1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=\dfrac{x-1}{3+x}$; $h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) Calcula los dominios de f, g y h.
b) Calcula la función inversa de g.
c) Calcula $f\circ g$, $g\circ f$, $h\circ f$ y sus dominios

2.- Calcula los siguientes límites (en caso de no existir, explica por qué):

a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{\sqrt{x+4}-3}$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x+1}-\dfrac{x^3-x^2+1}{3x^2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+6}{x-5}}$

3.- Encuentra razonadamente la expresión analítica de una función racional que cumpla:

a) Tiene una discontinuidad evitable en x = 3
b) Tiene asíntotas verticales en x = 1 y x = -1
c) Tiene asíntota horizontal en y = 2
d) Haz una representación gráfica aproximada de dicha función.

4.- Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{x+3} & \text{si } x\le -1\\[2mm] \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si} -1<x<1\\[2mm] mx-2 & \text{si } x\ge 1\end{cases}$$

Estudia su continuidad y halla m para que sea continua en x = 1

5.- Representa gráficamente la función $f(x)=\left|\dfrac{x+3}{x-2}\right|$. Halla su dominio y su recorrido y exprésala como función a trozos.

PUNTUACIÓN: 2 PUNTOS CADA EJERCICIO

SOLUCIONES

1.- Dadas las funciones: $f(x)=\sqrt{x-2}$; $g(x)=\dfrac{x-1}{3+x}$; $h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$

a) dominios de f, g y h.

$f(x)=\sqrt{x-2}\ \rightarrow x-2\geq 0\rightarrow x\geq 2\Rightarrow Dom(f)=[2,+\infty)$

$g(x)=\dfrac{x-1}{3+x}\rightarrow 3+x=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow Dom(g)=R-\{-3\}$

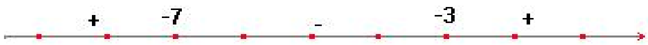
$h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\rightarrow \dfrac{1}{x}>0\Rightarrow x>0\Rightarrow Dom(h)=(0,+\infty)$

b)función inversa de g: $y=\dfrac{x-1}{3+x}\rightarrow x=\dfrac{y-1}{3+y}\rightarrow 3x+xy=y-1\rightarrow 3x+1=y-xy$

$y(1-x)=3x+1\rightarrow y=\dfrac{3x+1}{1-x}\Rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{1-x}$

c) $(f\circ g)(x)=f[g(x)]=f\left[\dfrac{x-1}{3+x}\right]=\sqrt{\dfrac{x-1}{3+x}-2}=\sqrt{\dfrac{x-1-6-2x}{3+x}}=\sqrt{\dfrac{-x-7}{3+x}}$,

$\dfrac{-(x+7)}{3+x}\geq 0\rightarrow \dfrac{x+7}{3+x}\leq 0\rightarrow$



$Dom(f\circ g)=[-7,-3)$

$(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g\left[\sqrt{x-2}\right]=\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{3+\sqrt{x-2}}\quad \rightarrow Dom(g\circ f)=[2,+\infty)$

$(h\circ f)(x)=h[f(x)]=h\left(\sqrt{x-2}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}\right)\rightarrow\ Dom(h\circ f)=(2,+\infty)$

2.- a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x-15}{\sqrt{x+4}-3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(3x-15)(\sqrt{x+4}+3)}{(\sqrt{x+4}-3)(\sqrt{x+4}+3)}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(3x-15)(\sqrt{x+4}+3)}{x+4-9}=$

$=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3(x-5)(\sqrt{x+4}+3)}{x-5}=\ =\lim\limits_{x\to 5}3(\sqrt{x+4}+3)=18$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{3x+1}-\dfrac{x^3-x^2+1}{3x^2}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{(x^2-1)3x^2}{3x+1}-\dfrac{(x^3-x^2+1)(3x+1)}{3x^2}\right)=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^4-3x^2-3x^4+3x^3-3x-x^3+x^2-1}{9x^3+3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x^3-2x^2-3x-1}{9x^3+3x^2}\right)=\dfrac{2}{9}$

c) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-2}\right)^{\frac{1}{x-3}}=(1^{\infty})=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\left[\frac{1}{x-2}-1\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x-3}\cdot\frac{1-x+2}{x-2}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{3-x}{(x-3)(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{-1}{x-2}}=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$

d) $\lim\limits_{x\to 5}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+6}{x-5}}=\left(\sqrt{\dfrac{11}{0}}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5^-}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+6}{x-5}}=\sqrt{\dfrac{11}{0^-}}\rightarrow \text{no existe}\\ \lim\limits_{x\to 5^+}\sqrt{\dfrac{x^2-4x+6}{x-5}}=\sqrt{\dfrac{11}{0^+}}=+\infty\end{cases}$ No existe límite

