

EXAMEN LÍMITES DE FUNCIONES

1. Sea la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x}$$

Determina:

- a) Asíntota horizontal. (0,5 puntos)
- b) Asíntotas verticales. (0,5 puntos)
- c) Posición de la gráfica respecto a las asíntota horizontal.(1 punto)
- d) Continuidad de la función en los puntos que anulan el denominador. Indica el tipo de discontinuidad.(1,5 puntos)
- e) Representa la función.(1 punto)

2.- Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ (1 punto)

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 5}{2x - 6} \right)^{\frac{x^2 - 2}{x + 1}}$ (1 punto)

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$ (1 punto)

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - 2x$ (1 punto)

3.- Determina las asíntotas de la siguiente función:

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$ (1,5 puntos)

1. Sea la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 2x}$$

Determina:

a) Asíntota horizontal. (0,5 puntos)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

En $y = 1$ encontramos una asíntota horizontal.

b) Asíntotas verticales. (0,5 puntos)

Son candidatos a asíntota vertical los puntos que anulan el denominador en funciones racionales. Veamos los candidatos:

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x(x - 2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

Los candidatos a A.V. son $x = 0$ y $x = 2$. Veamos si son A.V.:

$x=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - 2} = \frac{0}{-2} = 0$$

Como no es ∞ $x = 0$ no es A.V.

$x=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \left(\frac{4}{0}\right) = \infty$$

$x=2$ es una A.V.

c) Posición de la gráfica respecto a las asíntota horizontal.(1 punto)

Para ver la posición respecto a la A.H. calculo el resultado de restar la asíntota a la función:

$$f(x) - 1 = \frac{x^2}{x^2 - 2x} - 1 = \frac{x^2}{x^2 - 2x} - \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 2x} = \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x^2 - 2x} = \frac{2x}{x^2 - 2x}$$

Calculo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0^+$$

la función va por arriba cuando $x \rightarrow +\infty$

Hago lo mismo para $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0^-$$

la función va por abajo.

- d) Continuidad de la función en los puntos que anulan el denominador. Indica el tipo de discontinuidad.(1,5 puntos)

Los puntos que anulan el denominador son 0 y 2.

Continuidad en $x=0$

$$\nexists f(0) = \frac{0}{0}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - 2} = \frac{0}{-2} = 0$$

Encontramos una discontinuidad evitable.

Continuidad en $x=2$

$$\nexists f(2) = \frac{4}{0}$$

Por otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \infty$$

Tenemos que estudiar los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x - 2} = +\infty$$

