Halla un punto de la gráfica de $y = x^2 + x + 5$ en el cual la recta tangente sea paralela a la recta $y = 3x - 8$.

Recordemos la interpretación geométrica de la derivada: La derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Por otra parte, también debemos recordar que dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Interrelacionando estas dos cosas, se tiene que la derivada de $y = x^2 + x + 5$ ha de coincidir con la pendiente de la recta $y = 3x - 8$, que es 3. Así:

$$y' = 2x + 1 = 3, \qquad \text{de donde,} \qquad x = 1.$$

El punto pedido es por tanto $P = (1, 7)$.

Halla el punto de la curva $f(x) = \text{Ln}(1 + x^2)$ en que la tangente es perpendicular a la tangente trazada por el punto de abscisas $x = 1$.

Recordemos que la relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares es: $m = -\frac{1}{m'}$

Aunque no la piden, calculemos en primer lugar la recta tangente trazada por el punto de abscisas $x = 1$. Esta tendrá por ecuación:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

siendo x_0 la abscisa del punto de tangencia, esto es $x_0 = 1$. Así:

$x_0 = 1$; $\qquad f(x_0) = \text{Ln } 2$; $\qquad f'(x_0) = \frac{2x_0}{1 + x_0^2} = 1$; $\qquad$ Recta tangente: $y - \text{Ln } 2 = x - 1$

De dicha recta sólo nos interesa la pendiente que es $m = 1$. Entonces, la pendiente de la otra recta tangente, perpendicular a esta, será $m' = -1$. Por tanto, ha de cumplirse que:

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} = -1$$

Resolvamos la ecuación $\frac{2x}{1 + x^2} = -1$

$$2x = -1 - x^2; \qquad x^2 + 2x + 1 = 0; \qquad \text{Solución: } x = -1 \text{ (doble)}$$

Así pues, el punto buscado es $P = (-1, \text{Ln } 2)$.

Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, halla el valor de a para que tenga un extremo relativo (máximo o mínimo) cuando $x = 2$. Encuentra, en este caso, todos los extremos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento y puntos de inflexión.

Si $f(x) = x^3 + ax^2 + 5$, se tiene que $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ $\quad$ y $\quad$ $f''(x) = 6x + 2a$..

Si para $a = 2$ hay un extremo relativo, entonces debe cumplirse:

$$f'(2) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a = -3$$

Con el valor de a obtenido, la función y las primeras derivadas son:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 5 \qquad f'(x) = 3x^2 - 6x \qquad f''(x) = 6x - 6$$

Busquemos los extremos relativos y los puntos de inflexión:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = 0 \qquad \text{y} \qquad x = 2$$

Para $x = 0$, $f''(0) = -6 < 0$; en $(0, 5)$ hay un máximo relativo.

Para $x = 2$, $f''(2) = 6 > 0$; en $(2, 1)$ hay un mínimo relativo.

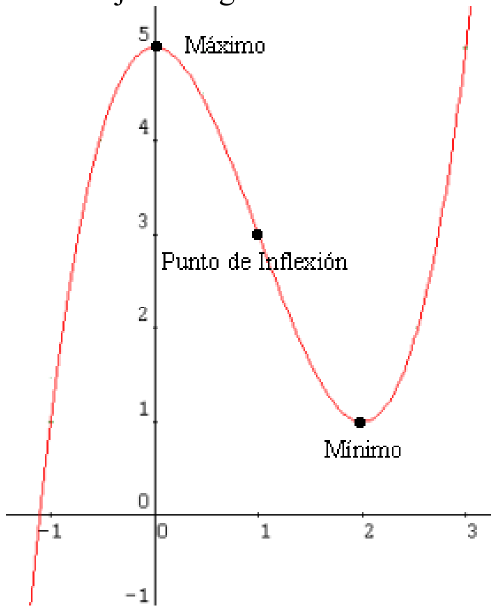
Además $f''(x) = 6x - 6 = 0$ para $x = 1$. Para $x = 1$, $f'''(x) = 6 \neq 0$; en $(1, 3)$ hay un punto de inflexión.

Estudiemos la monotonía. Analicemos el signo de la derivada primera $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Obtenemos:

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, región donde se produce el crecimiento.

$f'(x) < 0$ en $(0, 2)$, intervalo de decrecimiento de la función.

Todo lo anterior se puede ver en el dibujo de la gráfica de la función:



Estudia el dominio de la función $f(x) = \dfrac{\text{Ln}\, x + 2}{x^2}$ **y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.**

Para estudiar el dominio debemos tener en cuenta dos cosas:

- Aparece un cociente $\Rightarrow$ La función no estará definida para aquellos valores que anulen el denominador.
- Aparece un logaritmo $\Rightarrow$ La función no estará definida para aquellos valores que hagan negativo el argumento del logaritmo.

Así pues, el dominio de definición de la función será: *Dom* $f(x) = \mathbb{R} - (-\infty, 0] = (0, +\infty)$.