3.- a) Discontinuidad evitable en x = 3

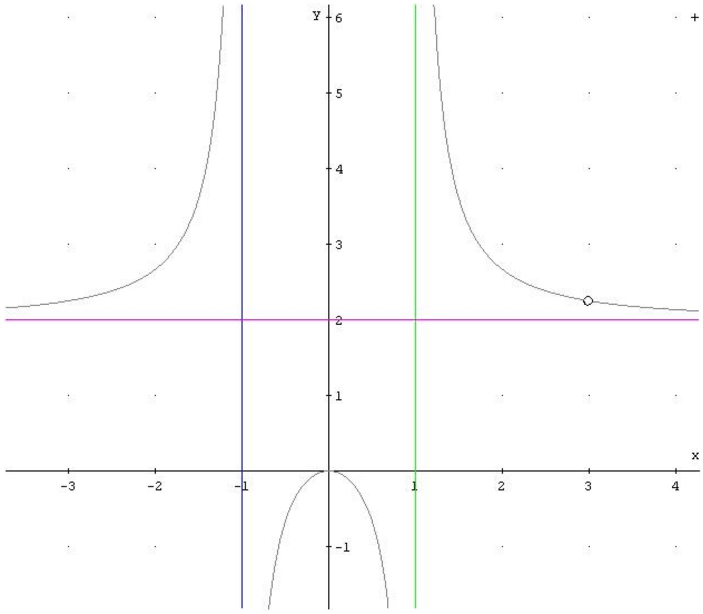
$\rightarrow \dfrac{(x-3)}{(x-3)}$

A.V. en x = 1 y x = -1

$\rightarrow \dfrac{(x-3)}{(x-3)(x-1)(x+1)}$

A.H. en y = 2

$\rightarrow \dfrac{2(x-3)x^2}{(x-3)(x-1)(x+1)}$



$$4.-\ f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x}{x+3} & \text{si } x\le -1 \quad \rightarrow \text{continua en } (-\infty,-3)\cup(-3,-1), \text{ racional}\\ \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si}-1<x<1 \rightarrow \text{continua en } (-1,1), \text{ racional}\\ mx-2 & \text{si } x\ge 1 \quad \rightarrow \text{continua en } (1,+\infty)\end{cases}$$

Habrá que estudiar la continuidad en x = -3, x = -1 , x = 1

En x = -3

$f(-3)=\dfrac{-12}{0}$ no existe $\rightarrow \lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x}{x+3}=\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -3^-}\dfrac{4x}{x+3}=\dfrac{-12}{0^-}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{4x}{x+3}=\dfrac{-12}{0^+}=-\infty\end{array}\right.$ tenemos una discontinuidad de salto infinito, es decir una asíntota vertical de ramas divergentes

