to ran(A) = 2$
- Si $t \ne 2 \to ran(A) = 3$

b) $$|B| = \begin{vmatrix} t & t & 0 \\ 2 & t+1 & t-1 \\ 2t+1 & 0 & -t-3 \end{vmatrix} = t(t^2 - 3t + 2) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

- Si $t = 0 \to B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \ne 0 \to ran(B) = 2$
- Si $t = 1 \to B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6 \ne 0 \to ran(B) = 2$
- Si $t = 2 \to B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \ne 0 \to ran(B) = 2$
- Si $t \ne 0$, $t \ne 1$ y $t \ne 2 \to ran(B) = 3$

c) Observamos que $ran\ (C) \le 3$ porque solo hay tres columnas.

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6 \ne 0 \to ran\ (C) \ge 2$$

$$\left|\begin{array}{cc:c} 3-t & 3 & 2t \\ \hdashline -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \end{array}\right| = -9t + 18 = 0 \to t = 2; \quad \left|\begin{array}{cc:c} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2+t \\ \hdashline t+2 & 0 & t \end{array}\right| = -3t + 6 = 0 \to t = 2$$

- Si $t = 2 \to ran(C) = 2$
- Si $t \ne 2 \to ran(C) = 3$

d) Observamos que $ran\ (D) \le 3$ porque solo hay tres filas.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -24 \ne 0 \to ran\ (D) \ge 2$$

$$\left|\begin{array}{cc:c} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 \\ \hdashline 1 & -2 & 4 \end{array}\right| = 0; \quad \left|\begin{array}{cc:c} 5 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & t \\ \hdashline 1 & -2 & 2 \end{array}\right| = 24 - 6t = 0 \to t = 4$$

- Si $t \ne 4 \to ran\ (D) = 3$
- Si $t = 4 \to ran\ (D) = 2$

42 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{pmatrix}$**:**

a) Resuelve la ecuación $|A| = 0$**.**

b) Calcula el rango de la matriz A **según los valores de** x**.**

a) $|A| = \begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3x + 2 = 0 \to x = -1,\ x = 2$

b) Si $x = -1 \to A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to ran(A) = 1$

Si $x = 2 \to A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \to ran(A) = 2$

Si $x \neq -1$ y $x \neq 2 \to ran(A) = 3$

43 **Dada la matriz** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**:**

a) Encuentra la expresión general de A^n **donde** n **es un número natural cualquiera.**

b) Razona que A^n **tiene inversa para cualquier** $n \geq 1$ **y calcula dicha matriz inversa.**

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $|A^n| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to A^n$ tiene inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

44 **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:**

a) $\begin{cases} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x - my - z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{l} ax + y = 0 \\ -y + 2az = 0 \\ -x + ay = 0 \end{array}\right\}$ Este sistema es *compatible* por ser homogéneo.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix} = -2a^3 - 2a = 0 \ \to \ a = 0$$

- Si $a \neq 0 \ \to \ ran(A) = ran(A') = 3 \ \to$ Sistema *compatible determinado*.

  Solución: $x = 0, \ y = 0, \ z = 0$

- Si $a = 0$:

  $$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ -y &= 0 \\ -x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

  Las dos primeras ecuaciones son equivalentes. El sistema queda:

  $$\left.\begin{aligned} y &= 0 \\ -x &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Sistema } \textit{compatible indeterminado.}$$

  Soluciones: $x = 0, \ y = 0, \ z = \lambda$

b) $$\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 0 \\ x - my - z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \ \to \ m = 2, \ m = 1$$

- Si $m \neq 1$ y $m \neq 2 \ \to \ ran(A) = ran(A') = 3 \ \to$ Sistema *compatible determinado*.

  Utilizando la regla de Cramer: $x = 0, \ y = -\dfrac{1}{m-1}, \ z = \dfrac{1}{m-1}$

- Si $m = 1$:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \to \ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \to \ ran(A) = 2$$

  Añadimos la última columna.

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \to \ ran(A') = 3 \ \to \text{ Sistema } \textit{incompatible.}$$

- Si $m = 2$:

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ \to \ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \ \to \ ran(A) = 2$$

  Añadimos la última columna.

