Calcula, mediante derivada logarítmica las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$ con $x > 0$

b) $f(x) = x^{2+\operatorname{sen} x}$ con $x > 0$

a) $\ln(f(x)) = \ln x^x = x\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

b) $\ln(f(x)) = \ln\left(x^{2+\operatorname{sen} x}\right) = (2+\operatorname{sen} x)\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{2+\operatorname{sen} x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x}\right)$

Calcula, mediante derivada logarítmica las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$ con $x > 0$

b) $f(x) = x^{2+\operatorname{sen} x}$ con $x > 0$

a) $\ln(f(x)) = \ln x^x = x\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^x(\ln x + 1)$

b) $\ln(f(x)) = \ln\left(x^{2+\operatorname{sen} x}\right) = (2+\operatorname{sen} x)\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{2+\operatorname{sen} x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{2+\operatorname{sen} x}{x}\right)$

Calcula mediante derivación logarítmica la derivada de las siguientes funciones sin preocuparte del dominio de las funciones que aparecen ni de su signo.

a) $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

b) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$

c) $f(x) = x^{\left(x^x\right)}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\,\sqrt{(x+3)^3}}$

a) $\ln(f(x)) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = x(\ln(x+1) - \ln x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1 \Rightarrow f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1\right) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

b) $\ln(f(x)) = \ln\left((\operatorname{arctg} x)^x\right) = x\ln(\operatorname{arctg} x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} \Rightarrow f'(x) = (\operatorname{arctg} x)^x\left(\ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$$

c) $\ln(f(x)) = \ln\left(x^{\left(x^x\right)}\right) = x^x \ln x$

Por el ejercicio 60 a) sabemos que $\left(x^x\right)' = x^x(\ln x + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(x^x\right)'\ln x + \frac{x^x}{x} = x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1} \Rightarrow f'(x) = x^{\left(x^x\right)}\left(x^x(\ln x + 1)\ln x + x^{x-1}\right)$$

d) $\ln(f(x)) = \ln\left(\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\,\sqrt{(x+3)^3}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(x-1) - \dfrac{2}{3}\ln(x+2) - \dfrac{3}{2}\ln(x+3)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\,\sqrt{(x+3)^3}}\left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}\right)$$