En x = -1

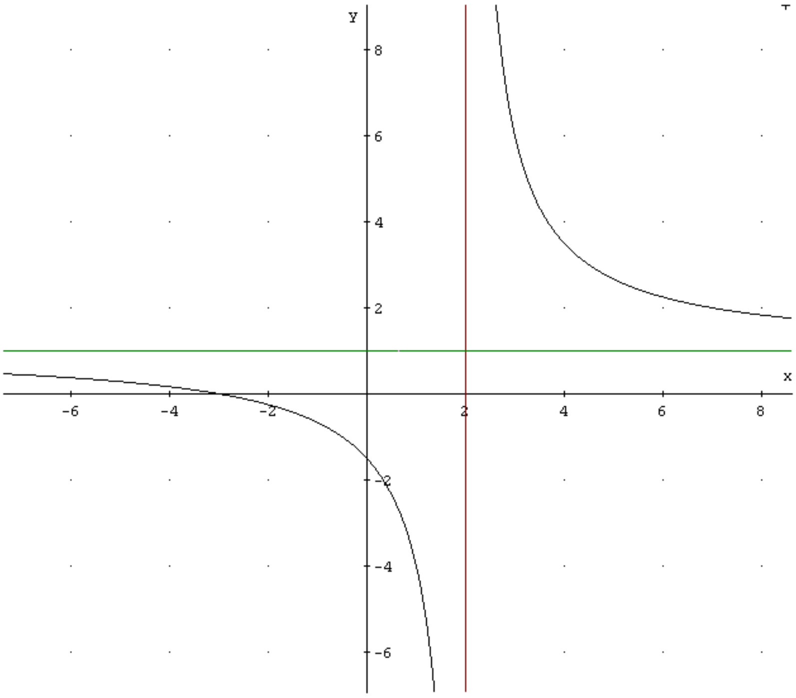
$f(-1)=\dfrac{-4}{2}=-2 \rightarrow \lim\limits_{x\to -1}f(x)=\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{4x}{x+3}=\dfrac{-4}{2}=-2\\ \lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\dfrac{-2}{0^-}=+\infty\end{array}\right.$ tenemos una discontinuidad de salto infinito en x = -1

En x = 1

$f(1)=m-2 \rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=\left\langle\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{3}{2}\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(mx-2)=m-2\end{array}\right.$

para que sea continua en x = 1 tiene que ser $m-2=\dfrac{3}{2}\Rightarrow m=2+\dfrac{3}{2}\rightarrow m=\dfrac{7}{2}$

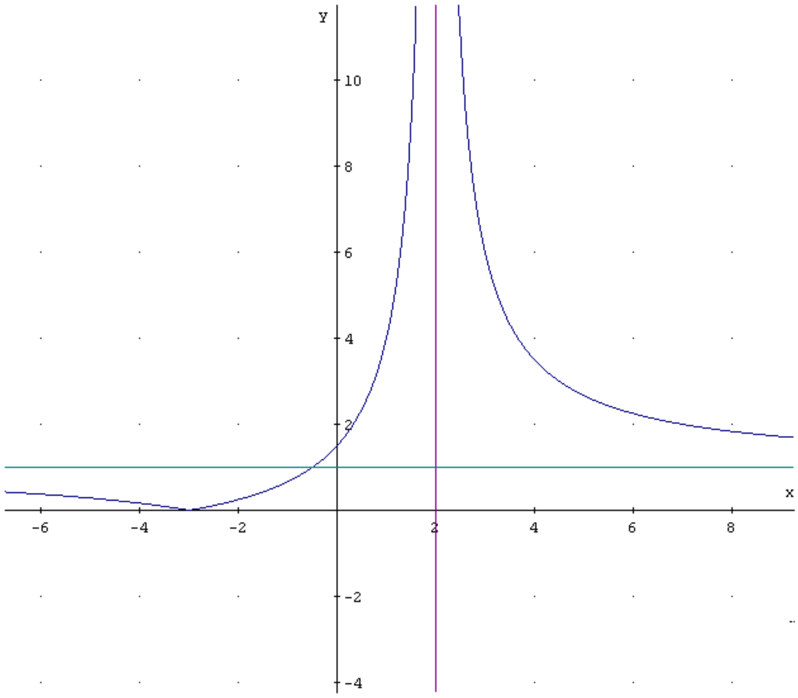
5.- $f(x)=\left|\frac{x+3}{x-2}\right|$ empezamos representando gráficamente la hipérbola $y=\frac{x+3}{x-2}$ que tiene la asíntota vertical en $x = 2$ y la asíntota horizontal en $y = 1$, dibujamos su gráfica



y "pasamos" la parte negativa (debajo del eje OX) a positiva (al hacer el valor absoluto)

$Dom(f)=R-\{2\}$

$Re\,c(f)=R-\{1\}$



$$\frac{x+3}{x-2}>0$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+3}{x-2} & si\; x<-3\\ -\frac{x+3}{x-2} & si\; -3\le x<2\\ \frac{x+3}{x-2} & si\; x>2\end{cases}$$