

10 Iniciación al cálculo de derivadas. Aplicaciones

Tras los límites viene una de las operaciones con funciones más importantes de todas las Matemáticas y una de las más potentes herramientas de análisis y de cálculo para las funciones: la derivada.

Newton y Leibniz comenzaron el estudio del cálculo infinitesimal; en su difusión y ampliación colaboraron científicas como Émilie du Châtelet (1706 - 1749), traductora al francés de los *Principia* de Newton.



Émilie du Châtelet (Wikimedia Commons)

Aquí hacemos surgir la derivada de la tasa de variación media, como una generalización necesaria para el estudio del crecimiento de una función. De paso mencionamos tanto el origen geométrico (recta tangente) como físico de la derivada (velocidad).

Una vez visto el origen de la derivada, aprendemos a calcularla. Hallamos la derivada de algunas funciones sencillas con ayuda de los límites, aunque no deducimos todas las reglas de derivación, porque aumentaría la complejidad de cálculos innecesariamente.

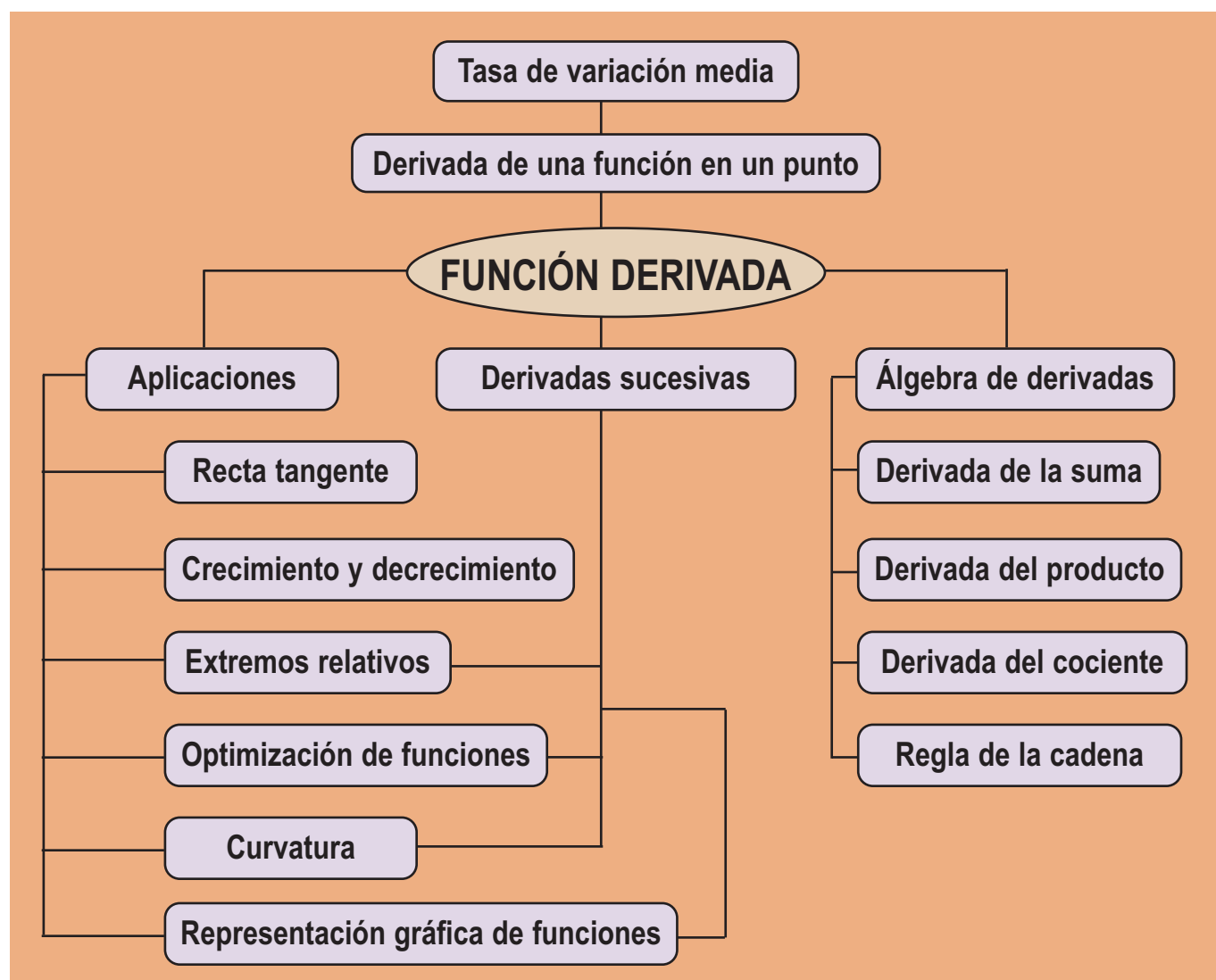
Aparte de las derivadas, aprenderemos el álgebra de derivadas: cómo es la derivada de la suma, del producto, del cociente y de la composición de funciones, importantísima operación que nos va a permitir derivar cualquier función, por muy complicada que sea.

Explicamos las derivadas sucesivas, centrándonos en la derivada segunda, pues se usa en el cálculo de extremos relativos y en el estudio de la curvatura de una función. En medio aprenderemos a estudiar el crecimiento y decrecimiento

de una función usando la derivada. Terminamos con usos menos mecánicos como son la optimización de funciones y la representación gráfica de una función.

En esta Unidad didáctica nos proponemos alcanzar los **objetivos** siguientes:

1. Conocer y usar las definiciones de derivada en un punto y de función derivada.
2. Hallar la ecuación de la recta tangente a una función en cualquier punto.
3. Aprender y usar el álgebra de derivadas.
4. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de una función.
5. Calcular los extremos relativos de una función.
6. Optimizar funciones, hallando los valores que hacen que la función sea máxima o mínima.
7. Estudiar la concavidad y la convexidad, así como hallar los puntos de inflexión de una función.
8. Estudiar y representar gráficamente una función.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

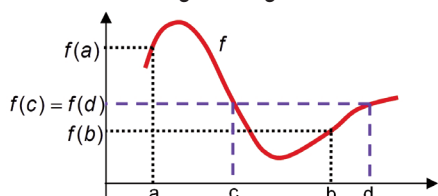
1. TASA DE VARIACIÓN MEDIA	240
2. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO	241
3. FUNCIÓN DERIVADA	244
4. CÁLCULO DE DERIVADAS	246
4.1. Derivada de la suma de funciones	246
4.2. Derivada del producto de funciones	246
4.3. Derivada del cociente de funciones	247
4.4. Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena	249
5. DERIVADAS SUCESIVAS	252
6. CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO DE LAS FUNCIONES	254
7. EXTREMOS DE LAS FUNCIONES: MÁXIMOS Y MÍNIMOS	254
8. FUNCIONES DERIVABLES	255
8.1. Crecimiento y decrecimiento para funciones derivables	255
8.2. Máximos y mínimos para funciones derivables	256
9. PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS	259
10. CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD. PUNTOS DE INFLEXIÓN	261
11. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES POLINÓMICAS DE GRADO SUPERIOR A DOS Y FUNCIONES RACIONALES	263

1. Tasa de variación media

La variación que experimenta una función f al pasar de $x = a$ a $x = b$ vale $\Delta f = f(b) - f(a)$, donde el símbolo Δ se llama incremento y mide la variación (que puede ser crecimiento, si hay un aumento, o decrecimiento, si hay una disminución) de lo que viene a su derecha.

La Tasa de Variación Media (TVM) de la función f en el intervalo $[a, b]$ o $[x_1, x_2]$ nos proporciona una variación relativa y se define como: $TVM(f, [a, b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ó $TVM(f, [x_1, x_2]) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ó $TVM(f, [a, b]) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

En el caso de la función lineal, cuya representación gráfica es una recta, su pendiente m , que es su TVM, nos proporciona toda la información sobre el crecimiento de la función, de modo que si $m > 0$ la función es creciente, si $m < 0$ es decreciente y si $m = 0$ es constante. Sin embargo, la TVM para funciones que no son lineales no proporciona la misma información que en el caso lineal, pudiendo incluso inducir a error como se deduce fácilmente del siguiente gráfico:



$TVM(f, [a, b]) < 0$ pues $f(b) < f(a)$, lo que nos llevaría a concluir que la función decrece en $[a, b]$, lo cual no es del todo cierto. Observa que crece alcanzando un máximo y después decrece hasta un mínimo, volviendo a crecer tras este.

$TVM(f, [c, d]) = 0$ porque $f(c) = f(d)$, por lo que concluiríamos que la función es constante en $[c, d]$, algo falso como puedes ver en la gráfica. Toda la información

anterior no la recoge la TVM debido a que abarca un intervalo muy amplio en el que la función puede sufrir muchas variaciones, indetectables para la TVM.



Ejemplos

1. Halla la TVM de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $[2, 5]$.

Solución :

$$TVM(f, [2, 5]) = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{3}{2} - 3}{3} = \frac{-\frac{3}{2}}{3} = -\frac{1}{2}, \text{ pues } f(5) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, f(2) = \frac{2+1}{2-1} = 3.$$

2. Halla la TVM de $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $[-1, 3]$.

Solución :

$$TVM(f, [-1, 3]) = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{12 - (-4)}{4} = 4, \text{ pues } f(3) = 12, f(-1) = -4.$$

3. Halla la TVM de $y = \sqrt{x+4}$ en $[0, 12]$.

Solución :

$$TVM(y, [0, 12]) = \frac{y(12) - y(0)}{12 - 0} = \frac{4 - 2}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \text{ pues } f(12) = 4, f(0) = 2.$$

4. Halla la TVM de $f(x) = \frac{3x}{4x-1}$ en $[0, 1]$.

Solución :

$$TVM(f, [0, 1]) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{1 - 0}{1 - 0} = 1, \text{ pues } f(1) = 1, f(0) = 0.$$

2. Derivada de una función en un punto

¿Podemos arreglar las insuficiencias de la TVM? Sí; lo que hemos de hacer es reducir el intervalo, haciendo que su anchura sea cada vez menor. Para ello cambiamos el intervalo y usamos $[a, a + h]$. Ahora $TVM(f, [a, a + h]) = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$. Para estrechar el intervalo recurrimos a tomar el límite cuando la anchura del intervalo (que es h) tiende a cero, y obtenemos la **tasa de variación instantánea**, más conocida como

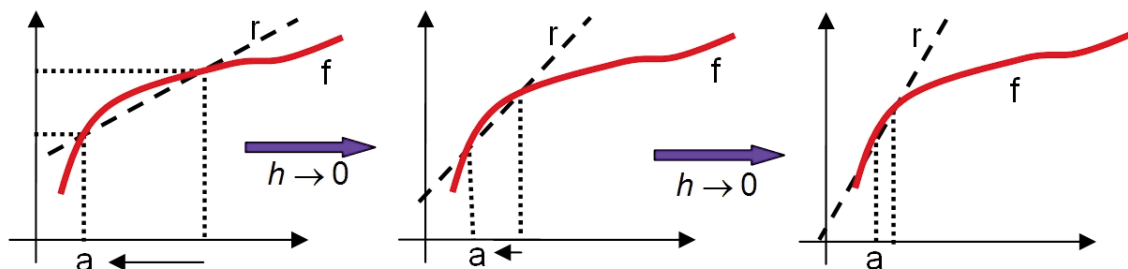
derivada de una función en un punto: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Hay otra definición de derivada: como $\Delta y = f(a+h) - f(a)$ e $\Delta x = a+h-a = h$ podemos escribir $f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

aunque es más habitual usar esta notación, $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (notación debida a Leibniz). La ventaja que tiene esta forma

de escribir la definición es la brevedad. El inconveniente es que hay que saber lo que significa cada término para poder calcular la derivada correctamente. Esta expresión se lee *derivada de y respecto de x* o **diferencial** de y (dy) partido por diferencial de x (dx). Esta última lectura procede de considerarlo como el cociente de los límites de los incrementos, lo que permite escribir $\frac{dy}{dx} = y'$ y despejar $dy = y' \cdot dx$. Esta notación no es muy usada actualmente a estos niveles, aunque presenta ventajas cuando se trata la integral (que veremos en 2º de bachillerato). Nosotros usaremos la notación de f' .