Para estudiar la monotonía, calculemos la derivada primera de la función:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - (\text{Ln}\, x + 2)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-3x - 2x\cdot \text{Ln}\, x}{x^4} = \frac{-3 - 2\text{Ln}\, x}{x^3}$$

Igualémosla a cero para calcular sus raíces:

$$f'(x) = \frac{-3 - 2\text{Ln}\, x}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3 - 2\,\text{Ln}\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\, x = -\frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x = e^{-\frac{3}{2}}$$

Para $x > e^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es creciente en $\left(e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$

Para $x < e^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ es decreciente en $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

Se sabe que la función f: (–1, +∞) $\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en (–1, +∞).

a) Halla el valor de a. ¿Es f derivable en x = 0?

b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

a) Como nos dicen que es continua en su dominio, en particular, es continua en x = 0, es decir:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$f(0) = a$ $\qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + a}{x+1} = a$ $\qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 4x + 3) = 3$

Por tanto a = 3, y nuestra función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 3}{x+1} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

La función es derivable en su dominio, salvo quizás en el cero, por ser cada uno de sus trozos derivables en aquellos puntos donde están definidos. Su derivada, salvo en el cero es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & si \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Para que exista $f'(0)$, ha de ser $f'(0^+) = f'(0^-)$

$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = -3$ $\qquad f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - 4) = -4$

Como f '$(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe $f'(0)$

b) La monotonía (crecimiento y decrecimiento) se estudia mediante $f'(x)$:

Si $-1 < x < 0$, $f'(x) = 2x - 4$

Igualando a cero tenemos $2x - 4 = 0$, de donde $x = 2$, que no está en el intervalo $-1 < x < 0$. En dicho intervalo se cumple que $f'(x)$ es siempre negativo y por tanto, en él, $f(x)$ es decreciente.

Si $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$. Igualando a cero tenemos $x^2 + 2x - 3 = 0$, de donde $x = 1$ o $x = -3$.

(Solo nos interesa $x = 1$, porque la función en este trozo está definida para $x > 0$).

Como $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right) - 3 < 0$, $f(x)$ es decreciente en $0 < x < 1$.

Como $f'(2) = 2 \cdot 2 - 3 > 0$, $f(x)$ es creciente en $x > 1$

Por definición $x = 1$ es un mínimo relativo.

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}}$.

a) Calcula las asíntotas de la gráfica de f.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de f (puntos donde se obtienen y valor que alcanzan).

a) Asíntotas.

La función no tiene asuntotas verticales, pues $Dom\, f(x) = \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to \infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal en +∞.

$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{2x}{x^2+1}} = e^0 = 1$, luego $y = 1$ es una asíntota horizontal en $-\infty$.

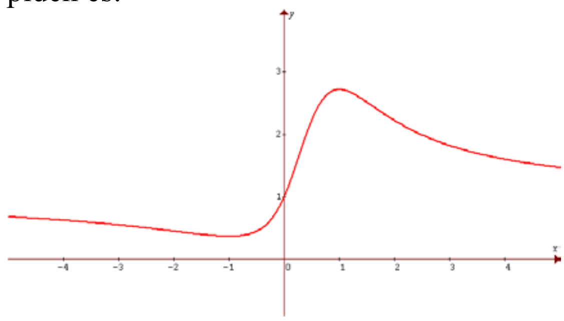
Como tiene una asíntota horizontal, entonces no tiene asíntota oblicua.

b) Monotonía. Estudiemos $f'(x)$:

$$f'(x) = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left[\frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}\right] = e^{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left[\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}\right]$$

$$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -2x^2 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 1$$

La gráfica de la función aunque no la piden es:



Como $f'(-2) < 0$, $f(x)$ decrece en $(-\infty, -1)$.
Como $f'(0) > 0$, $f(x)$ crece en $(-1, 1)$.
Como $f'(2) < 0$, $f(x)$ decrece en $(1, +\infty)$.
Por definición $x = -1$ es un mínimo con valor $f(1) = e$.
Y $x = 1$ es un máximo con valor $f(-1) = e^{-1} = 1/e$.

Considera la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$.

a) Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determina los intervalos de concavidad y de convexidad de f. ¿Tiene puntos de inflexión la gráfica de f?

a) La recta tangente en $x = 1$ es:

$$y - f(1) = f'(1)\,(x - 1)$$

La recta normal en $x = 1$ es:

$$y - f(1) = \frac{-1}{f'(1)}\,(x - 1)$$

$$f(x) = (x+1)\,(x-1)\,(x-2) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0$$

$$f'(x) = (x-1)\,(x-2) + (x+1)\,(x-2) + (x+1)\,(x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 0 + 2\,(-1) + 0 = -2$$

Por tanto, la recta tangente en $x = 1$ es:

$$y - 0 = -2\,(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 2$$

La recta normal en $x = 1$ es:

$$y - 0 = \frac{-1}{-2}(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x - 1)$$

b) El estudio de la curvatura es el estudio de $f''(x)$

$$f'(x) = (x-1)\,(x-2) + (x+1)\,(x-2) + (x+1)\,(x-1)$$
$$f''(x) = (x-2) + (x-1) + (x-2) + (x+1) + (x-1) + (x+1) = 6x - 4$$

De $f''(x) = 0$, tenemos $6x - 4 = 0$, de donde $x = \frac{4}{6}$, que es el posible punto de inflexión.