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ \to \ ran(A') = 2$$

  Sistema *compatible indeterminado*. Tomamos las dos primeras ecuaciones y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

  $$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 0 \\ x - 2y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

  Soluciones: $x = \dfrac{1-\lambda}{5}, \ y = -\dfrac{3\lambda - 2}{5}, \ z = \lambda$

45 **Discute y resuelve los siguientes sistemas:**

a) $\begin{cases} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} mx + y + z = 2 \\ 2x + my + m^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} \lambda x + 2z = 0 \\ \lambda y - z = \lambda \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\} \ |A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda = 0 \ \to \ \lambda = -1, \ \lambda = 0$

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 0 \ \to \ ran(A) = ran(A') = 3 \ \to$ El sistema es *compatible determinado*.

  Usando la regla de Cramer obtenemos la *solución*:

  $x = -\dfrac{4}{\lambda+1}; \quad y = \dfrac{\lambda+3}{\lambda+1}; \quad z = \dfrac{2\lambda}{\lambda+1}$

- Si $\lambda = 0$:

  $$\left.\begin{array}{r} 2z = 0 \\ -\ \ z = 0 \\ x + 3y + \ z = 5 \end{array}\right\}$$

  Las dos primeras ecuaciones son equivalentes.

  $$\left.\begin{array}{r} -z = 0 \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\}$$

  Sistema *compatible indeterminado*.

  Pasamos y al segundo miembro como parámetro.

  Soluciones: $x = -3\mu + 5, \ y = \mu, \ z = 0$

- Si $\lambda = -1$:

  $$\left.\begin{array}{r} -x + 2z = 0 \\ -y - z = -1 \\ x + 3y + z = 5 \end{array}\right\} \ A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \to \ ran(A) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \to \ ran(A') = 3$$

  Sistema *incompatible*.

b) $\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 2 \\ 2x + my + m^2z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \end{array}\right\} \ |A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 2 & m & m^2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -m^3 + 3m^2 - 2m = 0 \ \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$

- Si $m \neq 0, \ m \neq 1$ y $m \neq 2 \ \to \ ran(A) = ran(A') = 3 \ \to$ El sistema es *compatible determinado*.

  Usamos la regla de Cramer y obtenemos la *solución*:

  $x = 0; \quad y = -\dfrac{2m^2 - 1}{m - m^2}; \quad z = \dfrac{2m - 1}{m - m^2}$

- Para $m = 0$, la matriz de coeficientes es:

  $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \to \ ran(A) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \ \to \ ran(A') = 3$$

  Sistema *incompatible*.

- Para $m = 1$, la matriz de coeficientes es:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran(A') = 3$$

  Sistema *incompatible*.

- Para $m = 2$, la matriz de coeficientes es:

  $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \to ran(A) = 2$$

  $$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \to ran(A') = 2$$

  Sistema *compatible indeterminado*. Tomamos las dos primeras filas y pasamos z al segundo miembro como parámetro.

  $$\left.\begin{aligned} 2x + y + z &= 2 \\ 2x + 2y + 4z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

  Soluciones: $x = \lambda + \dfrac{3}{2}$, $y = -3\lambda - 1$, $z = \lambda$

46 Discute el siguiente sistema y resuélvelo, si es posible, en el caso $a = 4$:

$$\begin{cases} x - y = a \\ x + a^2 z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & -1 & a(a-1) \end{vmatrix} = a(a-1) = 0 \to a = 0,\ a = 1$$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1 \to ran\ (A) = 3 = ran\ (A') \to$ El sistema es *compatible determinado*.
- Si $a = 0 \to A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\ (A) = 2$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \to ran\ (A') = 2$$

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a = 1 \to A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\ (A) = 2$

  $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to ran\ (A') = 3$$

  El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 4$, se trata de un sistema *compatible determinado*. Lo resolvemos por Cramer:

