CONTINUIDAD Y DERIVABILIDAD

EJERCICIOS RESUELTOS

Si la función f está definida mediante $f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax + b & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$, calcula a y b para que sea continua.

La función es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, pues en ente conjunto la función es polinómica. Estudiamos la continuidad en $x = 0$:

$f(0) = 0^3 - 0 = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^3 - x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (ax + b) = b$

La función es continua por la izquierda en $x = 0$. Para que sea continua por la derecha, ha de cumplir que $b = 0$ y a cualquier número real. Por tanto, para estos valores la función dada es continua en $\mathbb{R}$ y quedaría definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x & \text{si} \quad x \le 0 \\ ax & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Demuestra que la función $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad -1 \le x \le 0 \\ -x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}$ es discontinua en $x = 0$. ¿Qué tipo de discontinuidad presenta en los puntos de abscisas $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$?

Veamos si es discontinua en $x = 0$:

$f(0) = 0 + 1 = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x + 1) = 0 + 1 = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x) = 0$

Como $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$, no existe el límite en cuando x tiende a cero, y por tanto f es discontinua en $x = 0$.

En $x = -1$, la función es continua por la derecha. Podría decirse que presenta una discontinuidad no evitable de segunda especie al no tener límite lateral por la izquierda.

En $x = 0$, la función es discontinua no evitable de primera especie con salto finito, de valor 1, por existir los límites laterales y ser finitos, pero distintos.

En $x = 1$, la función es continua por la izquierda. Podría decirse que presenta una discontinuidad no evitable de segunda especie al carecer de límite lateral por la derecha.

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax + 12}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$, ¿para qué valor de a?

Por la definición de discontinuidad evitable, la función no ha de estar definida en $x = -2$, y por tanto ese valor ha de ser una raíz del denominador. Por tanto:

$$(-2)^3 + (-2)^2 + a \cdot (-2) + 12 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 4.$$

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + n}{x^3 - mx^2 - 14x}$ posee una discontinuidad evitable en $x = 2$ para ciertos valores de m y n. Hállalos razonadamente y analiza el resto de discontinuidades que puedan aparecer en la función.

Pensemos qué significa que la función tenga una discontinuidad evitable en $x = 2$. Por la definición de discontinuidad evitable, la función no ha de estar definida en $x = 2$, y por tanto ese valor ha de ser una raíz del denominador. Por tanto:

$$2^3 + m \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad m = 5.$$

De igual modo, por la propia definición de discontinuidad evitable, el límite sí existe. Estudiemos por tanto el límite de la función en el citado punto, $x = 2$. Obtenemos:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x + n}{x^3 + 5x^2 - 14x} = \frac{n}{0}$$

Como el límite sí existe, la única posibilidad que se puede dar es que $n = 0$. Por tanto, para estos valores de m y n la función es:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 5x^2 - 14x} = \frac{x(x-2)}{x(x-2)(x+7)}$$

Esta función presenta discontinuidades evitables en $x = 0$ y en $x = 2$. Además presenta una discontinuidad no evitable de primera especie con salto infinito en $x = -7$.

Se sabe que la función f: $(-1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + a}{x + 1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $(-1, +\infty)$. Halla el valor de a. ¿Es f derivable en $x = 0$?

Como nos dicen que es continua en su dominio, en particular, es continua en $x = 0$, es decir:

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

$$f(0) = a \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + a}{x + 1} = a \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2 - 4x + 3) = 3$$

Por tanto $a = 3$, y nuestra función es $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 3}{x + 1} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$

La función es derivable en su dominio, salvo quizás en el cero, por ser cada uno de sus trozos derivables en aquellos puntos donde están definidos. Su derivada, salvo en el cero es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Para que exista $f'(0)$, ha de ser $f'(0^+) = f'(0^-)$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = -3 \qquad f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - 4) = -4$$

Como $f'(0^+) \neq f'(0^-)$, no existe $f'(0)$

Sea la función $f(x) = x \cdot |x|$. Estudia su derivabilidad en $x = 0$.