Como $f''(0) = -4 < 0$, $f(x)$ es cóncava ($\cap$) en $\left(-\infty, \frac{4}{6}\right)$

Como $f''(1) = 2 > 0$, $f(x)$ es convexa ($\cup$) en $\left(\frac{4}{6}, +\infty\right)$

Por definición, $x = \frac{4}{6}$ es el punto de inflexión.

Considera la curva de ecuación $y = x^2 - 2x + 3$.

a) Halla una recta que sea tangente a dicha curva y que forme un ángulo de 45º con el eje de abscisas.

b) ¿Hay algún punto de la curva en el que la recta tangente sea horizontal? En caso afirmativo, halla la ecuación de dicha recta tangente; en caso negativo, explica por qué.

a) La recta tangente en el punto $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Como dicen que forma un ángulo de 45º con la horizontal, me están diciendo que la pendiente de la recta tangente es:

$$\text{tg}\,(45º) = f'(a) = 1$$

Ahora bien la pendiente genérica de la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$ es:

$$f'(x) = 2x - 2$$

Igualando pendientes y resolviendo obtendremos el punto "a":

$$2x - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3/2 \quad \Rightarrow \quad a = 3/2$$

$$f(3/2) = (3/2)^2 - 2 \cdot (3/2) + 3 = 9/4$$

Luego la recta tangente en $x = 3/2$ es:

$$y - 9/4 = 1 \cdot (x - 3/2) \quad \Rightarrow \quad 4x - 4y + 3 = 0$$

b) Para que un punto de la función tenga tangente horizontal la derivada en dicho punto ha de ser cero.

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Me están pidiendo la recta tangente en $x = 1$: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Como $f(1) = (1)^2 - 2 \cdot (1) + 3 = 2$, la recta tangente es:

$$y - 2 = 0 \cdot (x - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

Determina el valor de las constantes a, b y c sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x \cdot (ax^2 + bx + c)$ tiene un punto de inflexión en $(-2, 12)$ y que en dicho punto la recta tangente tiene por ecuación $10x + y + 8 = 0$.

La existencia de un punto de inflexión en $(-2, 12)$ nos dice que:

- $f(-2) = 12$
- $f''(-2) = 0$

En dicho punto la recta tangente es $10x + y + 8 = 0$, es decir $y = -10x - 8$, con lo cual la pendiente de la recta tangente en $x = -2$ es -10, de donde:

- $f'(-2) = -10$

Apliquemos estas condiciones para calcular los coeficientes pedidos:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f(-2) = 12 \quad \Rightarrow \quad -8a + 4b - 2c = 12$$

$$f''(-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad -12a + 2b = 0$$

$$f'(-2) = -10 \quad \Rightarrow \quad 12a - 4b + c = -10$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas obtenemos $a = 1$, $b = 6$ y $c = 2$.

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{x/3}$. ¿En que punto de la gráfica de f la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas? Halla la ecuación de dicha recta tangente.

La recta tangente en $x = a$ es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

$$f(x) = e^{x/3} \quad \Rightarrow \quad f(a) = e^{a/3} \quad ; \quad f'(x) = (1/3) \cdot e^{x/3} \quad \Rightarrow \quad f'(a) = (1/3) \cdot e^{a/3}$$

La recta tangente es:

$$y - e^{a/3} = (1/3) \cdot e^{a/3} \cdot (x - a)$$

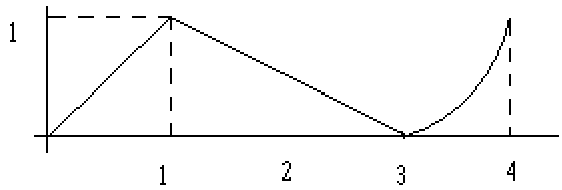
Como dicen que la recta tangente pasa por el origen de coordenadas (0, 0) tenemos que:

$$0 - e^{a/3} = (1/3)\cdot e^{a/3}\cdot(0-a) \quad\Rightarrow\quad -1 = -a/3 \quad\Rightarrow\quad a = 3$$

Luego el punto de la gráfica de f donde la recta tangente a ésta pasa por el origen de coordenadas es $a = 3$; y la recta tangente en dicho punto es:

$$y - e^{3/3} = (1/3)\cdot e^{3/3}\cdot(x-3) \quad\Rightarrow\quad y = \frac{e\cdot x}{3}$$

De una función f : [0, 4] $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ se sabe que f (1) = 3 y que la gráfica de su función derivada es la que aparece en el dibujo



a) Halla la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.
b) Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. ¿En qué punto alcanza la función su máximo absoluto?
c) Estudia la concavidad y la convexidad de f.

a) La recta tangente en $x = 1$ viene dada por la ecuación $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$

Nos dan $f(1) = 3$, y de la gráfica de la función $f'(x)$ observamos que $f'(1) = 1$, por tanto la recta tangente pedida es:

$$y - 3 = 1\cdot(x-1) \quad\Rightarrow\quad y = x + 2$$

b) Para estudiar la monotonía estudiamos el signo de $f'(x)$

De la gráfica observamos que $f'(x) \geq 0$ en [0, 4] y por tanto la función siempre es creciente en (0, 4), luego no tiene ni máximos ni mínimos relativos en (0, 4).