Podemos hacernos una idea gráfica de la derivada mirando la siguiente secuencia para una misma función f . Por claridad omitimos escribir $a+h$, que irá cambiando conforme h tienda a 0, y también el valor de f para cada uno de los puntos que aparece.



Observa la recta r : en principio corta a la función f en dos puntos distintos (es secante); conforme h tiende a cero esos puntos se aproximan cada vez más y se verifica que, en el límite cuando h tiende a 0, corta a la función en un único punto, por lo que la recta r se convierte en la **recta tangente** y la derivada en el punto será la pendiente de dicha recta tangente. Recordando la ecuación punto-pendiente podemos escribir que:

la **recta tangente** a una función f en un punto (x_0, y_0) tiene por ecuación $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Encontrar un método que permitiera calcular la ecuación de la recta tangente a cualquier curva fue uno de los orígenes de la derivada. El otro fue encontrar un método que permitiera averiguar la velocidad instantánea que lleva un móvil. Como la velocidad media es el espacio recorrido partido por el tiempo, la velocidad (instantánea) será el límite del espacio recorrido partido por el tiempo cuando el tiempo tiende a cero: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$. Este último camino es el que lleva al concepto de **tasa de variación instantánea**.

Una vez vista la definición y las interpretaciones de la derivada queda ver cómo se calcula. Para ello usaremos un procedimiento conocido como la **Regla de los cuatro pasos**, que consiste en desglosar paso a paso la definición.

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES



Ejemplos

5. Calcula la derivada de $f(x) = x^2 + 3x - 1$ en $x = 2$ usando la definición.

Solución :

Por definición $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

1^{er} paso: cálculo de las imágenes $f(2) = 9$; $f(2+h) = (2+h)^2 + 3(2+h) - 1 = 4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 1 = h^2 + 7h + 9$.

2^o paso: cálculo de la diferencia $f(2+h) - f(2) = h^2 + 7h + 9 - 9 = h^2 + 7h = h(h+7)$.

3^{er} paso: cálculo del cociente $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{h(h+7)}{h} = h+7$.

4^o paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h+7) = 7 \Rightarrow f'(2) = 7$.

Una observación: si en el paso 3^o no hubiéramos simplificado y eliminado h de numerador y denominador, al tomar el límite hubiéramos obtenido la indeterminación $\frac{0}{0}$. Este es un resultado necesario para que exista la derivada en el punto porque el denominador, que es h , siempre valdrá cero, y el único resultado que no nos dará infinito es que el numerador también sea cero. Para que el numerador sea cero ha de verificarse que $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0 \Rightarrow f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a+h)$.

Esto significa que si hay derivada de la función es porque la función es continua. De ahí la importancia de la continuidad, pues de su existencia depende el que la función tenga derivada.

6. Usando la definición calcula la derivada de $f(x) = 5x - 2$ en $x = 1$.

Solución :

Definición $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

1^{er} caso: cálculo de las imágenes $f(1) = 5 \cdot 1 - 2 = 3$, $f(1+h) = 5(1+h) - 2 = 5h + 3$.

2^o paso: cálculo de la diferencia $f(1+h) - f(1) = 5h + 3 - 3 = 5h$.

3^{er} paso: cálculo del cociente $\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{5h}{h} = 5$.

4^o paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5 \Rightarrow f'(1) = 5$.

No había necesidad de hacer operaciones porque en la función lineal, y $f(x) = 5x - 2$ lo es, la derivada coincide con la TVM y esta con la pendiente de la recta $m = 5$.

7. Calcula la derivada de $f(x) = x^2 + 1$ en $x = -3$ usando la Regla de los cuatro pasos, así como la ecuación de la recta tangente a f en dicho punto.

Solución :

Definición $f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$.

1^{er} paso: cálculo de las imágenes $f(-3) = 10$, $f(-3+h) = (-3+h)^2 + 1 = 9 - 6h + h^2 + 1 = h^2 - 6h + 10$.

2^o paso: cálculo de la diferencia $f(-3+h) - f(-3) = h^2 - 6h + 10 - 10 = h^2 - 6h = h(h-6)$.

3^{er} paso: cálculo del cociente $\frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \frac{h(h-6)}{h} = h-6$.

4^o paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h-6) = -6 \Rightarrow f'(-3) = -6$.

La ecuación de la recta tangente es: $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = f(-3) = 10$, $f'(-3) = -6 \Rightarrow r: y - 10 = -6(x - (-3)) \Rightarrow r: y = -6x - 8$.

8. Usando la definición halla $f'(5)$, con $f(x) = \frac{x+3}{x-4}$.

Solución :

$$\text{Definición } f'(5) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}.$$

$$1^{\text{er}} \text{ paso: cálculo de las imágenes } f(5) = 8, \quad f(5+h) = \frac{5+h+3}{5+h-4} = \frac{h+8}{h+1}.$$

$$2^{\text{o}} \text{ paso: cálculo de la diferencia } f(5+h) - f(5) = \frac{h+8}{h+1} - 8 = \frac{h+8-8(h+1)}{h+1} = \frac{-7h}{h+1}.$$

$$3^{\text{er}} \text{ paso: cálculo del cociente } \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{\frac{-7h}{h+1}}{h} = \frac{-7}{h+1}.$$

$$4^{\text{o}} \text{ paso: cálculo del límite del cociente } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-7}{h+1} = -7 \Rightarrow f'(5) = -7.$$

9. Dada $f(x) = \sqrt{2x-1}$ calcula $f'(1)$ usando la definición, así como la ecuación de la recta tangente a f en dicho punto.

Solución :

$$\text{Definición } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

$$1^{\text{er}} \text{ paso: cálculo de las imágenes } f(1) = 1, \quad f(1+h) = \sqrt{2(1+h)-1} = \sqrt{2h+1}.$$

$$2^{\text{o}} \text{ paso: cálculo de la diferencia } f(1+h) - f(1) = \sqrt{2h+1} - 1.$$

$$3^{\text{er}} \text{ paso: cálculo del cociente } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\sqrt{2h+1} - 1}{h}.$$

$$4^{\text{o}} \text{ paso: cálculo del límite del cociente } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+1} - 1}{h} = \frac{0}{0} \text{ ind } \stackrel{\text{conjugado}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h+1-1}{h(\sqrt{2h+1}+1)} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2h+1}+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2h+1}+1} = \frac{2}{1+1} = 1 \Rightarrow f'(1) = 1.$$

La recta tangente es: $x_0 = 1, y_0 = f(1) = 1, f'(1) = 1 \Rightarrow r: y - 1 = x - 1 \Rightarrow r: y = x.$



Actividades

- Halla la TVM de: **a)** $f(x) = x^3 - x$ en $[-1,1]$; **b)** $y = \frac{2x+3}{2x-3}$ en $[-1,2]$.
- Averigua el valor de la TVM de $f(x) = \sqrt{3x+4}$ en $[-1,7]$.
- ¿Cuánto vale la TVM de $f(x) = 4x+5$ en $[-5,10]$? ¿Y en $[0,1]$?
- Usando la definición calcula la derivada de $f(x) = x^2 - x + 3$ en $x = -2$.
- Calcula la derivada de $f(x) = \frac{3x+2}{3x-1}$ en $x = 1$, usando la definición.
- Halla la derivada de $f(x) = \sqrt{5x+1}$ en $x = 0$, usando la definición.
- Usa la definición para calcular $f'(-3)$, siendo $f(x) = \frac{1}{x+4}$.

3. Función derivada

En el apartado anterior calculamos la derivada de una función en un punto a mediante un procedimiento tedioso y poco práctico, pues hay que hacer los cálculos en cada punto. Por fortuna, los cálculos se pueden simplificar definiendo la **función derivada**, que no es más que la derivada de una función en un punto cualquiera x :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se usa también la regla de los cuatro pasos pero, al tratarse de un valor genérico x , podemos encontrar fórmulas que nos servirán para las funciones que ya conocemos.



Ejemplos

10. Dada la función $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, averigua su derivada.

Solución:

1º paso: cálculo de las imágenes $f(x+h) = k$.

2º paso: cálculo de la diferencia $f(x+h) - f(x) = k - k = 0$.

3º paso: cálculo del cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{0}{h} = 0$.

4º paso: cálculo del límite del cociente $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \Rightarrow f'(x) = (k)' = 0$. La derivada de una (función) constante es cero, pues, como nunca cambia, su tasa de variación, ya sea media, ya sea instantánea, será cero.

11. Dada $f(x) = x^2$ halla su derivada.

Solución:

1º paso: $f(x+h) = (x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$.

2º paso: $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2 = h(2x + h)$.

3º paso: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h(2x + h)}{h} = 2x + h$.

4º paso: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x \Rightarrow f'(x) = (x^2)' = 2x$.

12. Halla la derivada de $f(x) = \frac{1}{x}$.

Solución:

1º paso: $f(x+h) = \frac{1}{x+h}$.

2º paso: $f(x+h) - f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x+h)}{x(x+h)} = \frac{-h}{x(x+h)}$.

3º paso: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \frac{-1}{x(x+h)}$.

4º paso: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$.

13. Averigua la derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución:

1^{er} paso: $f(x+h) = \sqrt{x+h}$.

2^o paso: $f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$.

3^{er} paso: $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

4^o paso: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x}}{0} = \frac{0}{0}$ ind $\stackrel{\text{conjugado}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$
 $= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

La ventaja con respecto a lo hecho en el apartado 2 es que, para calcular la derivada de $f(x) = x^2$ en $x = 3$, hacemos $f'(x) = (x^2)' = 2x \Rightarrow f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$, o también si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces $f'(9)$ se calculará así:

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}.$$

Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n, n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Todas las derivadas que aparecen en la tabla se obtienen de la definición. Ahora nos interesa que aprendas las derivadas de las funciones más importantes entendiendo que proceden de dicha definición.