Al ser una función en la que aparece el valor absoluto, es conveniente expresarla como una función definida a trozos. Esta quedará expresada de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

La función es continua en $x = 0$ como puede verse fácilmente. La derivada de esta función, salvo para $x = 0$, viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

Veamos la derivabilidad en $x = 0$:

$$f'(0^+) = 0 \qquad\qquad f'(0^-) = 0$$

Al ser iguales las derivadas laterales, es derivable en $x = 0$. Su función derivada es por tanto:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

a) Estudia para qué valores de a las funciones $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x \leq a \\ 2ax-2a+1 & si \quad x > a \end{cases}$ son continuas.

b) En estos casos, dibuja las gráficas de las funciones obtenidas.

c) ¿En algún caso f es derivable en a?

a) Comencemos recordando la definición de función continua en un punto:

$$f(x) \text{ es continua en } x = a \text{ si y solo si } f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Para que la función sea continua en a, ha de existir el límite, y por tanto los límites laterales han de existir y coincidir. Por tanto:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (x^2+1) = a^2+1 \qquad\qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} (2ax-2a+1) = 2a^2-2a+1$$

Por tanto, se ha de cumplir que: $\quad a^2 + 1 = 2a^2 - 2a + 1$

Resolvamos esta ecuación y calculemos así los valores de a para los que existe el límite:

$$a^2 - 2a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a \cdot (a-2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 0 \quad \text{o} \quad a = 2$$

Veamos que efectivamente para esos valores de a la función es continua:

Si $a = 0$

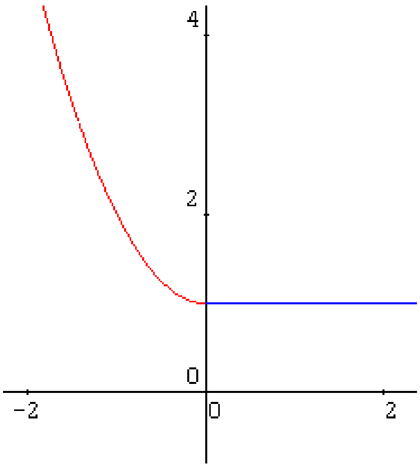
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x^2+1) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \qquad f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

Si $a = 2$

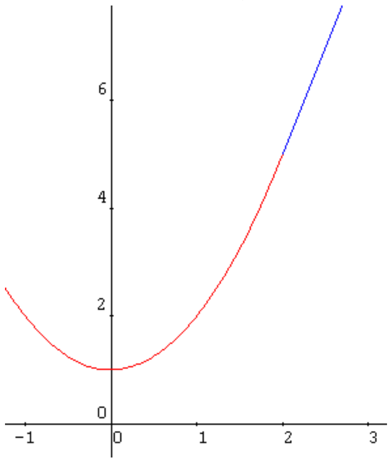
$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2+1) = 5 \qquad \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (4x-3) = 5 \qquad f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

b) Dibujemos las gráficas que se obtienen:

Si $a = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x \leq 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$



Si $a = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1 & si \quad x \leq 2 \\ 4x-3 & si \quad x > 2 \end{cases}$



c) Si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto (¡Ojo!, el recíproco no es cierto). Por tanto, si f es derivable en algún punto a, sólo lo podrá serlo para $a = 0$ o en $a = 2$ que es donde es continua. Veamos si es derivable para esos valores de a.

Si $a = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(0^-) = 0 \quad \text{y} \quad f'(0^+) = 0$

Por tanto, sí es derivable si $a = 0$.