De la gráfica observamos que $f'(x)$ es continua por tanto $f(x)$ es continua puesto que es derivable.

Aplicando el Teorema de Weierstrass como $f(x)$ es continua en el cerrado [0, 4], $f(x)$ alcanza su máximo y su mínimo absoluto en [0, 4].

Los extremos absolutos se suelen alcanzar en las soluciones de $f'(x) = 0$, en este caso $x = 3$ (obsérvese la gráfica de $f'(x)$), los puntos donde no es continua ni derivable (no los hay) y en los extremos del intervalo, en nuestro caso $x = 0$ y $x = 4$.

Como antes hemos visto que la función siempre es creciente, el máximo absoluto lo tiene que alcanzar en $x = 4$.

c) Como $f'(x)$ es creciente en (0, 1), y es derivable, tenemos que $f''(x) > 0$ en (0, 1), luego $f(x)$ es convexa ($\cup$) en (0, 1).

Como $f'(x)$ es decreciente en (1, 3), y es derivable, tenemos que $f''(x) < 0$ en (0, 1), luego $f(x)$ es cóncava ($\cap$) en (1, 3).

Como $f'(x)$ es creciente en (3, 4), y es derivable, tenemos que $f''(x) > 0$ en (3, 4), luego $f(x)$ es convexa ($\cup$) en (3, 4).

Por definición los puntos $x = 1$ y $x = 3$ son puntos de inflexión.

Considera la función f : $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ definida en la forma $f(x) = 1 + x\cdot|x|$.

a) Hallar la derivada de $f(x)$.
b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Escribamos $f(x)$ como un función definida a trozos:

$$f(x) = 1 + x\cdot|x| = \begin{cases} 1+x\cdot x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1+x\cdot(-x) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1+x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

a) La derivada de f, salvo en el cero es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x > 0 \\ -2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Tenemos que ver si existe $f'(0)$ para lo cual ha de cumplirse que:

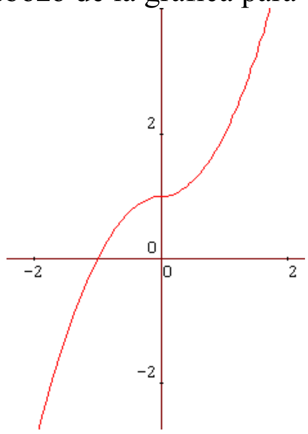
$$f'(0^+) = f'(0^-)$$

$f'(0^+) = \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 2x = 0$ y $f'(0^-) = \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (-2x) = 0$

Por tanto como $f'(0^+) = f'(0^-) = 0$, existe $f'(0) = 0$, y la función derivada será

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

b) Si $x > 0$, $f'(x) = 2x > 0$, luego $f(x)$ siempre es creciente para $x > 0$.
Si $x < 0$, $f'(x) = -2x > 0$, luego $f(x)$ siempre es creciente para $x < 0$.
Por tanto la función siempre es creciente.
Aunque no lo piden es útil hacer un esbozo de la gráfica para comprobar lo anterior:



Dada la función $f : [1, e] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x} + \text{Ln } x$ (donde Ln x es el logaritmo neperiano de x), determinar cuál de las rectas tangentes a la gráfica de f tiene la máxima pendiente.

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto viene dada por el valor de la derivada de la función en dicho punto. Así pues, la pendiente de la recta tangente a la función $f(x) = \frac{1}{x} + \text{Ln } x$ vendrá dada por:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \text{Ln } x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x}{x^2}$$

Calculemos dónde esta función $f'(x)$ presenta un máximo. Para ello, estudiemos su derivada $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (-1+x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{-x+2}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Por tanto el punto singular es $x = 2$. Comprobemos en la 3ª derivada que efectivamente es máximo, y después calcularemos la recta tangente en $x = 2$ que es la de la máxima pendiente.

$$f'''(x) = \frac{(-1) \cdot x^3 - (-x+2) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{2x^3 - 6x^2}{x^6} = \frac{2x-6}{x^4}$$

$f'''(2) = \frac{2 \cdot 2 - 6}{16} = \frac{-2}{16} = \frac{-1}{8} < 0$, luego en $x = 2$ hay un máximo.