El 2^o caso sirve para x elevado a cualquier exponente, ya sea entero o fraccionario; por esta razón es importante recordar bien el manejo de exponentes negativos y fraccionarios para pasar de un modo de escritura a otro. Por ejemplo:

$$(x)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \text{ (si no hay exponente se sobreentiende que es 1);}$$

$$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2; (x^8)' = 8x^{8-1} = 8x^7; \left(\frac{1}{x^5}\right)' = (x^{-5})' = -5 \cdot x^{-5-1} = -5 \cdot x^{-6} = -\frac{5}{x^6};$$

$$(\sqrt[7]{x})' = \left(x^{\frac{1}{7}}\right)' = \frac{1}{7} \cdot x^{\frac{1}{7}-1} = \frac{1}{7} \cdot x^{-\frac{6}{7}} = \frac{1}{7 \cdot x^{\frac{6}{7}}} = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}};$$

$$(\sqrt[5]{x^2})' = \left(x^{\frac{2}{5}}\right)' = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{2}{5}-1} = \frac{2}{5} \cdot x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5 \cdot x^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{2\sqrt[5]{x^3}}; \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2 \cdot x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$



Actividades

8. Halla: a) $\left(\frac{1}{x^4}\right)'$; b) $\left(\frac{1}{x^6}\right)'$; c) $\left(\frac{1}{\sqrt[6]{x}}\right)'$; d) $(\sqrt[3]{x})'$.

9. Usando la fórmula $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, n \in \mathbb{R}$, demuestra que:

a) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; b) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; c) $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$; d) $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$

10. Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 7x + 1$ en el punto $(1, -5)$.

11. Averigua la ecuación de la recta tangente a la función $y = x^4 - x^2 + 1$ en el punto $(-1, 1)$.

4. Cálculo de derivadas

A continuación veremos el **álgebra de derivadas** o conjunto de reglas para derivar. Todas proceden de combinar la definición de derivada con el álgebra de límites ya estudiada.

4.1. Derivada de la suma de funciones

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x) \Leftrightarrow$ La derivada de una suma (o resta) es la suma (o resta) de las derivadas.



Ejemplo

14. Calcula las siguientes derivadas:

a) $\left(x^2 + \frac{1}{x^3}\right)' = (x^2)' + (x^{-3})' = 2x - 3x^{-4} = 2x - \frac{3}{x^4}.$

b) $(\sqrt{x} - x^5)' = (\sqrt{x})' - (x^5)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 5x^4.$

c) $\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' + (\ln x)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}.$

Dada la sencillez de la fórmula, suele escribirse directamente el resultado:

d) $(x^3 + 5)' = 3x^2.$ e) $(x^4 + x)' = 4x^3 + 1.$ f) $(x^5 - x^2 + x - 7)' = 5x^4 - 2x + 1.$

y, claro está, podemos poner todos los sumandos que queramos y lo que deberemos hacer es ir derivando sumando a sumando:

g) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} + x^7 + e^x - \sin x + \frac{1}{x^6}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} + 7x^6 + e^x - \cos x - \frac{6}{x^7}.$ Recuerda que

$$\left(\frac{1}{x^6}\right)' = (x^{-6})' = -6x^{-7} = -\frac{6}{x^7}.$$

4.2. Derivada del producto de funciones

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \Leftrightarrow$ La derivada de un producto es igual a la derivada del primero por el segundo sin derivar más el primero por la derivada del segundo.



Ejemplo

15. Calcula las siguientes derivadas:

$$\text{a) } (x^2 \cdot e^x)' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(x+2) \cdot e^x.$$

$$\text{b) } (x^5 \cos x)' = (x^5)' \cos x + x^5 (\cos x)' = 5x^4 \cos x + x^5 (-\sin x) = 5x^4 \cos x - x^5 \sin x.$$

$$\text{c) } (\sqrt{x} \cdot \ln x)' = (\sqrt{x})' \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}.$$

$$\text{d) } \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \ln x + \frac{1}{x} (\ln x)' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Un caso especial de esta fórmula es cuando una de las funciones es constante, pues como la derivada de una constante es cero, sólo nos quedará uno de los términos de la derecha: $(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$, k constante (la constante multiplicativa no se deriva).

$$\text{e) } (5x^3)' = 5 \cdot (x^3)' = 5 \cdot 3 \cdot x^2 = 15x^2.$$

$$\text{f) } (3 \ln x)' = 3 \cdot (\ln x)' = \frac{3}{x}. \quad \text{g) } (7 \cos x)' = 7(-\sin x) = -7 \sin x.$$

Podemos mezclar sumas, restas y productos, derivando cada una de estas operaciones como les corresponde:

$$\text{h) } (x^4 + x^2 e^x)' = (x^4)' + (x^2 e^x)' = 4x^3 + (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 4x^3 + 2x e^x + x^2 e^x.$$

$$\text{i) } (4 \sin x - x^7 \ln x)' = (4 \sin x)' - (x^7 \ln x)' = 4 \cos x - \left[7x^6 \ln x + x^7 \cdot \frac{1}{x} \right] = 4 \cos x - 7x^6 \ln x - x^6.$$

4.3. Derivada del cociente de funciones

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, si $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow$ **La derivada de un cociente es igual a la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador por la derivada del denominador, partido todo por el denominador al cuadrado.**

Para poder calcular la derivada del cociente el denominador ha de ser distinto de cero.



Ejemplos

16. Calcula las siguientes derivadas:

$$\text{a) } (tg x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \left\{ \frac{1}{\cos^2 x} \right. \\ \left. 1 + tg^2 x \right.$$

Este resultado es tan importante que hay que aprendérselo como los de la tabla.

$$\text{b) } \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = \frac{(x)' \ln x - x (\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

$$\text{c) } \left(\frac{3x-1}{4x+5}\right)' = \frac{(3x-1)' \cdot (4x+5) - (3x-1) \cdot (4x+5)'}{(4x+5)^2} = \frac{12x+15-12x+4}{(4x+5)^2} = \frac{19}{(4x+5)^2}.$$

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

$$d) \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)' = \frac{(x^2+1)' \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot (x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{2x(x^2-1) - 2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}.$$

Los denominadores no se suelen desarrollar, sino que se dejan indicados.

$$e) \left(\frac{x^2}{e^x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot e^x - x^2 \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{2xe^x - x^2 e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot (2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot (2-x)}{e^x}.$$

Hay que simplificar al máximo para obtener la derivada, pues, como la derivada se usa para estudiar las funciones, hay que saber con exactitud su valor.

17. Calcula las siguientes derivadas:

$$a) \left(\frac{x+3}{x-4} \right)' = \frac{(x+3)' \cdot (x-4) - (x+3) \cdot (x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{x-4 - (x+3)}{(x-4)^2} = -\frac{7}{(x-4)^2}.$$

$$b) \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}.$$

$$c) \left(\frac{e^x-1}{e^x+1} \right)' = \frac{(e^x-1)' \cdot (e^x+1) - (e^x-1) \cdot (e^x+1)'}{(e^x+1)^2} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}.$$

$$d) \left(\frac{2x+\ln x}{e^x} \right)' = \frac{(2x+\ln x)' \cdot e^x - (2x+\ln x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{(2+\frac{1}{x}) \cdot e^x - (2x+\ln x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{\left(\frac{2x+1}{x} - 2x - \ln x \right) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x+1-2x^2-x \ln x}{xe^x}.$$

$$e) \left(\frac{xe^x}{\cos x} \right)' = \frac{(xe^x)' \cdot \cos x - xe^x \cdot (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{(e^x + xe^x) \cos x - xe^x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{e^x(x \cos x + \cos x) + xe^x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{e^x(x \cos x + x \sin x + \cos x)}{\cos^2 x}.$$

Un caso particular de la derivada de un cociente es $\left(\frac{1}{f} \right)'(x) = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$ ó $\left(\frac{k}{f} \right)'(x) = -\frac{k \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$, k cons-

tante. El resultado se obtiene porque, al ser constante, la derivada del numerador es cero y queda “- numerador por derivada del denominador”.



Ejemplo

18. Calcula las siguientes derivadas:

$$a) \left(\frac{3}{\ln x} \right)' = -\frac{3 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{3}{x(\ln x)^2}.$$

$$b) \left(\frac{7}{\cos x} \right)' = -\frac{7(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{7 \sin x}{\cos^2 x} = \frac{7 \operatorname{tg} x}{\cos x}.$$



Actividades

12. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 + x^2 - x + 1$; b) $y = 3t^2 - t + 1$; c) $y = 6t^7 - 2t^5 + 4t^2 + 3t - 2$.

13. Halla la derivada de: a) $y = 8x \ln x - 5e^x$; b) $y = \sqrt[5]{x} \cdot \ln x$; c) $y = \frac{5}{2x+3}$.

14. Calcula la derivada de: a) $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{2x^2 + 1}$; b) $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 1}$; c) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

15. Deriva y simplifica las siguientes funciones: a) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$; b) $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x^2 - 9}$; c) $f(x) = \frac{8}{4 - x^2}$.

16. Calcula la derivada de las siguientes funciones: a) $y = 2x^3 \sin x - x^2 \operatorname{tg} x$; b) $f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

17. Deriva y simplifica las siguientes funciones: a) $y = \frac{1}{\sin x}$; b) $y = \frac{\cos x}{\sin x}$; c) $y = \frac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}$.

4.4. Derivada de la composición de funciones. Regla de la cadena

La derivada de la composición de funciones es: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Es decir, **la derivada de una composición de funciones es igual al producto de la derivada de la primera función, particularizada en la segunda función, por la derivada de la segunda función particularizada en x .**

Para usarla hay que saber cuál es la primera y cuál es la segunda función. Recordando lo visto al hablar de la composición de funciones, g es la primera que actúa y f la segunda. Comparando con la fórmula (también conocida como **regla de la cadena**, porque se deriva eslabón a eslabón), vemos que primero derivamos f (la última que actúa) y después g (la primera que actúa).