  Solución: $x = \dfrac{11}{3}$, $y = \dfrac{-1}{3}$, $z = \dfrac{1}{3}$

Cuestiones teóricas

47 **¿Verdadero o falso? Justifica las respuestas y pon ejemplos.**

a) Si c_1, c_2 y c_3 son las columnas 1.ª, 2.ª y 3.ª de una matriz cuadrada de orden 3 tal que $|c_1 \;\; c_2 \;\; c_3| = 5$, entonces:

I) $|c_2 \;\; 2c_3 \;\; c_1| = 10$

II) $|c_1 + c_2 \;\; c_2 - c_1 \;\; c_3| = 0$

III) $|c_1 + c_3 \;\; c_2 \;\; c_3 + c_1| = 5$

IV) $|-c_2 \;\; 2c_1 - c_3 \;\; c_3 + c_2| = 10$

b) El sistema $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ es compatible indeterminado para cualquier valor de a y b.

c) Si el determinante de la matriz ampliada de un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es distinto de cero, el sistema tiene solución única.

d) Si el rango de la matriz de coeficientes de un sistema es menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado.

a) I) Verdadero:

$$\left| c_2 \quad 2c_3 \quad c_1 \right| = 2\left| c_2 \quad c_3 \quad c_1 \right| = (-1)^2\, 2\left| c_1 \quad c_2 \quad c_3 \right| = 10$$

II) Falso:

$$\left| c_1 + c_2 \quad c_2 - c_1 \quad c_3 \right| = \left| c_1 + c_2 \quad 2c_2 \quad c_3 \right| = 2\left| c_1 + c_2 \quad c_2 \quad c_3 \right| = 2\left| c_1 \quad c_2 \quad c_3 \right| = 10$$

III) Falso:

$$\left| c_1 + c_3 \quad c_2 \quad c_3 + c_1 \right| = \left| c_1 + c_3 \quad c_2 \quad 0 \right| = 0$$

IV) Verdadero:

$$\left| -c_2 \quad 2c_1 - c_3 \quad c_3 + c_2 \right| = \left| -c_2 \quad 2c_1 - c_3 \quad c_3 \right| = \left| -c_2 \quad 2c_1 \quad c_3 \right| = 2\left| -c_2 \quad c_1 \quad c_3 \right| =$$

$$= -2\left| c_2 \quad c_1 \quad c_3 \right| = (-1)\,(-2)\left| c_1 \quad c_2 \quad c_3 \right| = 10$$

b) Verdadero, $ran\,(A) = 2$, y como solo hay dos filas, A' no puede tener más rango. Es *compatible determinado* para cualquier valor de a y b.

c) Falso, puede ser también *incompatible*. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + \;\; z = 0 \\ 2y + 2z = 3 \\ 3y + 3z = 1 \\ x - \;\; y \qquad = -1 \end{array}\right\}$$

Tiene $|A'| = 7 \neq 0$, pero $ran\,(A) = 3 \rightarrow$ El sistema es *incompatible*.

d) Falso, puede ser también *incompatible*. Por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + \;\; z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 4 \\ 3x + 3y + 3z = 5 \end{array}\right\}$$

$ran\,(A) = 1$, $ran\,(A') = 2$

48 **En un sistema de igual número de ecuaciones que de incógnitas, el determinante de la matriz de coeficientes es igual a 0. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:**

a) ¿Puede ser compatible?

b) ¿Puede tener solución única?

c) ¿Se puede aplicar la regla de Cramer?

a) Sí, podría ser compatible indeterminado si $ran(A) = ran(A') <$ *n.º de incógnitas*.

b) No, pues al ser $ran(A) <$ *n.º de incógnitas*, el sistema no puede ser compatible determinado.

c) Sí, si es compatible, pasando al segundo miembro las incógnitas que sea necesario.

49 **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema homogéneo de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es igual a 3. ¿Qué puedes decir de su solución? Razona tu respuesta.**

Al ser el sistema homogéneo con 3 incognitas, tenemos que:

$$ran\ (A) = ran\ (A') = n.^o \textit{ de incógnitas} = 3$$

El sistema sería *compatible determinado*. Por tanto, tendría como solución única la solución trivial: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Página 105

50 **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es igual a 1. ¿Qué rango, como máximo, puede tener la matriz ampliada?**

Como máximo, la matriz ampliada podrá tener rango 2.