Si $a = 2$ $\Rightarrow$ $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \le 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $f'(2^-) = 4$ y $f'(2^+) = 4$

Por tanto, sí es derivable si $a = 2$.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x \cdot (Ln\, x)^2}{(x-1)^2}$

a) Determina su dominio.

b) Se podría asignar a $f(x)$ algún valor en los puntos de discontinuidad para que f sea continua en $(0, +\infty)$.

a) Por ser f una función fraccionaria racional no está definida en los ceros del denominador:

$$(x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

y tampoco f está definida en $(-\infty, 0]$ pues los valores que toma el argumento de un logaritmo han de ser siempre positivos. Por tanto, el dominio de definición de la función es:

$$Dom\, f = (0, +\infty) - \{ 1 \}$$

b) Para estudiar la continuidad en $x = 1$, es necesario calcular el límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x \cdot (Ln\, x)^2}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \to 1} \frac{(Ln\, x)^2 + 2Ln\, x}{2 \cdot (x-1)} = \frac{0}{0} \xrightarrow{L'Hopital} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{2 \cdot Ln\, x}{x} + \frac{2}{x}}{2} = 1$$

Por tanto, para que la función sea continua en $x = 1$, se asigna a el valor $f(1) = 1$. De esta forma $f(x)$ es continua en $(0, +\infty)$.

Considera la función $f: (-\infty, 10) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \end{cases}$$

a) Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).

b) Esboza la gráfica de f.

c) Estudia la derivabilidad de f.

a) Escribamos $f(x)$ de otra manera:

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2 \le x < 10 \end{cases} = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x+5 & \text{si} \quad 2 \le x < 5 \\ x-5 & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \end{cases}$$

Como es continua, lo será en particular en $x = 2$, y por tanto ha de cumplirse que:

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$$

$$f(2) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x+5) = 3 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6$$

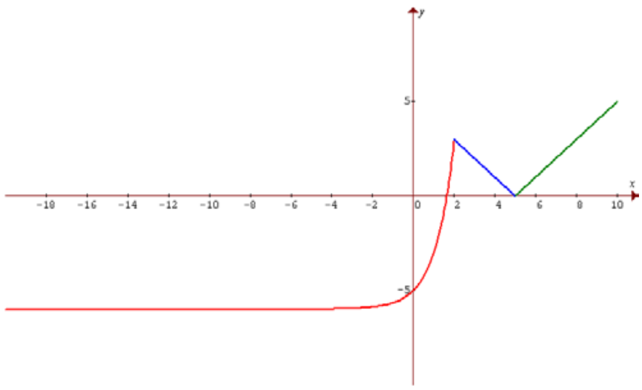
Por tanto $a^2 - 6 = 3$; de donde $a^2 = 9$ y $a = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.

Como a es la base de una función exponencial tiene que ser positiva, luego $a = 3$.

b) La gráfica de $3^x - 6$ es como la de la exponencial 3^x pero desplazada 6 unidades hacia abajo a lo largo del eje de ordenadas. Como $\lim_{x \to -\infty} (3^x - 6) = -6$, tiene una asíntota horizontal $y = -6$ en $-\infty$.

Para $x = 0$ vale -5 y para $x \to 2^-$ vale 3.

Además $(x - 5)$ y $(-x + 5)$ son rectas. La gráfica de la función pedida es:



c) A simplemente se ve que no va a ser derivable en $x = 2$ y $x = 5$, puesto que son puntos angulosos. Veámoslo:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 6 & \text{si} \quad x < 2 \\ -x + 5 & \text{si} \quad 2 \le x < 5 \\ x - 5 & \text{si} \quad 5 \le x < 10 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 3^x \cdot \text{Ln}\, 3 & \text{si} \quad x < 2 \\ -1 & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 < x < 10 \end{cases}$$

Veamos la derivada en $x = 2$:

$$f'(2^-) = \lim_{x \to 2^-} f'(x) = \lim_{x \to 2^-} (3^x \cdot \text{Ln}3) = 9 \cdot \text{Ln}\, 3 \quad ; \quad f'(2^+) = \lim_{x \to 2^+} f'(x) = \lim_{x \to 2^+} (-1) = -1$$

Como $f'(2^-) \ne f'(2^+)$, no existe $f'(2)$.

Veamos la derivada en $x = 5$:

$$f'(5^-) = \lim_{x \to 5^-} f'(x) = \lim_{x \to 5^-} (-1) = -1 \quad ; \quad f'(5^+) = \lim_{x \to 5^+} f'(x) = \lim_{x \to 5^+} 1 = 1$$

Como $f'(5^-) \ne f'(5^+)$, no existe $f'(5)$.