Ejemplos

19. Calcula la derivada de: a) $y = \ln 2x$; b) $y = (\ln x)^2$.

Solución:

a) Tenemos dos funciones logaritmo neperiano y $2x$. Primero calcularíamos $2x$ y después el neperiano, por lo que derivamos primero el neperiano (y lo evaluamos en $2x$) y después derivamos $2x$:

$$(\ln 2x)' = \underbrace{\frac{1}{2x}}_{\text{derivada del neperiano}} \cdot \underbrace{2}_{\text{derivada de } 2x} = \frac{1}{x}.$$

b) Tenemos las funciones neperiano y x^2 (elevar al cuadrado). Primero calcularíamos el neperiano y después elevaríamos al cuadrado, por lo que primero derivamos el cuadrado y después el neperiano:

$$\left((\ln x)^2\right)' = \underbrace{2 \ln x}_{\text{derivada del cuadrado}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{derivada del neperiano}} = \frac{2 \ln x}{x}.$$

20. Halla la derivada de: a) $f(x) = (7x + 1)^3$; b) $y = \cos x^2$.

Solución:

a) Tenemos las funciones $7x + 1$ y x^3 (elevar al cubo). Primero operaríamos con $7x + 1$ y después elevaríamos al cubo,

por lo que derivamos primero el cubo y después $7x + 1$: $\left((7x + 1)^3\right)' = \underbrace{3(7x + 1)^2}_{\text{derivada del cubo}} \cdot \underbrace{7}_{\text{derivada de } 7x+1} = 21(7x + 1)^2.$

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

b) Tenemos la función coseno y x^2 (elevar al cuadrado). Primero calcularíamos el cuadrado y después el coseno, por lo que primero derivamos el coseno y después x^2 : $(\cos x^2)' = \underbrace{-\operatorname{sen} x^2}_{\text{derivada del coseno}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivada de } x^2} = -2x \cdot \operatorname{sen} x^2$.

21. Averigua las derivadas de: a) $y = e^{-x}$; b) $f(x) = e^{-x^2}$.

Solución:

a) Tenemos las funciones exponencial y $-x$. Primero cambiaríamos el signo ($-x$) y después la exponencial. Así, derivamos primero la exponencial y después $-x$: $(e^{-x})' = \underbrace{e^{-x}}_{\text{derivada de la exponencial}} \cdot \underbrace{(-1)}_{\text{derivada de } -x} = -e^{-x}$.

b) Tenemos las funciones exponencial y $-x^2$. Primero calcularíamos $-x^2$ y después la exponencial, por lo que primero hay que derivar la exponencial y después $-x^2$: $(e^{-x^2})' = \underbrace{e^{-x^2}}_{\text{derivada de la exponencial}} \cdot \underbrace{(-2x)}_{\text{derivada de } -x^2} = -2xe^{-x^2}$.

22. Deriva las siguientes funciones: a) $y = \ln(x^2 - 5x + 1)$; b) $y = \ln(\sqrt{x})$.

Solución:

a) Tenemos las funciones $x^2 - 5x + 1$ (primera que se calcularía) y $\ln$ (segunda que se calcularía). Se deriva primero el $\ln$ y después el polinomio: $(\ln(x^2 - 5x + 1))' = \underbrace{\frac{1}{x^2 - 5x + 1}}_{\text{derivada del } \ln} \cdot \underbrace{(2x - 5)}_{\text{derivada de } x^2 - 5x + 1} = \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 1}$.

b) Tenemos las funciones $\sqrt{x}$ (la primera que se calcula) y $\ln$ (la última que se calcula). Así, se deriva primero el neperiano y después la raíz: $(\ln(\sqrt{x}))' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{derivada del } \ln} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{derivada de } \sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$.

Usando las propiedades del logaritmo: $\ln(\sqrt{x}) = \ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \ln x \Rightarrow (\ln(\sqrt{x}))' = \left(\frac{1}{2} \ln x\right)' = \frac{1}{2x}$.

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x), \quad n \in \mathbb{R}$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

Aunque la regla de la cadena sólo exige pensar el orden de ejecución de las funciones, a veces se detallan algunos casos frecuentes ampliando la tabla de derivadas. En la tabla adjunta sólo aparecen dos funciones y sus resultados se obtienen de la regla de la cadena, que deberemos usar cuando aparezcan más de dos funciones.



Ejemplos

23. Averigua la derivada de: a) $y = e^{5x+3}$; b) $y = \ln(x^2 + x - 1)$.

Solución:

a) $(e^{5x+3})' = 5e^{5x+3}$, pues $(5x+3)' = 5$. b) $(\ln(x^2 + x - 1))' = \frac{2x+1}{x^2 + x - 1}$, pues $(x^2 + x - 1)' = 2x + 1$.

24. Calcula la derivada de: a) $(3x^5 - 5x^2 + 7)^8$; b) $\sqrt[3]{(9x - 5)^2}$.

Solución:

a) $((3x^5 - 5x^2 + 7)^8)' = 8(3x^5 - 5x^2 + 7)^7 (15x^4 - 10x)$, pues $(3x^5 - 5x^2 + 7)' = 15x^4 - 10x$.

b) $(\sqrt[3]{(9x - 5)^2})' = ((9x - 5)^{2/3})' = \frac{2}{3}(9x - 5)^{-1/3} \cdot 9 = \frac{6}{\sqrt[3]{9x - 5}}$, pues $(9x - 5)' = 9$.

25. Deriva las siguientes funciones: **a)** $f(x) = (x^2 - 4)^2$; **b)** $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$.

Solución:

$$\text{a)} \quad \left((x^2 - 4)^2 \right)' = 2(x^2 - 4) \cdot 2x = 4x(x^2 - 4), \text{ pues } (x^2 - 4)' = 2x.$$

$$\text{b)} \quad \left(\ln(x^2 - 3x) \right)' = \frac{(x^2 - 3x)'}{x^2 - 3x} = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x}, \text{ pues } (x^2 - 3x)' = 2x - 3.$$

26. Calcula la derivada de: **a)** $y = (\ln(4x^2 - 5))^3$; **b)** $y = \ln \frac{3x}{x+4}$.

Solución:

a) Hay 3 funciones: el cubo (última en calcularse, primera en derivarse), el neperiano (segunda en calcularse, segunda en derivarse) y el polinomio (primero en calcularse, último en derivarse):

$$\left((\ln(4x^2 - 5))^3 \right)' = \underbrace{3 \cdot (\ln(4x^2 - 5))^2}_{\text{derivada del cubo}} \cdot \underbrace{\frac{1}{4x^2 - 5}}_{\text{derivada del neperiano}} \cdot \underbrace{8x}_{\text{derivada de } 4x^2 - 5} = \frac{24x \cdot (\ln(4x^2 - 5))^2}{4x^2 - 5}.$$

$$\text{b)} \quad \left(\ln \frac{3x}{x+4} \right)' = \frac{\left(\frac{3x}{x+4} \right)'}{\frac{3x}{x+4}} = \frac{\frac{12}{(x+4)^2}}{\frac{3x}{x+4}} = \frac{4}{x(x+4)}, \text{ pues } \left(\frac{3x}{x+4} \right)' = \frac{3(x+4) - 3x}{(x+4)^2} = \frac{12}{(x+4)^2}.$$

$$\text{Usando las propiedades del logaritmo: } y = \ln \frac{3x}{x+4} = \ln 3x - \ln(x+4) \Rightarrow y' = (\ln 3x)' - (\ln(x+4))' = \frac{3}{3x} - \frac{1}{x+4} = \frac{4}{x(x+4)}.$$

27. Deriva: **a)** $y = \sin^5(x^2 - 1)$; **b)** $y = \sqrt{\lg(x+4)^5}$.

Solución:

$$\text{a)} \quad y' = \underbrace{5 \cdot \sin^4(x^2 - 1)}_{\text{derivada de la quinta}} \cdot \underbrace{\cos(x^2 - 1)}_{\text{derivada del seno}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{derivada de } x^2} = 10x \cdot \sin^4(x^2 - 1) \cdot \cos(x^2 - 1).$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{\lg(x+4)^5}} \cdot \frac{1}{\cos^2(x+4)^5} \cdot \underbrace{5(x+4)^4 \cdot 1}_{\text{derivada de } (x+4)^5} = \frac{5(x+4)^4}{2\sqrt{\lg(x+4)^5} \cdot \cos^2(x+4)^5}.$$



Actividades

18. Calcula la derivada de las siguientes funciones: **a)** $y = \ln(5t^2 - 3t + 2)$; **b)** $y = \sqrt{2x - 3}$.

19. Deriva las siguientes funciones: **a)** $f(x) = 6(3x + 5)^8$; **b)** $y = (x^2 + 5)^3$.

20. Halla la derivada de: **a)** $y = \sqrt{(3x + 2)^7}$; **b)** $f(x) = \ln(2x - 1)$.

21. Deriva las siguientes funciones: **a)** $f(x) = 5e^{x^2+3x}$; **b)** $y = \ln\left(\frac{3x}{x-2}\right)$.

22. Deriva: **a)** $f(x) = \sin 2x$; **b)** $y = 7 \cos^4(2x - 3)$.

23. Halla la derivada de: **a)** $y = \lg \sqrt{x}$; **b)** $y = \cos^3 2x$.

24. Calcula la derivada de las siguientes funciones: **a)** $y = \ln \sqrt{\frac{x+3}{x-3}}$; **b)** $y = \frac{4}{5 + 3e^{-8x}}$.

25. Deriva: **a)** $y = \ln[\lg 8x]$; **b)** $y = \lg[\ln(8x)]$.

5. Derivadas sucesivas

¿Puede servir para algo hallar la tasa de variación instantánea de la derivada? Como la derivada es una función, podemos calcular su TVI, que será la derivada de la derivada. La derivada de la derivada de una función recibe el nombre de derivada segunda y se usa para estudiar la curvatura (concavidad y convexidad) de una

función. Se define como:

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}.$$

Este proceso se puede prolongar indefinidamente obteniéndose la derivada tercera f''' (que es derivar la derivada segunda), la derivada cuarta f^{IV} (derivar la derivada tercera), la derivada quinta f^V (derivar la derivada cuarta),..., la derivada n -ésima o enésima $f^{(n)}$. Observa la notación: se usan números romanos para las primeras y un paréntesis con el grado para las de orden superior (n con el fin de no confundirlas con las potencias. Estas **derivadas de órdenes superiores** se calculan con las mismas reglas que vimos para la derivada, que ahora se llama derivada primera (y simplemente derivada cuando no hay confusión posible).



Ejemplos

28. Halla la derivada segunda, tercera y cuarta de las siguientes funciones:

a) $y = x^3$; b) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $y = e^{-x}$; d) $f(x) = \ln x$; e) $y = e^{2x}$.

Solución :

a) $y' = 3x^2$; $y'' = 3 \cdot 2x = 6x$; $y''' = 6$; $y^{IV} = 0$.

b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$; $f'''(x) = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}$; $f^{IV}(x) = \frac{-15}{16\sqrt{x^7}}$.

c) $y' = -e^{-x}$; $y'' = e^{-x}$; $y''' = -e^{-x}$; $y^{IV} = e^{-x}$.

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f''(x) = -\frac{1}{x^2} = -x^{-2}$; $f'''(x) = -(-2)x^{-3} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$; $f^{IV}(x) = 2(-3)x^{-4} = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$.

e) $y' = 2e^{2x}$; $y'' = 2 \cdot 2e^{2x} = 4e^{2x}$; $y''' = 4 \cdot 2e^{2x} = 8e^{2x}$; $y^{IV} = 8 \cdot 2e^{2x} = 16e^{2x}$.