51 **Si en un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas se verifica que $ran(A) = ran(A') = 2$, ¿se puede aplicar la regla de Cramer? En caso afirmativo, explica las transformaciones que hay que hacer en el sistema para aplicarla.**

Sí se puede aplicar la regla de Cramer. Para ello, nos tenemos que quedar solo con las dos ecuaciones y las dos incógnitas con las que hemos formado el menor de orden 2 distinto de cero. Las dos incógnitas sobrantes pasan como parámetros al segundo miembro.

52 **Sean** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ **y** $C = \begin{pmatrix} a+3 \\ b \\ c+3 \end{pmatrix}$.

Justifica que si el sistema $AX = B$ es compatible determinado, entonces el sistema $AX = C$ también lo es.

Si $AX = B$ es compatible determinado, entonces $ran(A) = ran(A') = 2$.

Para ello, el siguiente determinante debe ser igual a cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c = 0$$

Calculamos el determinante de la matriz ampliada correspondiente al sistema $AX = C$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a+3 \\ 1 & -1 & b \\ 0 & 3 & c+3 \end{vmatrix} = 3a - 3b - 3c$$

Los dos determinantes calculados tienen el mismo valor, luego este último vale cero. Por tanto, el sistema $AX = C$ es *compatible determinado* ya que también verifica que $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$.

53 **a) Demuestra que el siguiente sistema de ecuaciones tiene siempre solución para cualquier valor de α y β:**

$$\begin{cases} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{cases}$$

b) ¿Es posible que tenga infinitas soluciones para algún valor de α y β?

a) $$\left.\begin{array}{l} x - y + (\alpha + \beta)z = \alpha \\ x \quad + \quad z = \beta \\ x \quad - \quad z = \alpha - 3\beta \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix}}_{A} \;\middle|\; \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha - 3\beta \end{matrix}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \alpha + \beta \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \ \to \ ran(A) = ran(A') = 3$$

El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de α y β.

b) Por el apartado anterior sabemos que el sistema será siempre *compatible determinado*, luego la solución siempre será única. No puede haber infinitas soluciones.

Para profundizar

54 **Discute, en función de los parámetros a y b, el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 6 - 3a = 0 \ \to \ a = 2$$

- Si $a \neq 2 \ \to \ ran(A) = 3 = ran(A') \ \to$ Sistema *compatible determinado*.
- Si $a = 2$, el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ x - 3y - z = -1 \\ -x + 8y + 4z = b \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \ \to \ ran(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 8 & b \end{vmatrix} = 25 - 5b = 0 \ \to \ b = 5$$

Si $b \neq 5 \ \to \ ran(A') = -3 \neq ran(A) = 2 \ \to$ Sistema *incompatible*.

Si $b = 5 \ \to \ ran(A') = 2 = ran(A) \ \to$ Sistema *compatible indeterminado*.

55 **Discute los siguientes sistemas en función del parámetro y resuélvelos cuando sean compatibles:**

a) $$\left\{\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right.$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{array}\right.$$

a) $$\left.\begin{array}{l} kx + ky - z = 2 \\ 3x - ky = 0 \\ 5x + ky = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} k & k & -1 & 2 \\ 3 & -k & 0 & 0 \\ 5 & k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -40k = 0 \ \to\ k = 0$$

- Si $k \neq 0 \ \to\ ran(A') = 4 \neq ran\ (A) \ \to$ Sistema *incompatible.*
- Si $k = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x \qquad = 0 \\ 5x \qquad = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª son equivalentes, nos queda:

$$\left.\begin{array}{r} -z = 2 \\ 3x \qquad = 0 \\ x + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz ampliada en este caso es:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 15 \neq 0 \ \to\ ran(A') = 3$$

Como $ran(A) < 3$, el sistema es *incompatible.*

Este sistema no tiene solución para ningún valor de k.

b) $$\left.\begin{array}{l} x + 3y + z = 5 \\ mx + 2z = 0 \\ my - z = m \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ 0 & m & -1 & m \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 7m - m^2 = 0 \ \to\ m = 7,\ m = 0$$