La recta tangente cuya pendiente es máxima viene dada por:

$$y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2)$$

Como $f(2) = \frac{1}{2} + \text{Ln}\,2$, y $f'(2) = \frac{1}{4}$ resulta que la recta tangente es:

$$y - \left(\frac{1}{2} + \text{Ln}\,2\right) = \frac{1}{4} \cdot (x - 2)$$

Estudia los intervalos de monotonía y los extremos de la función $f(x) = \frac{\text{Ln}\,x}{x}$.

Lo primero que debemos tener en cuenta es que el dominio de definición de esta función es:

$$Dom\, f(x) = \mathbb{R} - (-\infty, 0] = (0, +\infty).$$

Calculemos la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \text{Ln}\,x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \text{Ln}\,x}{x^2}$$

Calculemos ahora los puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{1 - \text{Ln}\,x}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \text{Ln}\,x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\,x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$$

Calculemos la derivada segunda:

$$f''(x) = \frac{\frac{-1}{x} \cdot x^2 - (1 - \text{Ln}\,x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x \cdot \text{Ln}\,x - 3x}{x^4} = \frac{2\text{Ln}\,x - 3}{x^3}$$

$f''(e) = \frac{2\text{Ln}\,e - 3}{e^3} = \frac{-1}{e^3} < 0$, y por tanto en $(e, 1/e)$ hay un máximo relativo.

Veamos ahora la monotonía, para lo cual debemos estudiar el signo de la derivada primera. El denominador de la misma siempre es positivo y por tanto el signo de la derivada primera depende del signo del numerador:

$$1 - \text{Ln}\,x > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\,x < 1 \quad \Rightarrow \quad x < e$$

Si $x > e$, entonces $f'(x) < 0$ y la función es decreciente en $(e, +\infty)$.

Si $x < e$, entonces $f'(x) > 0$ y la función es creciente en $(0, e)$.

Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos de $f(x) = x^2 - 2\,|\,x\,| + 2$.

Como en la función $f(x)$ aparece el valor absoluto, es conveniente escribirla como una función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & si \quad x < 0 \\ x^2 - 2x + 2 & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Dicha función es derivable en R, salvo quizás en $x = 0$. Veamos si es derivable en dicho punto:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad f'(0^-) = 2 \qquad f'(0^+) = -2$$

Por tanto, la función no es derivable en $x = 0$.

Estudiemos la monotonía. Comencemos con el tramo $x < 0$.

$$2x + 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > -2 \quad \Rightarrow \quad x > -1$$

Así, si $x \in (-\infty, -1)$ la función es decreciente.

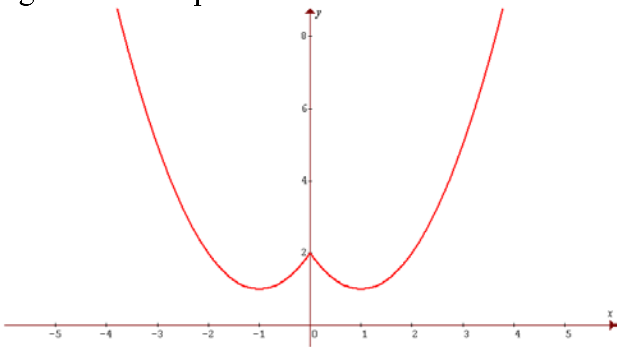
Si $x \in (-1, 0)$ la función es creciente.

Sigamos con el otro tramo ($x > 0$):

$$2x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 2 \quad \Rightarrow \quad x > 1$$

Así, si $x \in (0, 1)$ la función es decreciente.

Si $x \in (1, +\infty)$ la función es creciente.
Estudiemos los extremos locales. Comenzando con el tramo $x < 0$, se tiene que $f'(x) = 0$ si $x = -1$. Como a la izquierda de $x = -1$ la función es decreciente, y a la derecha es creciente, se llega a la conclusión de que en dicho punto hay un mínimo local. Mínimo: $(-1, 1)$.
En el tramo $x > 0$, $f'(x) = 0$ si $x = 1$. Como a la izquierda de dicho punto la función es decreciente y a la derecha es creciente, se llega a la conclusión de que en dicho punto hay un máximo local. Mínimo: $(1, 1)$.
También debemos estudiar el punto $x = 0$ en el que la función no es derivable. A su izquierda la función es creciente y a su derecha decreciente. Por tanto, en dicho punto hay un máximo local. Máximo: $(0, 2)$.
De igual modo, se pude observar que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 2x + 2) = +\infty$, que será el máximo absoluto. También se observa que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x + 2) = +\infty$**,** y por tanto se deduce que el mínimo absoluto coincide con los mínimos locales.
Aunque no nos la piden, la gráfica correspondiente a esta función es:



Estudia la concavidad de la función $f(x) = e^{-x}(x^2 + 4x + 3)$.
La concavidad de una función se puede estudiar a través de la derivada segunda.