29. Halla la derivada segunda, tercera y cuarta de las siguientes funciones:

a) $y = 6x^7 - 5x^2 + 4$; b) $y = \ln 3x$; c) $f(x) = \frac{1}{x+2}$; d) $f(t) = t^3 - 2t + 1$.

Solución :

a) $y' = 6 \cdot 7x^6 - 5 \cdot 2x = 42x^6 - 10x$; $y'' = 42 \cdot 6x^5 - 10 = 252x^5 - 10$; $y''' = 252 \cdot 5x^4 = 1260x^4$;
 $y^{IV} = 1260 \cdot 4x^3 = 5040x^3$.

b) $y' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$; $y'' = -\frac{1}{x^2}$; $y''' = \frac{2}{x^3}$; $y^{IV} = -\frac{6}{x^4}$.

c) $f(x) = (x+2)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(x+2)^{-2} = -\frac{1}{(x+2)^2}$; $f''(x) = -(-2)(x+2)^{-3} = 2(x+2)^{-3} = \frac{2}{(x+2)^3}$;

$f'''(x) = 2(-3)(x+2)^{-4} = -6(x+2)^{-4} = -\frac{6}{(x+2)^4}$; $f^{IV}(x) = -6(-4)(x+2)^{-5} = 24(x+2)^{-5} = \frac{24}{(x+2)^5}$.

d) $f'(t) = 3t^2 - 2$; $f''(t) = 6t$; $f'''(t) = 6$; $f^{IV}(t) = 0$.

30. Calcula la derivada segunda de: **a)** $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$; **b)** $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Solución :

a) $y' = 3x^2 - \frac{9}{2} \cdot 2x + 6 = 3x^2 - 9x + 6$; $y'' = 6x - 9$.

b) $f'(x) = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$; $f''(x) = \frac{-2x(x^2 - 1)^2 - (-x^2 - 1) \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x^{(1)}}{(x^2 - 1)^4}$
 $= \frac{(x^2 - 1)[-2x(x^2 - 1) - 4x(-x^2 - 1)]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{-2x^3 + 2x + 4x^3 + 4x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$.

En ⁽¹⁾ sacamos factor común en el numerador. Como el factor común coincide con el denominador, simplificamos, de modo que el denominador no queda elevado a 4 sino a 3. Como también disminuye el grado del numerador, queda una fracción algebraica más sencilla. Este procedimiento lo podemos realizar siempre que derivemos fracciones algebraicas y es la razón de no desarrollar el cuadrado del denominador.



Actividades

26. Halla la derivada primera, segunda, tercera y cuarta de:

a) $y = e^{5x}$; **b)** $y = \frac{2}{x-5}$; **c)** $y = \ln \frac{x}{2}$.

27. Calcula la derivada segunda de:

a) $y = \frac{1}{2-x^2}$; **b)** $y = \frac{x}{x^2+4}$; **c)** $f(x) = \frac{x^2+4}{x}$; **d)** $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{7} + 2x - 1$; **e)** $y = \frac{x^3}{x^2-4}$.



Para saber más...

Al aplicar la definición de la derivada hicimos notar que, para que exista la derivada de una función en un punto, la función debe ser continua en dicho punto. La continuidad es una condición previa, por lo tanto, necesaria; sin embargo, no es suficiente, es decir, no todas las funciones continuas son derivables. Observa lo que le ocurre a $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ en $x = 0$. Claramente la función es continua, pues $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, pero no es derivable, porque

$$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{0} \Rightarrow \nexists f'(0) \Rightarrow \text{no es derivable en } x = 0.$$

El ejemplo más habitual para ver que la continuidad es condición necesaria pero no suficiente es el valor absoluto $|x|$.

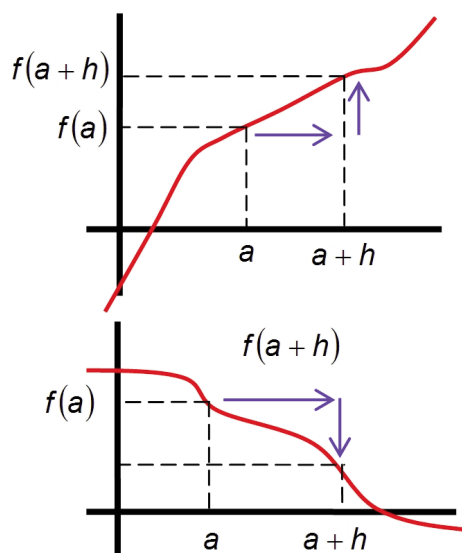
Sabemos que $|x|$ es continua en $x = 0$; si intentamos calcular la derivada usando la definición $\left(f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \right)$, nos

encontramos con que no sabemos qué valor tomar para $f(h)$, pues será $-h$ ó h , dependiendo de si $h \rightarrow 0^-$ o si $h \rightarrow 0^+$, respectivamente. Este ejemplo permite la introducción de las derivadas laterales. En este caso,

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1; f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Como las derivadas laterales no coinciden, $\nexists f'(0)$ y se dice que $|x|$ tiene un punto anguloso en $x = 0$.

6. Crecimiento y decrecimiento de las funciones

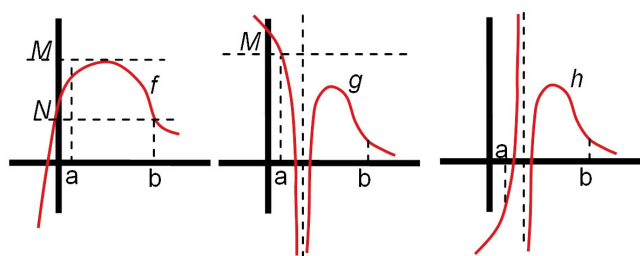


Una función es **creciente** en un punto $x = a$ cuando $f(a+h) \geq f(a)$, $h > 0$ y estrictamente creciente cuando $f(a+h) > f(a)$, $h > 0$. Es **decreciente** cuando $f(a+h) \leq f(a)$, $h > 0$ y estrictamente decreciente cuando $f(a+h) < f(a)$, $h > 0$. Una función es creciente (decreciente) en un intervalo (a, b) cuando es creciente (decreciente) en todos los puntos de dicho intervalo.

Las definiciones se corresponden con la idea gráfica (es creciente si al aumentar x aumenta el valor de la función y decreciente si ocurre al contrario), pero son poco operativas: para saber si una función crece o decrece en un intervalo hay que ir punto a punto, tarea imposible. Hay que buscar definiciones alternativas que sean más fáciles de manejar, y que veremos en el apartado 8.

7. Extremos de las funciones: máximos y mínimos

Los extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado $[a, b]$ son el mayor y el menor valor que toma la función en dicho intervalo. Estos valores reciben el nombre de máximo y mínimo absoluto, respectivamente.



La existencia o inexistencia de extremos absolutos está relacionada con la acotación o no acotación de la función en $[a, b]$. Así, f , que está acotada en $[a, b]$, tiene un máximo absoluto M y un mínimo absoluto N ; g , que no está acotada inferiormente en $[a, b]$, carece de mínimo absoluto, pero tiene máximo absoluto, que coincide con $g(a)$; h , que no está acotada en $[a, b]$, no tiene ni máximo ni mínimo absoluto.

El caso de f es el de las funciones continuas en un intervalo: tienen extremos absolutos porque están acotadas en dicho intervalo. Como g y h presentan una discontinuidad inevitable de salto infinito en el intervalo, al menos no estarán acotadas superior o inferiormente. Así, puede haber algún extremo absoluto, como es el caso de g , o ninguno, como es el caso de h .

8. Funciones derivables

8.1. Crecimiento y decrecimiento para funciones derivables

Una **función es derivable** en un punto cuando tiene derivada en dicho punto y, por extensión, es derivable en R cuando tiene derivada en todos los puntos de R .

De las funciones que hemos tratado, pueden presentar problemas en su derivabilidad las funciones definidas a trozos y los cocientes, como veremos en Matemáticas II, donde trataremos este tema con mayor profundidad.

Ahora nos interesa la derivabilidad para buscar las definiciones alternativas que mencionamos en el apartado 6:

si la función es estrictamente creciente, $f(a+h) - f(a) > 0 \Rightarrow \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$, $h > 0$. Recordando la definición de derivada en un punto, vemos que si f es creciente en $x = a$, entonces $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$, $h > 0$. A la inversa, si $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} > 0$, $h > 0$, entonces $f(a+h) - f(a) > 0 \Rightarrow f(a+h) > f(a)$, por lo que f es creciente en $x = a$.

Así, f es **creciente** en $x = a$ si y sólo si $f'(a) > 0$ y **decreciente** en $x = a$ si y sólo si $f'(a) < 0$.

No hay que perder de vista que para poder hacer estas afirmaciones debe existir $f'(a)$, es decir, la función ha de ser derivable en el punto para poder usar este criterio.

Al usar esta segunda definición convertimos el estudio del crecimiento y del decrecimiento en el estudio del signo de la derivada de la función.

Podemos concluir que una función f es creciente en un intervalo (a,b) si f' es positiva en todos los puntos del intervalo y es decreciente si f' es negativa en todos los puntos del intervalo.

Al crecimiento y decrecimiento de una función también se le denomina **monotonía**.



Ejemplos

31. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

Solución:

Calculamos su derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$

Construimos la siguiente tabla para estudiar el signo de f' y simultáneamente indicar el comportamiento de la función. Se observa que f es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, \infty)$ y creciente en $(0, 4)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 4)$	$(4, \infty)$
$\text{sgn}(f'(x))$	-	+	-
f	D↓	C↑	D↓

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

32. Dada la curva $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ halla sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución :

Al ser una fracción algebraica, calculamos su derivada e igualamos a cero su numerador y su denominador

$$\text{independientemente: } y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{NUM} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 0 \Rightarrow \text{NUM} > 0 \\ \text{DEN} = 0 \Rightarrow (x^2 - 1)^2 > 0 \text{ en } R - \{\pm 1\} \end{array} \right\} \Rightarrow y' < 0 \text{ en } R - \{\pm 1\} \Rightarrow$$

y es decreciente en $R - \{\pm 1\}$, es decir, y es decreciente en su dominio.

33. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = xe^{-2x}$.

Solución :

$$f'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x} \cdot (-2) \Rightarrow f'(x) = (1 - 2x)e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}. f \text{ es creciente en } (-\infty, \frac{1}{2}) \text{ y decreciente en } (\frac{1}{2}, \infty).$$

	$(-\infty, 1/2)$	$(1/2, \infty)$
$\text{sgn}(f'(x))$	+	-
f	C↑	D↓



Actividades

28. Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

29. Averigua los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $y = (2x - 3)^3$.

30. Estudia la monotonía de la función $y = (x^2 + x - 11) \cdot e^x$.

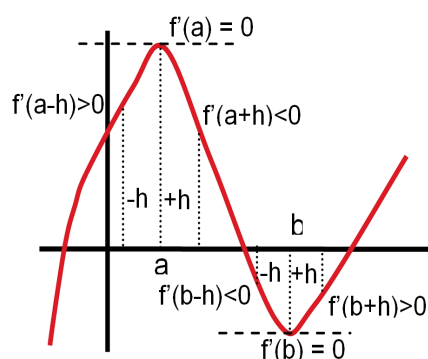
31. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = (3x - 2) \cdot e^{4x-1}$.