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 7 \ \to\ ran(A') = 4 \neq ran\ (A) \ \to$ Sistema *incompatible.*
- Si $m = 0$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 5 \\ 2z = 0 \\ -z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

Las ecuaciones 2.ª y 3.ª son equivalentes, por tanto el sistema es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+\ z=5 \\ 2z=0 \\ x-\ y+\ z=0 \end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz de coeficientes en este caso es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \ \to\ ran(A) = 3 = ran(A') \ \to \ \text{Sistema } \textit{compatible determinado}.$$

Usando la regla de Cramer obtenemos la *solución*: $x=\dfrac{5}{4},\ y=\dfrac{5}{4},\ z=0$

- Si $m=7$:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+\ z=5 \\ 7x+\qquad 2z=0 \\ 7y-\ z=7 \\ x-\ y+\ z=0 \end{array}\right\}$$

El menor formado por los coeficientes de las tres primeras ecuaciones es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 56 \neq 0 \ \to\ ran(A) = 3 = ran(A') \ \to \ \text{Sistema } \textit{compatible determinado}.$$

Nos quedamos solo con las tres primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y+\ z=5 \\ 7x+\qquad 2z=0 \\ 7y-\ z=7 \end{array}\right\}$$

Usando la regla de Cramer obtenemos la *solución*: $x=-\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{5}{4},\ z=\dfrac{7}{4}$

56 **Discute los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x-\ y+\ z=2} \\ \boldsymbol{2x+3y-2z=-8} \\ \boldsymbol{4x+\ y+az=b} \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x+\ y+\ z=a-1} \\ \boldsymbol{2x+\ y+az=a} \\ \boldsymbol{x+ay+\ z=b} \end{array}\right.$ **c)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x-3y+z=a} \\ \boldsymbol{x\qquad -z=b} \\ \boldsymbol{x\qquad +z=c} \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{ax+\ y-z=b-1} \\ \boldsymbol{2x+ay\qquad =b+1} \\ \boldsymbol{-x\qquad +z=b} \end{array}\right.$

a) $$\left.\begin{array}{r} x-\ y+\ z=2 \\ 2x+3y-2z=-8 \\ 4x+\ y+az=b \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & a \end{array}}_{A}\ \middle|\ \begin{array}{c} 2 \\ -8 \\ b \end{array}\right)$$

$$|A| = 5a = 0 \ \to\ a = 0$$

- Si $a=0$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & -8 \\ 4 & 1 & 0 & b \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 1 & b \end{vmatrix} = 5b + 20 = 0 \ \to\ b = -4$$

  — Si $a=0$ y $b=-4$ → $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* → El sistema es *compatible indeterminado.*

  — Si $a=0$ y $b \neq -4$ → $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$ → El sistema es *incompatible.*

- Si $a \neq 0$ → $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas* → El sistema es *compatible determinado*, cualquiera que sea el valor de b.

b) $\left.\begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=b \end{array}\right\}\quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} a-1 \\ a \\ b \end{array}\right.\right)$

$$|A| = -(a-1)(a-2) = 0 \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases}$$

- Si $a=1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$ Contradictorias, a no ser que $b=0$.

  — Si $a=1$ y $b \neq 0 \to$ Sistema *incompatible*.

  — Si $a=1$ y $b=0$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ La 1.ª fila y la 3.ª son iguales.

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* $\to$ *Compatible indeterminado.*

- Si $a=2$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & b \end{array}\right)$ La 1.ª columna y la 3.ª son iguales.

  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \to ran(A) = 2;\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & b \end{vmatrix} = -(b-1) = 0 \to b = 1$

  — Si $a=2$ y $b \neq 1 \to ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3 \to$ El sistema es *incompatible*.