Estudia la derivabilidad de la función $f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 + x^2} - x & \text{si} \quad 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{4} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcula su derivada.

Se tiene que $3 + x^2$ siempre es positivo luego $\sqrt{3 + x^2}$ siempre tiene sentido y la podemos derivar en (0, 1). Por tanto $\sqrt{3 + x^2} - x$ es derivable en (0, 1)

$1/x$ no existe para $x = 0$, pero podemos derivarla en el trozo en que está definida $(1, +\infty)$. Por tanto $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x^2}{4}$ es derivable en $(1, +\infty)$.

Nos faltaría pues estudiar la derivada en $x = 1$.

Si $f(x)$ es derivable en $x = 1$, $f(x)$ es continua en $x = 1$ pero para ello tiene que cumplirse que:

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$f(1) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(\sqrt{3 + x^2} - x\right) = 2 - 1 = 1 \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x} + \frac{x^2}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Como la función no es continua en $x = 1$, entonces tampoco es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $(0, +\infty) - \{1\}$

La derivada de $f(x)$, en $(0, +\infty) - \{1\}$ es $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{3 + x^2}} - 1 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{x}{2} & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

Estudia la derivabilidad de la función f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si} \quad x \neq -1 \text{ o } x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

Hay que estudiar la derivabilidad en $x = 1$, $x = -1$ y $x = 0$ porque sabemos que $|x|$ no es derivable en $x = 0$.

Utilizaremos que si una función es derivable en un punto tiene que ser continua en dicho punto.

$$f(x) \text{ es continua en } x = a \text{ si y solo si } f(a) = \underset{x\to a}{Lim} f(x)$$

$$f(-1) = 0 \qquad ; \qquad f(1) = 0$$

Como $\underset{x\to 1^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to 1^+}{Lim} \dfrac{x}{1-|x|} = \dfrac{1^+}{1-|1^+|} = \dfrac{1^+}{0^-} = -\infty$, luego en $x = 1$ la función no es continua y por tanto no es derivable en $x = 1$.

Como $\underset{x\to -1^+}{Lim} f(x) = \underset{x\to -1^+}{Lim} \dfrac{x}{1-|x|} = \dfrac{-1^+}{1-|-1^+|} = \dfrac{-1^+}{0^+} = -\infty$, luego en $x = -1$ la función no es continua y por tanto no es derivable en $x = -1$.

Por otra parte, tenemos que:

$$f(0) = \frac{0}{1-|0|} = \frac{0}{1} = 0 \qquad\qquad \underset{x\to 0}{Lim} f(x) = \underset{x\to 0}{Lim} \frac{x}{1-|x|} = \frac{0}{1-|0|} = \frac{0}{1} = 0$$

Como $f(0) = \underset{x\to 0}{Lim} f(x) = 0$, $f(x)$ es continua en $x = 0$.

Veamos la derivabilidad en $x = 0$, es decir si $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \underset{h\to 0^-}{Lim} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0^-}{Lim} \frac{f(h)}{h} = \underset{h\to 0^-}{Lim} \frac{\frac{h}{1-|h|}}{h} = \underset{h\to 0^-}{Lim} \frac{1}{1-|h|} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f'(0^+) = \underset{h\to 0^+}{Lim} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \underset{h\to 0^+}{Lim} \frac{f(h)}{h} = \underset{h\to 0^+}{Lim} \frac{\frac{h}{1-|h|}}{h} = \underset{h\to 0^+}{Lim} \frac{1}{1-|h|} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $f'(0^-) = f'(0^+) = 1$, existe $f'(0) = 1$. Luego $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Aunque no la piden vamos a calcular la derivada de $f(x)$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-|x|} & \text{si} \quad x \neq -1 \text{ o } x \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x} & \text{si} \quad x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{x}{1+x} & \text{si} \quad x < 0 \text{ y } x \neq -1 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \text{ o } x = 1 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{si} \quad x > 0 \text{ y } x \neq 1 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \text{si} \quad x < 0 \text{ y } x \neq -1 \end{cases}$$