32. Averigua los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \frac{1 - x^2}{(x + 3)^2}$.

33. Estudia la monotonía de la función $y = \frac{2x^2 - 5}{x + 8}$.

34. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $y = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x$.

8.2. Máximos y mínimos para funciones derivables



Las funciones derivables pueden tener otros extremos distintos a los absolutos: son los **extremos relativos** o **puntos singulares**, de gran importancia. En estos puntos la recta tangente a la curva es horizontal (paralela al eje OX), por lo que ahí se anula la derivada. Si la derivada es continua, hay dos posibilidades para la función:

- que sea creciente a la izquierda y decreciente a la derecha (punto $x = a$ del gráfico): la función tiene un máximo relativo en dicho punto;
- que sea decreciente a la izquierda y creciente a la derecha (punto $x = b$ del gráfico): la función tiene un mínimo relativo en dicho punto.

Éste es un método útil para averiguar los extremos relativos cuando se dispone de la tabla de crecimiento.

Otro procedimiento usa la derivada segunda. Observando la gráfica, y teniendo en cuenta la definición de derivada segunda, tenemos que:

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h)}{h} < 0; \quad f''(b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(b+h) - f'(b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(b+h)}{h} > 0.$$

f tiene un **extremo relativo** en x_0 cuando $f'(x_0) = 0$. Es un **máximo relativo** cuando $f''(x_0) < 0$ y un **mínimo relativo** cuando $f''(x_0) > 0$.

Este segundo método puede dar problemas si también $f''(x_0) = 0$. En este caso recurrimos a la tabla de crecimiento y usamos el primer método.

Al tratarse de extremos relativos puede ocurrir que el máximo relativo sea menor que el mínimo relativo. Esto ocurre en algunas funciones racionales (ejemplo 38).



Ejemplos

34. Calcula las coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$.

Solución :

$$f'(x) = 4x - x^2 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x(4-x) = 0 \Rightarrow x = 0, 4.$$

$$f''(x) = 4 - 2x \Rightarrow f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } (0, f(0)) = (0, 0).$$

$$f''(4) = -4 < 0 \Rightarrow \text{máximo en } (4, f(4)) = \left(4, \frac{32}{3}\right).$$

35. Calcula las coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x) = (x-3)^4$.

Solución :

$$f'(x) = 4(x-3)^3 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 3 (\text{triple}) \text{ punto singular.}$$

$$f''(x) = 12(x-3)^2 \Rightarrow f''(3) = 0 \Rightarrow \text{este resultado no nos permite saber si es máximo o mínimo relativo.}$$

Recurrimos a la tabla de crecimiento.

	$(-\infty, 3)$	$(3, \infty)$
sgn f'	-	+
f	D↓	C↑

A la vista de la tabla, concluimos que f tiene un mínimo relativo en el punto $(3, f(3)) = (3, 0)$.

Para este caso hay otro procedimiento alternativo en el que hay que recurrir a derivadas de órdenes superiores.

Sin embargo, la tabla de crecimiento no ofrece ambigüedad alguna.

36. Calcula las coordenadas de los máximos y mínimos relativos de $f(x) = (x+7)^5$.

Solución :

$$f'(x) = 5(x+7)^4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = -7 (\text{cuádruple}) \text{ punto singular.}$$

$f''(x) = 20(x+7)^3 \Rightarrow f''(-7) = 0 \Rightarrow$ no podemos concluir si es máximo o mínimo. Recurriendo al crecimiento observamos que $f'(x) > 0$ en $\mathbb{R} - \{-7\} \Rightarrow f$ siempre es creciente, por lo que no tiene ni máximo ni mínimo. Más adelante veremos que $x = -7$ es un punto de inflexión de f .

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

37. Dada $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$, halla sus máximos y sus mínimos relativos.

Solución:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 9) - 2x \cdot x^2}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-18x}{(x^2 - 9)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -18x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ punto singular.}$$

$$f''(x) = \frac{-18(x^2 - 9)^2 - (-18x) \cdot 2(x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} = \frac{(x^2 - 9)[-18(x^2 - 9) + 18x \cdot 2 \cdot 2x]}{(x^2 - 9)^4} \Rightarrow f''(x) = \frac{54x^2 + 162}{(x^2 - 9)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(0) = \frac{162}{(-9)^3} = -\frac{2}{9} < 0 \Rightarrow \text{máximo para } x = 0, f(0) = 0.$$

La función sólo presenta un máximo en el origen de coordenadas $O(0,0)$.

38. Averigua los máximos y mínimos relativos de $g(x) = \frac{x^2}{x+2}$.

Solución:

$$g'(x) = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = -4, 0; g''(x) = \frac{8}{(x+2)^3} \Rightarrow g''(-4) = -1 < 0 \Rightarrow \text{máximo en } (-4, g(-4)) =$$

$$= (-4, -8); g''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{mínimo en } (0, g(0)) = (0, 0).$$

Observa que el máximo es menor que el mínimo.

39. Calcula los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$.

Solución:

Construiremos la tabla de crecimiento, método más sencillo en este caso:

	$(-\infty, 3/2) - \{1\}$	$(3/2, \infty) - \{2\}$
$\text{sgn } f'(x)$	$\frac{+}{+} = +$	$\frac{-}{+} = -$
f	$C \uparrow$	$D \downarrow$

$$f'(x) = \frac{3-2x}{(x^2 - 3x + 2)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ punto singular.}$$

$$\text{La función tiene un máximo en } \left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = \left(\frac{3}{2}, -4\right).$$

40. Se sabe que la función $f(x) = x^2 + ax + b$ tiene un mínimo en $x = 2$ y que su gráfica pasa por el punto $(2,2)$. ¿Cuánto vale la función en $x = -1$?

Solución:

Primero averiguamos el valor de los coeficientes a y b a partir de las condiciones que se dan y después el valor pedido:

$$\text{Mínimo en } x = 2, f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 2x + a \Rightarrow f'(2) = 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4.$$

$$\text{La gráfica pasa por } (2,2) \Rightarrow f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + b = 2 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 6.$$

$$\text{Por lo tanto, } f(-1) = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) + 6 = 11.$$



Actividades

35. Calcula los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$; b) $y = (2x - 3)^3$; c) $y = (x^2 + x - 11) \cdot e^x$.

36. Calcula los máximos y mínimos relativos de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 4x$; b) $y = (4x + 1)^4$; c) $y = \frac{2x^2 - 5}{x + 8}$.

9. Problemas de máximos y mínimos

Optimizar una función consiste en buscar sus extremos relativos.

Si se trata de hacer exactamente lo mismo que en el apartado anterior, ¿por qué lo separamos? La razón es que, cuando hablamos de calcular los máximos y mínimos, damos por hecho que nos dan la función que debemos optimizar, mientras que si decimos optimizar sobreentendemos que hemos de construir la función que se ha de optimizar, que es el paso realmente complicado y diferente al del anterior apartado.

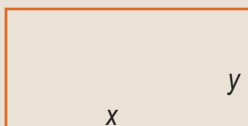
El tipo de problemas al que se le puede aplicar la técnica de **optimización de funciones** es extensísimo, por lo que no se pueden dar unas pautas fijas, sino unas orientaciones que ayuden a resolverlo. Habitualmente nos tendremos que apoyar en conocimientos aritméticos, algebraicos o geométricos previos y una lectura detallada, que nos permita averiguar cuál será y qué forma tendrá la función que hemos de optimizar.



Ejemplos

41. Halla las dimensiones del rectángulo que teniendo 32 m de perímetro tenga área máxima.

Solución:



Podemos hacer un pequeño gráfico donde escribir las variables que usaremos y después seguir la siguiente estrategia:

- escribimos primero la **función que tenemos que optimizar**. En este caso es el área, que consta de dos variables: $A(x,y) = x \cdot y$.

- Como sólo sabemos manejar funciones de una variable, hemos de encontrar una **relación entre las variables**. En este caso, dicha relación la proporciona el perímetro: $2x + 2y = 32 \Rightarrow x + y = 16$.
- Despejamos una de las variables en función de la otra en nuestra relación, la sustituimos en la función que hay que optimizar y queda una función con una única variable, a la que aplicamos el método habitual para el cálculo de los extremos relativos: $y = 16 - x \Rightarrow A(x) = x \cdot (16 - x) = 16x - x^2$.

Antes de derivar podemos detenemos un momento en la función: se trata de una función cuadrática (parábola) cuyo vértice es un máximo (pues el coeficiente de x^2 es negativo), que es lo que buscamos. La función está bien construida.

$A'(x) = 16 - 2x \Rightarrow A'(x) = 0 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow A''(x) = -2 \Rightarrow A''(8) = -2 < 0 \Rightarrow A(x,y)$ es máxima para $x = 8$ cm, $y = 16 - 8 = 8$ cm. Por lo tanto, el rectángulo de área máxima y perímetro 32 cm es un cuadrado de lado 8 cm y área 64 cm^2 .

Conviene finalizar dando el valor de las variables que optimizan la función, el valor optimizado de dicha función y una somera explicación del resultado obtenido.

42. Descomponer el número 11 en dos sumandos positivos de forma que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo.

Solución:

Se trata de un problema aritmético. Llamamos x a uno de los sumandos y y al otro. Siguiendo los pasos del ejemplo 41 escribimos:

Función que se debe optimizar: $P(x,y) = x \cdot y^2$.

Relación entre las variables: $x + y = 11$.

Despejamos x : $x = 11 - y$; Sustituimos en $P(x,y)$: $P(y) = (11 - y) \cdot y^2 = 11y^2 - y^3 \Rightarrow P'(y) = 22y - 3y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P'(y) = 0 \Rightarrow y = 0, \frac{22}{3} \Rightarrow P''(y) = 22 - 6y \Rightarrow P''(0) = 22 > 0 \Rightarrow \text{mínimo para } y = 0; P''\left(\frac{22}{3}\right) = -22 < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{máximo para } y = \frac{22}{3}, x = \frac{11}{3}. \text{ El producto máximo es } P_{\max} = \frac{11 \cdot 22^2}{3 \cdot 3^2} = \frac{5324}{27}.$$

Observa que manejamos la variable y como la x , porque ahora ambas son variables independientes, siendo las dependientes el producto y la suma.

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

43. Se dispone de una barra de hierro de 20 metros para construir una portería, de manera que la portería tenga la máxima superficie interior posible.

a) ¿Qué longitud deben tener los postes y el larguero?

b) ¿Qué superficie máxima interior tiene la portería?