  — Si $a=2$ y $b=1 \to ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* $\to$ El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq 2 \to ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas* $\to$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

c) $\left.\begin{array}{l} x-3y+z=a \\ x\quad\;\; -z=b \\ x\quad\;\; +z=c \end{array}\right\}\quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array}\right.\right)$

$|A| = 6 \neq 0 \to ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas* $\to$ El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de a, b y c.

d) $\left.\begin{array}{l} ax+y-z=b-1 \\ 2x+ay\quad\; =b+1 \\ -x\quad\;\; +z=b \end{array}\right\}\quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} b-1 \\ b+1 \\ b \end{array}\right.\right)$

$$|A| = a^2 - a - 2 = 0 \begin{cases} a=-1 \\ a=2 \end{cases}$$

- Si $a=-1$, queda:

  $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & -1 & 0 & b+1 \\ -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \;\to\; ran(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{cc:c} -1 & 1 & b-1 \\ 2 & -1 & b+1 \\ \hdashline -1 & 0 & b \end{array}\right| = -3b = 0 \;\to\; b = 0$$

— Si $a = -1$ y $b \neq 0$ → $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$ → El sistema es *incompatible*.

— Si $a = -1$ y $b = 0$ → $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* → El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a = 2$, queda:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 2 & 1 & -1 & b-1 \\ 2 & 2 & 0 & b+1 \\ \hdashline -1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \;\to\; ran(A) = 2$$

$$\left|\begin{array}{cc:c} 2 & 1 & b-1 \\ 2 & 2 & b+1 \\ \hdashline -1 & 0 & b \end{array}\right| = 3b - 3 = 0 \;\to\; b = 1$$

— Si $a = 2$ y $b \neq 1$ → $ran(A) = 2 \neq ran(A') = 3$ → El sistema es *incompatible*.

— Si $a = 2$ y $b = 1$ → $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* → El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq -1$ y $a \neq 2$ → $ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas* → El sistema es *compatible determinado* para cualquier valor de b.

Autoevaluación

Página 105

1 Demuestra que la matriz $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor de y.

$$B(y) = \begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} = y \begin{vmatrix} 3 & 7 & 12 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \cdot y = 0$$

Luego $B(y)$ no tiene inversa para ningún valor de y.

2 Discute en función de a el siguiente sistema y resuélvelo si $a = 3$:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - 2z = 6 \end{cases}$$

$$A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{matrix}}_{A} \left| \begin{matrix} a \\ 3a \\ 6 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = -4 + a^2 + 2 - 4 + a - 2a = a^2 - a - 6 = 0 \quad \begin{matrix} a = -2 \\ a = 3 \end{matrix}$$

- Si $a \neq -2$ y $a \neq 3$ → $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$ → El sistema es *compatible determinado*.
- Si $a = -2$:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} -2 \\ -6 \\ 6 \end{matrix}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \to ran\ (A) = 2; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \to ran\ (A') = 3$$

Como $ran\ (A) = 2 \neq ran\ (A') = 3$ → El sistema es *incompatible*.

- Si $a = 3$:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{matrix}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \to ran\ (A) = 2; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \to ran\ (A') = 2$$

Como $ran\ (A) = ran\ (A') = 2 <$ *n.º de incógnitas* → El sistema es *compatible indeterminado*.

- Resolvemos ahora el sistema para $a = 3$:

$$\left.\begin{matrix} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{matrix}\right\}$$

Sabemos que el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 3.ª ecuación, pasamos z al segundo miembro como parámetro y lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x - \ \ y &= 3 - z \\ 3x + 2y &= 9 + z \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 9+z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15-z}{5}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-z \\ 3 & 9+z \end{vmatrix}}{5} = \frac{4z}{5}$$

Soluciones: $x = \dfrac{15-\lambda}{5}$, $y = \dfrac{4\lambda}{5}$, $z = \lambda$

3 **Determina para qué valores de a existe la matriz inversa de M. Calcula dicha matriz inversa para $a = 2$.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -2(a^3 - a) = 0 \to -2a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

M tiene inversa si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$.

