

Ejercicios de definición de derivada

Ejercicio nº 1.-

Dada la función:

$$f(x) = (x - 1)^3$$

Calcula la tasa de variación media en el intervalo $[0, 1]$. ¿Es creciente o decreciente la función en dicho intervalo?

Solución:

$$T.V.M. [0, 1] = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{0 - (-1)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en este intervalo.

Ejercicio nº 2.-

a) Calcula la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{3}{x}$ en el intervalo $[-3, -1]$

b) A la vista del resultado obtenido en el apartado anterior, ¿crece o decrece la función en dicho intervalo?

Solución:

$$a) T.V.M. [-3, -1] = \frac{f(-1) - f(-3)}{-1 - (-3)} = \frac{-3 - (-1)}{-1 + 3} = \frac{-3 + 1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

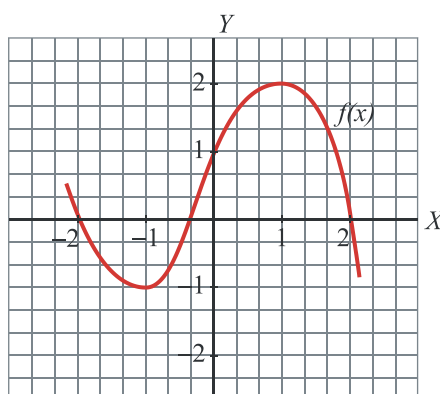
b) Como la tasa de variación media es negativa, la función es decreciente en el intervalo dado.

Ejercicio nº 3.-

Calcula la tasa de variación media de esta función, $f(x)$, en los intervalos siguientes e indica si la función crece o decrece en cada uno de dichos intervalos:

a) $[-1, 0]$

b) $[1, 2]$



Solución:

$$a) T.V.M. [-1, 0] = \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - (-1)}{1} = \frac{1 + 1}{1} = 2$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en $[-1,0]$. (También se puede apreciar directamente en la gráfica).

$$b) \text{ T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{0 - 2}{1} = -2$$

La función decrece en este intervalo.

Ejercicio nº 4.-

Consideramos la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

Halla la tasa de variación media en el intervalo $[0, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo.

Solución:

$$\text{T.V.M. } [0, 2] = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{\frac{3}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función crece en ese intervalo.

Ejercicio nº 5.-

Halla la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo $[1, 2]$ e indica si $f(x)$ crece o decrece en ese intervalo:

$$f(x) = 2x^2 - 3x$$

Solución:

$$\text{T.V.M. } [1, 2] = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{2 - (-1)}{1} = \frac{(2+1)}{1} = \frac{3}{1} = 3$$

Como la tasa de variación media es positiva, la función es creciente en el intervalo $[1, 2]$.

Ejercicio nº 6.-

Halla la derivada de la función $f(x) = (x - 1)^2$ en $x = 2$, aplicando la definición de derivada.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h-1)^2 - 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 1 + 2h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

Ejercicio nº 7.-

Halla la derivada de la siguiente función en $x = 1$, aplicando la definición de derivada:

$$f(x) = x^2 + 1$$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + h^2 + 2h + 1 - 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+2)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h+2) = 2 \end{aligned}$$

Ejercicio nº 8.-

Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(1)$, siendo $f(x) = \frac{2}{x}$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+h} - 2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - 2(1+h)}{(1+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2 - 2 - 2h}{(1+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-2h}{(1+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{(1+h)h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{(1+h)} = \frac{-2}{1} = -2 \end{aligned}$$

Ejercicio nº 9.-

Calcula, utilizando la definición de derivada, $f'(1)$ para la función $f(x) = \frac{x-1}{3}$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+h-1}{3} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 10.-

Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(-1)$, siendo $f(x) = \frac{3x+1}{2}$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3(-1+h)+1}{2} - \frac{-2}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3+3h+1}{2} + \frac{2}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-3+3h+1+2}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3h}{2}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{2h} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 11.-

Utilizando la definición de derivada, calcula $f'(x)$ para la función $f(x) = \frac{x+1}{3}$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1}{3} - \frac{(x+1)}{3}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h+1-x-1}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{3h} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 12.-

Halla la derivada de la función $f(x) = 2x^2$, aplicando la definición de derivada

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^2 - 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x^2 + h^2 + 2xh) - 2x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2h^2 + 4xh - 2x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2h + 4x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4x) = 4x \end{aligned}$$

Ejercicio nº 13.-

Halla, utilizando la definición, la derivada de la función:

$$f(x) = \frac{2x}{3}$$

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2(x+h)}{3} - \frac{2x}{3}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2x + 2h - 2x}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{2h}{3}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{3h} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 14.-

Aplicando la definición de derivada calcula $f'(x)$, siendo $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x(x+h)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{hx(x+h)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \end{aligned}$$

Ejercicio nº 15.-

Halla $f'(x)$, aplicando la definición de derivada, siendo $f(x) = x^2 + 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + h^2 + 2xh + 1 - x^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h + 2x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h + 2x) = 2x \end{aligned}$$