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2 + 4x + 3) + e^{-x}(2x + 4) = -e^{-x}(x^2 + 2x - 1)$$

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 + 2x - 1) - e^{-x}(2x + 2) = e^{-x}(x^2 - 3)$$

Veamos donde se anula la derivada segunda (teniendo en cuenta que e^{-x} nunca se anula):

$$e^{-x}(x^2 - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Si $x < -\sqrt{3}$ entonces $f''(x) > 0$ y por tanto f es cóncava hacia las y positivas.
Si $-\sqrt{3} < x < +\sqrt{3}$ entonces $f''(x) < 0$ y por tanto f es cóncava hacia las y negativas.
Si $x > +\sqrt{3}$ entonces $f''(x) > 0$ y por tanto f es cóncava hacia las y positivas.

Un objeto se lanza verticalmente hacia arriba desde un determinado punto. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por

$$h(t) = 5 - 5t - 5e^{-2t}$$

- **a) Calcula el tiempo transcurrido hasta alcanzar la altura máxima y el valor de esta.**
- **b) Teniendo en cuenta que la velocidad es $v(t) = h'(t)$, halla la velocidad al cabo de 2 segundos.**

a) El máximo se obtiene en el punto solución de la ecuación $h'(t) = 0$:

$$h'(t) = -5 - 5e^{-2t}(-2) = -5 + 10e^{-2t}$$

$$h'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -5 + 10e^{-2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{-2t} = 1/2 \quad \Rightarrow \quad -2t = \mathrm{Ln}(1/2) \quad \Rightarrow \quad t = \mathrm{Ln}(\sqrt{2})$$

Sustituyendo se obtiene:

$$h(\mathrm{Ln}(\sqrt{2})) = 5 - 5\,\mathrm{Ln}(\sqrt{2}) - 5e^{-2\mathrm{Ln}(\sqrt{2})} = 5 - 5\,\mathrm{Ln}(\sqrt{2}) - \frac{5}{(\sqrt{2})^2} \approx 0'767 \text{ m.}$$

b) $v\,(t) = h\,'\,(t) = -5 + 10e^{-2t}$. Sustituyendo $t = 2$ obtenemos:

$$v\,(2) = -5 + 10e^{-4} \approx -4'9999 \text{ m/s}^2$$

La altura del triángulo equilátero crece a una velocidad de 1 cm/s. Encuentra la velocidad de crecimiento del área y del lado cuando la altura vale 3 $\sqrt{3}$ cm.

La relación entre la altura, h, de un triángulo equilátero y su lado, l, se establece aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,l \qquad \Leftrightarrow \qquad l = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,h$$

Conocemos la velocidad de crecimiento de la altura, es decir, $h\,'$ (t) = 1 cm/s y debemos hallar $l\,'$ (t) y A' (t), crecimiento del lado y el área respectivamente.

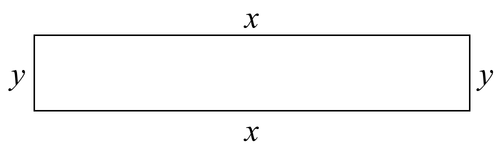
Por tanto:

De $l = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,h$ se deduce que $l'(\text{t}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\,h\,'(\text{t}) \;\Rightarrow\; l'(\text{t}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\cdot 1 \;\Rightarrow\; l'(\text{t}) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm/s

De $A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\,h^2$ se deduce que $A'(\text{t}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\cdot h\cdot h\,' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\cdot h\cdot 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt{3} \;\Rightarrow\; A'$ (t) = 6 cm^2/s

Por tanto, el lado crece a una velocidad de $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ cm/s y el área a 6 cm^2/s.

Se dispone de 288.000 pts. Para vallar un terreno rectangular colindante con un camino recto. Si el precio de la valla que ha de ponerse en el lado del camino es de 800 pts/metro y el de la valla de los restantes lados es de 100 pts/metro, ¿cuáles son las dimensiones y el área del terreno rectangular de área máxima que se puede vallar?



Como nos piden que el área sea máxima, la función a maximizar es:

$$A = x \cdot y$$

Para relacionar las dos variables (x e y) usamos la relación:

$$x \cdot 800 + (y + y + x) \cdot 100 = 288000$$

obtenida a partir de los otros datos que aparecen en el enunciado del problema, para el coste de la valla. Operando y simplificando resulta:

$$9x + 2y = 288 \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{288 - 9x}{2}$$

y la función a maximizar es

$$A\,(x) = x \cdot \left(\frac{288 - 9x}{2}\right) = \frac{1}{2}(288x - 9x^2)$$

Derivando:

$$A'(x) = 1/2(288 - 18x) = 144 - 9x$$

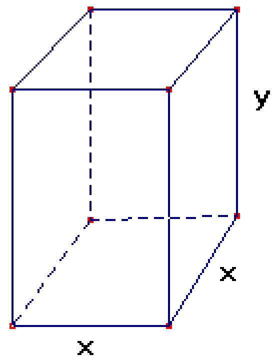
$$A'(x) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 144 - 9x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 16$$

Como $A''(x) = -9 < 0$, el punto singular obtenido es un máximo. Entonces:

$$y = \frac{288 - 9\cdot 16}{2} = 72$$

Por tanto es un rectángulo de lados x = 16 m. e y = 72 m. Su área (máxima) será *Área* = 1152 m^2.