Solución:

Se trata de construir tres lados de un rectángulo (el cuarto será el suelo donde se apoya la portería) de modo que su superficie sea máxima. Llamando x a la base e y a la altura queda:

Función que se debe optimizar: $A(x,y) = x \cdot y$.

Relación entre las variables: $x + 2y = 20$.

Por comodidad despejamos x obteniendo: $x = 20 - 2y \Rightarrow$ La función a optimizar es $A(y) = (20 - 2y) \cdot y = 20y - 2y^2$ (parábola con máximo); $A'(y) = 20 - 4y \Rightarrow A'(y) = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow A''(y) = -4 \Rightarrow A''(5) = -4 < 0$.

a) Máximo para $y = 5$ m; $x = 10$ m; b) $A_{\max} = 50$ m².

44. Se desea construir cajas de embalaje en forma de prisma cuadrangular de modo que la suma de las aristas sea 30. ¿Cuáles han de ser las dimensiones para que la capacidad de las cajas sea máxima?

Solución:

Parece un problema con 3 variables, puesto que un prisma tiene volumen (ésta es su capacidad), pero al ser cuadrangular (su base es un cuadrado), sólo habrá 2 variables. Recordando las fórmulas para el prisma podemos escribir:

Función a optimizar: $V(x,y) = A_{\text{base}} \cdot h = x^2 \cdot y$.

Relación entre las variables: $2x + y = 30$.

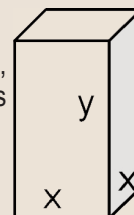
Despejamos y (si es x hay que desarrollar innecesariamente un binomio al cuadrado):

$$y = 30 - 2x \Rightarrow V(x) = x^2 (30 - 2x) = 30x^2 - 2x^3.$$

$$V'(x) = 60x - 6x^2 \Rightarrow V'(x) = 0 \Rightarrow 6x(10 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (absurda)}, x = 10.$$

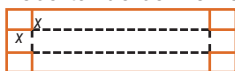
$$V''(x) = 60 - 12x \Rightarrow V''(0) = 60 > 0 \Rightarrow \text{mínimo}; V''(10) = -60 \Rightarrow \text{máximo} \Rightarrow \text{La caja tiene capacidad máxima para } x = 10 \text{ u; } y = 30 - 2 \cdot 10 = 10 \text{ u, valiendo } V_{\max} = 1000 \text{ u}^3.$$

Escribimos u como unidad de longitud y u^3 como la de volumen al no especificarse ninguna unidad de medida. Observa la regularidad: si queremos rectángulos de área máxima aparecen cuadrados, y si queremos prismas cuadrangulares de volumen máximo aparecen hexaedros regulares (cubos).

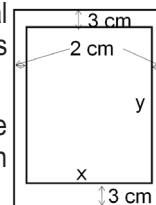


Actividades

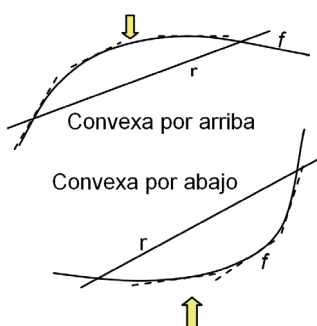
37. Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 60 cm x 40 cm un cuadrado de lado x y doblando convenientemente se construye una caja (ver figura adjunta). Calcula x para que el volumen de dicha caja sea máximo.



38. Un granjero dispone de 5 000 € para cercar una porción rectangular de terreno adyacente a un río, usando a este como un lado del área cercada, es decir, construirá 3 cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 8 € por metro instalado, y el de la cerca para cada uno de los dos lados restantes es de 6 € por metro instalado. Calcula las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.
39. Se quiere construir el marco de una ventana rectangular de 4 m². El metro lineal de tramo horizontal cuesta 7,5 €, mientras que el metro lineal de tramo vertical cuesta 15 €. Determina: a) las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo; b) cuánto cuesta el marco.
40. Una hoja de papel debe tener un perímetro de 60 cm, márgenes superior e inferior de 3 cm de altura y márgenes laterales de 2 cm de anchura. Obtén razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.



10. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión



Una función presenta dos **curvaturas** diferentes, definidas a partir de una recta secante: si la función va por encima de la recta, decimos que es convexa por arriba, convexa o que tiene la forma $\cap$. Si va por debajo de la recta podemos decir que es convexa por abajo, cóncava o que tiene la forma $\cup$. Tanto nombre se debe a que podemos mirar la función desde dos posiciones diferentes (arriba y abajo) y a que los comportamientos son complementarios (lo que desde una posición es convexo, por la otra será cóncavo y viceversa). Para evitar meternos en discusiones, calificamos uno u otro comportamiento con su representación gráfica $\cap$ ó $\cup$.

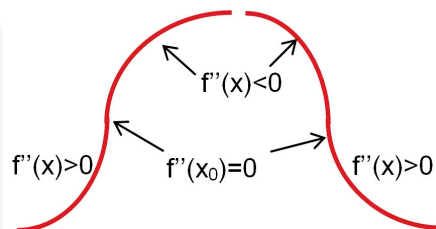
Como ocurre con el crecimiento, la definición no es útil para los cálculos, por lo que hay que encontrar otro procedimiento mejor. Cuando la función es convexa por arriba, su derivada decrece (líneas punteadas de la gráfica), por lo que su derivada segunda será negativa; cuando la función es convexa por abajo, la derivada crece (líneas punteadas de la gráfica), por lo que la derivada segunda será positiva (observa que coincide con lo obtenido para los extremos relativos). Por lo tanto, estudiar la curvatura de una función consiste en estudiar el signo de su derivada segunda:

f es $\cap$ en aquellos intervalos en los que $f''(x) < 0$.

f es $\cup$ en aquellos intervalos en los que $f''(x) > 0$.

f tiene un **punto de inflexión** en aquellos puntos en los que $f''(x) = 0$.

Un **punto de inflexión** es aquel en el que la función cambia su curvatura de forma continua.



Ejemplos

45. Estudia la curvatura de la función $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$.

Solución:

	$(-\infty, 7/2)$	$(7/2, \infty)$
$\text{sgn } 12x - 42$	-	+
f	$\cap$	$\cup$

Tenemos que calcular la derivada segunda, igualarla a cero y estudiar su signo:

$$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60; f''(x) = 12x - 42 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{42}{12} = \frac{7}{2}$$

La función tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{7}{2}, f\left(\frac{7}{2}\right)\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

46. Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = \frac{3x^2 - x}{x + 2}$.

Solución:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$\text{sgn} \left(\frac{28}{(x+2)^3} \right)$	-	+
f	$\cap$	$\cup$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 12x - 2}{(x+2)^2}; f''(x) = \frac{(6x+12)(x+2)^2 - (3x^2 + 12x - 2) \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4}$$

sacando $(x+2)$
factor común
 $\Rightarrow$
y simplificando

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{(6x+12)(x+2) - 2 \cdot (3x^2 + 12x - 2)}{(x+2)^3} = \frac{28}{(x+2)^3} \Rightarrow \begin{cases} \text{NUM} > 0 \\ \text{DEN} = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

La función cambia de curvatura en $x = -2$, pero no tiene punto de inflexión pues no lo hace con continuidad $f''(x) \neq 0$ y $\nexists f''(-2)$, sino en la asíntota vertical de la función.

Este comportamiento es habitual en las fracciones algebraicas. Para obtenerlo hay que simplificar en la derivada segunda, sacando factor común en el numerador antes de operar. En caso contrario el denominador sería un binomio a la cuarta, siempre positivo, y el numerador se anularía, apareciendo un falso punto de inflexión. Podemos darnos cuenta del error porque la abscisa de este falso punto de inflexión coincide con la de la asíntota vertical, con lo que la derivada segunda en ese punto sería una indeterminación $\frac{0}{0}$, que se convierte en ∞ ó $-\infty$ al ser resuelta.

47. Determina los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Solución:

	$(-\infty, 0)$	$x = -2$
$\text{sgn} \frac{2}{x^3}$	-	+
f	$\cap$	$\cup$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}; f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} \text{NUM} > 0 \Rightarrow \text{no tiene puntos de inflexión} \\ \text{DEN} = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (triple)} \end{cases}$$

La función cambia su curvatura en su asíntota vertical, por lo que no tiene punto de inflexión.

48. Estudia la curvatura de la función $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 4x + 2)$.

Solución:

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn}[e^x(x^2 - 4)]$	+	-	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

$$f'(x) = e^x \cdot (x^2 - 2x - 2); f''(x) = e^x \cdot (x^2 - 4) \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

f tiene dos puntos de inflexión: $(-2, f(-2)) = (-2, 14e^{-2}) \cong (-2; 1,8947)$,
 $(2, f(2)) = (2, -2e^2) \cong (2; -14,7781)$

49. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4$.

Solución:

$$f'(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x; f''(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (doble)} \Rightarrow f''(x) = (x+1)^2 > 0 \text{ en } \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow f \text{ es } \cup \text{ en } \mathbb{R} - \{-1\} \text{ y no tiene punto de inflexión.}$$

50. Estudia la curvatura de $f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{x^2}$.

Solución:

	$(-\infty, 2) - \{0\}$	$(2, \infty)$
$\text{sgn}\left(\frac{12-6x}{x^4}\right)$	+	-
f	$\cup$	$\cap$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{3x - 4}{x^3} \Rightarrow f''(x) = \frac{12 - 6x}{x^4} \Rightarrow \begin{cases} \text{NUM} = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{DEN} > 0 \end{cases}$$

La función tiene un punto de inflexión en $(2, f(2)) = (2, 0)$. En este caso, la asíntota vertical $x = 0$ no cambia la curvatura.



Actividades

41. Estudia la curvatura y halla las coordenadas de los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$; b) $y = (2x - 3)^3$.

42. Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son cóncavas y convexas, así como las coordenadas de sus puntos de inflexión, si los tienen: a) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$; b) $y = \frac{x^2}{x^2 - 9}$; c) $y = \frac{2x^2 - 5}{x + 8}$.

43. Estudia la curvatura y averigua los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$; b) $y = (x + 1)e^{-3x}$; c) $y = \ln(x^2 + 1)$; d) $y = (x^2 + x)e^{x-1}$.

44. Halla los intervalos en los que las siguientes funciones son cóncavas y convexas, así como las coordenadas de sus puntos de inflexión, si los tienen: a) $y = e^{-x^2}$; b) $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$; c) $y = \frac{x}{x^2 + 2}$; d) $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x^2 + 5$.

11. Representación gráfica de funciones polinómicas de grado superior a dos y funciones racionales

Las funciones que van apareciendo presentan una complejidad cada vez mayor, por lo que requieren de métodos más sofisticados para su estudio. Ya no podemos conocer su comportamiento mediante una tabla de valores, como ocurre con las lineales, o a través de algunas sencillas propiedades, como pasa con las cuadráticas o las de proporcionalidad inversa más sencillas.