- Para $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \ |M| = -12$$

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} \to (M_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \to (M_{ji}) = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to M^{-1} = -\frac{1}{12}(M_{ji}) = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

4 **Halla en cada caso la matriz X que verifica la igualdad:**

a) $A^{-1}XA = B$

b) $(A + X)B = 1$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$**.**

a) $A^{-1}XA = B \to AA^{-1}XAA^{-1} = ABA^{-1} \to X = ABA^{-1}$

Calculamos A^{-1} $(|A| = -3 + 2 = -1)$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to (A_{ji}) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $(A + X)B = I \to AB + XB = I \to XB = I - AB \to XBB^{-1} = (I - AB)B^{-1} \to$

$$\to X = (I - AB)B^{-1} \to X = B^{-1} - A$$

Calculamos B^{-1} $(|B| = 1 + 2 = 3)$:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ji}) = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

5 **a) Discute, en función de a, el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

b) Resuelve el sistema anterior para el caso $a = -1$.

a) $$\left.\begin{array}{l} x + ay + z = a + 2 \\ x + y + az = -2(a+1) \\ ax + y + z = a \end{array}\right\} \quad A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} a+2 \\ -2(a+1) \\ a \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$|A| = a^3 - 3a + 2 = 0 = (a-1)^2(a+2) = 0 \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

- Si $a = 1$:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \text{Las tres ecuaciones resultantes son contradictorias.}$$

  El sistema es *incompatible*.

- Si $a = -2$:

  $$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

  Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$, entonces $ran(A) = ran(A') = 2 <$ *n.º de incógnitas*.

  El sistema es *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ $\rightarrow$ $ran(A) = ran(A') = 3$ $\rightarrow$ El sistema es *compatible determinado*.

b) Para $a = -1$:

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix} \end{array}\right) \text{ y sabemos que } |A| = 4.$$

El sistema en este caso es *compatible determinado*. Lo resolvemos aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0$$

Solución: $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$

6 Demuestra que no hay valores de m para los que este sistema no tenga solución. Resuélvelo:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \\ x + my + 3z = 7 \end{array}\right\} \; A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & m & 3 & 7 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & m & 3 \end{matrix}}_{A}$$

$|A| = 4 - m = 0 \rightarrow m = 4$

- Si $m = 4$:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ \hdashline 1 & 4 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

La 4.ª columna se obtiene sumando la 2.ª y la 3.ª. Luego, $ran(A) = ran(A')$. El sistema es *compatible indeterminado* pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 2$$

Lo resolvemos en este caso. Podemos prescindir de la 3.ª ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array}\right\} \; \left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 - z \\ x + 3y = 5 - 2z \end{array}\right\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 2 \\ 5 - 2z & 3 \end{vmatrix}}{1} = -1 + z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 1 & 5 - 2z \end{vmatrix}}{1} = 2 - z$$

Soluciones: $x = -1 + \lambda, \; y = 2 - \lambda, \; z = \lambda$

- Si $m \neq 4 \rightarrow ran(A) = ran(A') = 3 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

Lo resolvemos en este caso:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 7 & m & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{4 - m}{4 - m} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{0}{4 - m} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & m & 7 \end{vmatrix}}{4 - m} = \frac{8 - 2m}{4 - m} = \frac{2(4 - m)}{4 - m} = 2$$

Solución: $x = 1, \; y = 0, \; z = 2$

Por tanto, no hay ningún valor de m para el que el sistema no tenga solución.

7 El rango de la matriz de los coeficientes de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas es 3. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? En base a ello, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema?

La matriz ampliada es una matriz cuadrada de orden 4.

Su rango puede ser 3 (si $|A'| = 0$) o 4 (si $|A'| \neq 0$).

- Si $ran(A) = ran(A') = 3 = n.^o$ *de incógnitas* → El sistema será *compatible determinado*.
- Si $ran(A) = 3 \neq ran(A') = 4$ → El sistema será *incompatible*.

8 En un sistema homogéneo de tres ecuaciones y dos incógnitas, la matriz de los coeficientes tiene rango 2.

Di, razonadamente, cuántas soluciones tendrá el sistema.

En un sistema homogéneo el rango de la matriz de los coeficientes y el rango de la matriz ampliada siempre coinciden ya que al añadir una columna de ceros no cambia el rango.

Por tanto, tenemos que $ran(A) = ran(A') = 2 = n.^o$ *de incógnitas*. El sistema será *compatible determinado*. Solo tiene una solución que es la trivial: $x = 0$, $y = 0$.