Se desea construir una caja de base cuadrada con una capacidad de 80 cm^3. Para la tapa y la superficie lateral se usa un material que cuesta 1 €/cm^2 y para la base se emplea un material un 50% más caro. Halla las dimensiones de la caja para que su coste sea mínimo.



Capacidad = Volumen = $x^2 \cdot y = 80$ cm^3
Superficie lateral + tapa = $4xy + x^2$
Superficie base = x^2
Coste superficie lateral y tapa = 1 € /cm^2
Coste superficie base = $1 + \frac{50}{100} = \frac{3}{2}$ € /cm^2

Coste total = $(x^2 + 4xy) \cdot 1 + x^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2}x^2 + 4xy$

La relación entre las variables viene dada por $x^2 \cdot y = 80$ de donde $y = \frac{80}{x^2}$.

Sustituyendo en el coste total:

Coste total = $\frac{5}{2}x^2 + 4xy = \frac{5}{2}x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2} = \frac{5}{2}x^2 + \frac{320}{x} = C(x)$

Le aplicamos la técnica de máximos y mínimos:

$$C'(x) = 5x - \frac{320}{x^2}$$

$$C'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x - \frac{320}{x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x^3 = 320 \quad \Rightarrow \quad x^3 = 64 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Veamos que es un mínimo con la 2ª derivada

$C''(x) = 5 + \frac{640}{x^3}$, de donde $C''(4) = 5 + \frac{640}{64} = 15 > 0$, luego es un mínimo.

Las dimensiones de la caja para un coste mínimo son $x = 4$ cm e $y = \frac{80}{4^2} = 5$ cm.

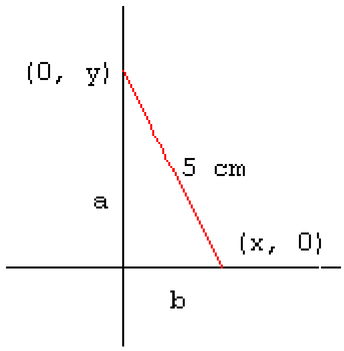
Un segmento de longitud 5 cm apoya sus extremos en los semiejes positivos OX y OY, de manera que forma con estos un triángulo rectángulo. Halla las dimensiones del triángulo de área máxima así construido.

Hagamos un esquema representativo de la situación (figura de la derecha). La función que tenemos que maximizar es el área del triángulo, esto es:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{x \cdot y}{2}$$

Debemos relacionar las variables x e y, lo cual podemos hacer mediante el teorema de Pitágoras:

$$5^2 = x^2 + y^2$$



De aquí deducimos que $y = \sqrt{25 - x^2}$ y por tanto la función a maximizar, expresada en función de una sola variable es:

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}{2}$$

Para calcular los extremos de esta función, calculemos la derivada primera:

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{25 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}}\right) = \frac{(25 - x^2) - x^2}{2\sqrt{25 - x^2}} = \frac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}}$$

Para calcular los puntos singulares hacemos $A'(x) = 0$, de donde $\frac{25 - 2x^2}{2\sqrt{25 - x^2}} = 0$ y por tanto, $x = \pm\sqrt{\frac{25}{2}}$. Como nos dicen que el segmento toca a la parte positiva del eje OX, la solución negativa se desecha.

Calculemos $A''(x)$;

$$A''(x) = \frac{(-4x) \cdot (2\sqrt{25 - x^2}) - (25 - 2x^2) \cdot \left(\frac{-2x}{\sqrt{25 - x^2}}\right)}{4 \cdot (25 - x^2)} =$$

$$= \frac{(-8x) \cdot (25 - x^2) - (25 - 2x^2) \cdot (-2x)}{4 \cdot (25 - x^2) \cdot \sqrt{25 - x^2}} = \frac{2x^3 - 75x}{2 \cdot (25 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$A''\left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right) < 0$, y por tanto hay un máximo.

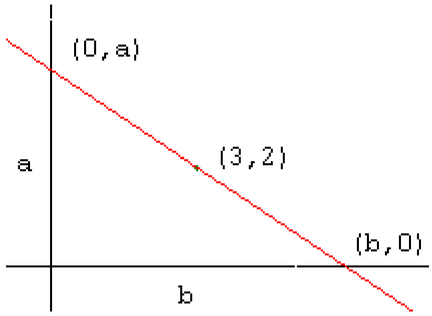
Así las dimensiones del triángulo son:

$$b = x = \sqrt{\frac{25}{2}} \text{ cm} \qquad a = y = \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - \left(\sqrt{\frac{25}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{2}} \text{ cm}$$

Por tanto, el área máxima es: $A_{máx} = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{x \cdot y}{2} = \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \cdot \sqrt{\frac{25}{2}}}{2} = \frac{25}{4} \text{ cm}^2$

Halla la ecuación de una recta que pase por el punto (3, 2) y corte los ejes coordenados determinando en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