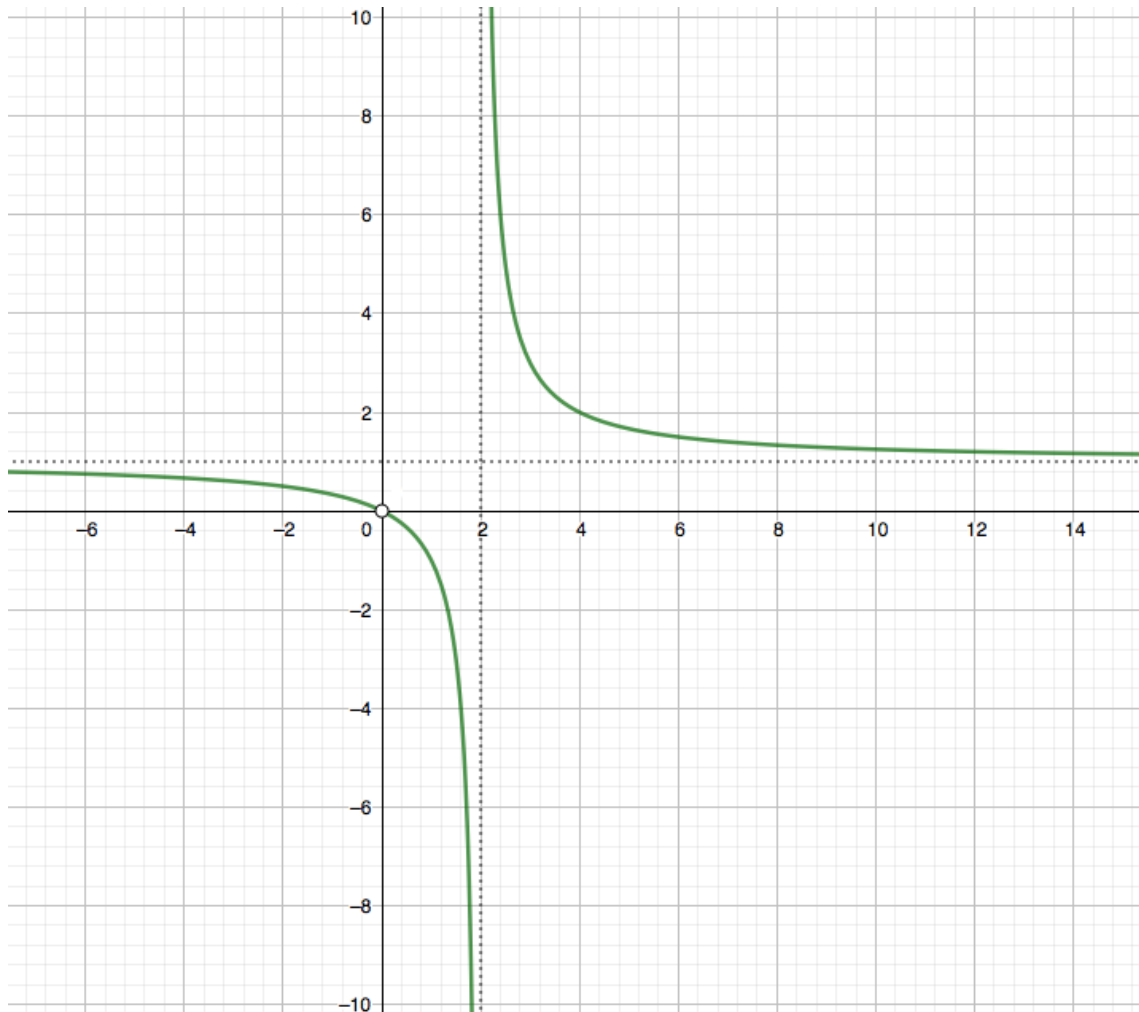
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x - 2} = -\infty$$

Como los límites laterales no coinciden:

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

y como los límites laterales son $\pm\infty$ en $x=2$ la función es discontinua de salto infinito.

e) Representa la función.(1 punto)



2.- Resuelve los siguientes límites: (1 punto cada apartado)

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

para resolverlo factorizamos en el numerador y en el denominador:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 \cdot (x - 3)}{(x - 3) \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x - 2} = 9$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-6} \right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = 1^\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x-6} \right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+5}{2x-6} - 1 \right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+5}{2x-6} - \frac{2x-6}{2x-6} \right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+5-2x+6}{2x-6} \right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{11}{2x-6} \right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} = \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-6}{11}} \right)^{\frac{x^2-2}{x+1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-6}{11}} \right)^{\frac{2x-6}{11} \cdot \frac{x^2-2}{x+1} \cdot \frac{11}{2x-6}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-6}{11}} \right)^{\frac{2x-6}{11} \cdot \frac{x^2-2}{x+1} \cdot \frac{11}{2x-6}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-6}{11}} \right)^{\frac{2x-6}{11}} \right]^{\frac{x^2-2}{x+1} \cdot \frac{11}{2x-6}} = e^{\frac{11}{2}} \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x^2 - 9) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x - 3) \cdot (x + 3) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x + 3) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{6 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{36} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - 2x = \infty - \infty$$

Resuelvo la indeterminación quedándome con el mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} x - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} -x$$

En este caso debo calcular los límites cuando $x \rightarrow \pm\infty$

Veamos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

No coinciden los límites luego $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x} - 2x$

3.- Determina las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1} \quad (1,5 \text{ puntos})$$

A.H.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

luego no existe asíntota horizontal.

A.V.

Son candidatos a asíntota vertical son los puntos que anulan el denominador. En este caso $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x - 1} = \infty$$

Luego en $x = 1$ encontramos una A.V.

A.O.

Existe cuando existe

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = L$$

donde L es un número real.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Luego existe una A.O.

$$\begin{array}{r} \text{La calculo: } x^2 + 0x - 4 \quad \underline{) x - 1} \\ -x^2 + x \quad \quad x - 1 \\ \hline x - 4 \\ -x + 1 \\ \hline -3 \end{array}$$

La A.O. es la recta $y = x - 1$