Hagamos un esquema representativo de la situación (figura de la derecha). La función que tenemos que maximizar es el área del triángulo, esto es:



$$A = \frac{b \cdot a}{2}$$

Debemos relacionar las variables a y b. Para ello, calculemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(b, 0)$ y $(0, a)$. Dicha recta tiene por ecuación:

$$y = \frac{-a}{b}x + a$$

Esta recta pasa (pues así lo impone el enunciado) por el punto (3, 2) y por tanto se tiene que:

$$2 = \frac{-a}{b}3 + a \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{3a}{a - 2}$$

Por tanto la función a maximizar será:

$$A = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{\left(\frac{3a}{a-2}\right) \cdot a}{2} = \frac{3a^2}{2a-4}$$

Calculemos los puntos singulares:

$$A' = \frac{6a \cdot (2a-4) - 3a^2 \cdot 2}{(2a-4)^2} = \frac{6a^2 - 24a}{(2a-4)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6a^2 - 24a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0 \ \text{ y } \ a = 4$$

La solución $a = 0$ se desecha pues no habría triángulo.

$$A'' = \frac{(12a-24) \cdot (2a-4)^2 - (6a^2 - 24a) \cdot 2 \cdot (2a-4) \cdot 2}{(2a-4)^4} = \frac{96}{(2a-4)^3}$$

$A''(4) > 0$, y por tanto hay un mínimo. Esto quiere decir, que el mínimo se encuentra para $a = 4$ y $b = 6$. La ecuación de la recta buscada es por tanto:

$$y = \frac{-4}{6}x + 4 \qquad \text{o} \qquad y = \frac{-2}{3}x + 4$$

Halla los puntos de la curva $y^2 = 8x$ cuya distancia al punto (6, 0) sea mínima.

Consideremos un punto genérico $P = (x, y)$ de la curva $y^2 = 8x$. La distancia desde este punto al punto dado $Q = (0, 6)$ viene dada por (función a minimizar):

$$d(P, Q) = \sqrt{x^2 + (y-6)^2}$$

Podemos expresar esta distancia mediante una sola variable. Para ello hacemos $x = \frac{y^2}{8}$. Sustituyendo queda:

$$d(P, Q) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{8}\right)^2 + (y-6)^2} = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{y^4 + 64y^2 - 768y + 2304}$$

Maximizar una raíz cuadrada, equivale a maximizar su radicando. Por tanto, procedamos a maximizar este, en lugar de la función completa. Calculemos los puntos singulares a través de la derivada primera:

$$4y^3 + 128y - 768$$

Igualándola a cero, se obtiene que $y = 4$ es la única solución real de esta ecuación. Para comprobar si es un máximo, calculemos la derivada segunda:

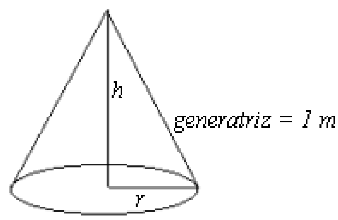
$$12y^2 + 128$$

Haciendo $y = 4$ en ella, se obtiene que esta toma un valor positivo, y por tanto hay un mínimo. Ese mínimo se alcanza para $y = 4$ y $x = \frac{y^2}{8} = \frac{16}{8} = 2$. El punto buscado es $P = (2, 4)$.

¿Cuál es el volumen máximo que puede tener un cono circular recto de 1 metro de generatriz? (Recuerda que el volumen de un cono es un tercio del área de la base por la altura).

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Para expresar la función a maximizar mediante una sola variable, utilizamos el teorema de Pitágoras:



$$1^2 = r^2 + h^2 \qquad \Rightarrow \qquad h = \sqrt{1 - r^2} \qquad \Rightarrow \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{1 - r^2}$$

Calculemos los puntos singulares:

$$V' = \frac{1}{3}\pi\left[2r\sqrt{1-r^2} + r^2 \cdot \frac{-2r}{2\sqrt{1-r^2}}\right] = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{2r\cdot(1-r^2)-r^3}{\sqrt{1-r^2}}\right] = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{2r-3r^3}{\sqrt{1-r^2}}\right]$$

Haciendo $V' = 0$, se llega a que $2r - 3r^3 = 0$ o lo que es lo mismo $r = 0$ y $r = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Las soluciones $r = 0$ y $r = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ se desechan, pues el radio del cono no puede ser ni nulo ni negativo.

Veamos que pasa con la otra solución:

$$V'' = \frac{1}{3}\pi\left[\frac{(2-9r^2)\cdot\sqrt{1-r^2} - (2r-3r^3)\cdot\frac{-2r}{2\sqrt{1-r^2}}}{\left(\sqrt{1-r^2}\right)^2} = \frac{(2-9r^2)\cdot(1-r^2) + r\cdot(2r-3r^3)}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}\right] =$$

$$= \frac{6r^4 - 9r^2 + 2}{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$V''\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) < 0$, y por tanto se presenta un máximo. Las dimensiones del cono de volumen máximo y generatriz 1 m son:

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}}\ \text{m} \qquad\qquad h = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\ \text{m}$$