Debemos desechar la pretensión de conocer exactamente lo que hace una función punto a punto para centrarnos en aquellos puntos y propiedades que realmente caracterizan a la función. Por lo tanto, nuestra pregunta es: ¿qué necesitamos estudiar de la función para conocerla con detalle? Todo lo que hay que estudiar ya lo hemos tratado (signo de la función, asíntotas, puntos singulares...) y lo que vamos a ver aquí es cómo ajustar convenientemente toda la información obtenida, de modo que el puzzle encaje y no aparezcan resultados contradictorios.

Los **pasos** para efectuar el **estudio de una función** son los siguientes:

1. Cálculo del dominio de la función.
2. Estudio de la simetría y de la periodicidad.
3. Cálculo de los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.
4. Estudio del signo de la función.
5. Cálculo de las asíntotas y de la forma en la que la función se acerca a ella.
6. Estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento).
7. Cálculo de los puntos singulares (máximos y mínimos relativos).
8. Estudio de la curvatura (concavidad y convexidad) y cálculo de los puntos de inflexión.

Los 5 primeros pasos se sacan directamente de la función; 6º y 7º, de la derivada primera; 8º de la derivada segunda (también en el 7º podemos necesitar esta derivada). Lógicamente, las informaciones obtenidas en los distintos pasos no deben entrar en contradicción las unas con las otras. Si ocurriera esto último, hay que pensar que nos hemos confundido en algún punto y repetir los cálculos pertinentes hasta que desaparezcan las incongruencias.

Para la **representación gráfica** se suele proceder de la forma siguiente:

1. Marcamos los puntos de corte y los singulares. En estos últimos hacemos un arco $\cap$ para un máximo y $\cup$ para un mínimo.
2. Representamos las asíntotas y el comportamiento de la función en sus proximidades.
3. Unimos los puntos y las líneas ya representadas.

Como interesa destacar las propiedades más relevantes de la función, la representación no suele hacerse a escala, para que ésta no desvirtúe dichas propiedades.

UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES



Ejemplos

51. Estudia y representa la función $y = x^3 - 4x^2 + 4x$.

Solución:

i) Dominio: como es un polinomio, $\text{Dom } y = \mathbb{R}$.

ii) Simetría: $y(-x) = (-x)^3 - 4(-x)^2 + 4(-x) = -x^3 - 4x^2 - 4x \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ no es simétrica.

iii) Puntos de corte con los ejes:

$$f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 4) = 0 \Rightarrow x = 0, 2(\text{doble}) \Rightarrow (0,0); (2,0).$$

$$f \cap OY \Rightarrow (0, f(0)) = (0,0).$$

iv) Signo: $y = x(x-2)^2$. Al ser $x = 2$ solución doble, no influye en el signo, ya que el factor está elevado al cuadrado, siendo siempre positivo (salvo en $x = 2$ que sería cero). Se descompone la recta real en dos trozos.

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty) - \{2\}$
$\text{sgn } y$	-	+

v) Asintotas: AV: como se trata de una función polinómica no tiene asíntotas verticales.

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^3 - 4x^2 + 4x) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \begin{cases} -\infty, & \text{cuando } x \rightarrow -\infty \\ \infty, & \text{cuando } x \rightarrow \infty \end{cases}$ no tiene AH.

A Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = \infty \Rightarrow$ no tiene A Ob.

Al ser una función polinómica de grado superior al primero, no tiene asíntotas de ningún tipo. Los límites en el infinito permiten averiguar hacia dónde va la función.

vi) Monotonía: $y' = 3x^2 - 8x + 4 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}, 2$.

	$(-\infty, 2/3)$	$(2/3, 2)$	$(2, \infty)$
$\text{sgn } y'$	+	-	+
y	C↑	D↓	C↑

vii) Puntos singulares: máximo en el punto $\left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{32}{27}\right)$ y un mínimo

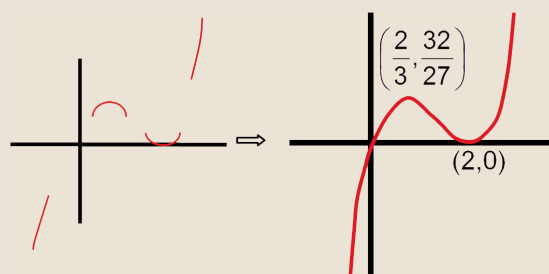
en $(2, f(2)) = (2, 0)$.

viii) Curvatura: $y'' = 6x - 8 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$.

	$(-\infty, 4/3)$	$(4/3, \infty)$
$\text{sgn } y''$	-	+
y	∩	∪

Punto de inflexión $\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$.

Te recordamos que todas las ordenadas de los puntos se calculan en la función, no en sus derivadas.



52. Estudia y representa la función $y = x^4 - x^2 - 2$.

Solución :

i) Dominio: como es un polinomio, $Dom\ y = \mathbb{R}$.

ii) Simetría: $y(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 - 2 = x^4 - x^2 - 2 = y(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto al eje OY.

iii) Puntos de corte con los ejes:
$$\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \xRightarrow[\text{bicuadrada}]{\text{ecuación}} x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow (-\sqrt{2}, 0), (\sqrt{2}, 0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = -2 \Rightarrow (0, -2) \end{cases}$$

iv) Signo:

	$(-\infty, \sqrt{2})$	$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	$(\sqrt{2}, \infty)$
$sgn(x^4 - x^2 - 2)$	+	-	+

v) Asíntotas:

AV: no tiene asíntotas verticales por ser un polinomio.

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^4 - x^2 - 2) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = \infty \Rightarrow$ no tiene asíntota horizontal.

A Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 - x^2 - 2}{x} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^3 = \pm\infty \Rightarrow$ no tiene asíntota oblicua.

vi) Monotonía: $y' = 4x^3 - 2x \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

vii) Puntos singulares: mínimos en $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right) =$

$$= \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-9}{4}\right) y \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-9}{4}\right)$$

y máximo en $(0, 5)$.

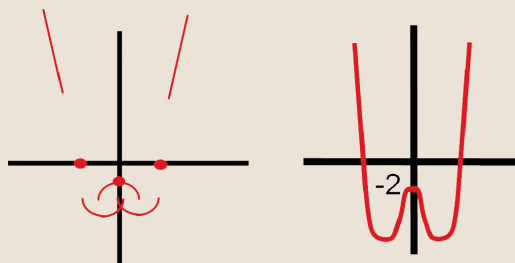
	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right)$
$sgn\ y'$	-	+	-	+
y	D↓	C↑	D↓	C↑

viii) Curvatura: $y'' = 12x^2 - 2 \Rightarrow y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Puntos de inflexión: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, y\left(\frac{-\sqrt{6}}{6}\right)\right) = \left(\frac{-\sqrt{6}}{6}, \frac{-77}{36}\right),$

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, y\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{-77}{36}\right).$$

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \infty\right)$
$sgn\ y''$	+	-	+
y	∪	∩	∪



UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

53. Estudia y representa la función $y = \frac{x-7}{x+2}$.

Solución :

i) Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow Dom y = R - \{-2\}$.

ii) Simetría: $y(-x) = \frac{-x-7}{-x+2} \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ no es simétrica.

iii) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow NUM = 0 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow (7, 0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = \frac{-7}{2} \Rightarrow \left(0, -\frac{7}{2}\right) \end{cases}$.

iv) Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 7 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 7)$	$(7, \infty)$
$sgn y$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{-}{+} = -$	$\frac{+}{+} = +$

v) Asíntotas:

$$AV: x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-7}{x+2} = \frac{-9}{0^-} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-7}{x+2} = \frac{-9}{0^+} = -\infty \end{cases}; AH: \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-7}{x+2} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1 \Rightarrow y_H = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - y_H = \frac{x-7}{x+2} - 1 = \frac{-9}{x+2} = \begin{cases} > 0, \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y > y_H \\ < 0, \text{ cuando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y < y_H \end{cases}; \text{ no tiene A Ob por tener AH.}$$

vi) Monotonía: $y' = \frac{9}{(x+2)^2} \Rightarrow y' > 0$ en $R - \{-2\} \Rightarrow y$ es creciente en todo su dominio.

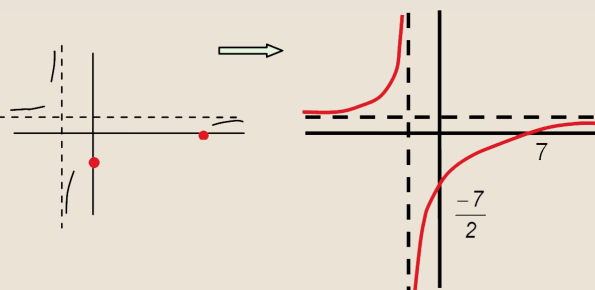
vii) No tiene puntos singulares, porque $y' \neq 0$.

viii) Curvatura: $y'' = \frac{-18}{(x+2)^3} \begin{cases} NUM < 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$.

No tiene puntos de inflexión, pues $y' \neq 0$.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$sgn y''$	$+$	$-$
y	$\cup$	$\cap$

Esta función también se puede representar mediante el procedimiento que vimos en la **Unidad 8** para las funciones de proporcionalidad inversa, como es este caso. Evidentemente los resultados coinciden.



54. Estudia y representa la función $y = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5}$.

Solución :

i) Dominio: $DEN = 0 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow Dom y = R - \{5\}$.

ii) Simetría: $y(-x) = \frac{(-x)^2 - 5(-x) + 4}{-x - 5} = \frac{x^2 + 5x + 4}{-x - 5} \begin{cases} \neq y(x) \\ \neq -y(x) \end{cases} \Rightarrow$ no es simétrica.

iii) Puntos de corte con los ejes: $\begin{cases} f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1, 4 \Rightarrow (1, 0); (4, 0) \\ f \cap OY \Rightarrow y(0) = -\frac{4}{5} \Rightarrow \left(0, -\frac{4}{5}\right) \end{cases}$.

iv) Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 1, 4 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = 5 \end{cases}$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 4)$	$(4, 5)$	$(5, \infty)$
sgn y	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{-}{-} = +$	$\frac{+}{-} = -$	$\frac{+}{+} = +$

v) Asíntotas: AV: $x = 5 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \frac{4}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} = \frac{4}{0^+} = \infty \end{cases};$

AH: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty \Rightarrow$ no tiene AH;

A Ob: $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 5x} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1; n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x - 5} = 0 \Rightarrow y_{Ob} = x$. Se

acercas del modo siguiente: $y - y_{Ob} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 5} - x = \frac{4}{x - 5} \Rightarrow \operatorname{sgn}(y - y_{Ob}) = \operatorname{sgn}\left(\frac{4}{x - 5}\right) \approx$

$\approx \operatorname{sgn}\left(\frac{4}{x}\right) = \begin{cases} < 0, \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y < y_{Ob} \\ > 0, \text{ cuando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y > y_{Ob} \end{cases}$

vi) Monotonía: $y' = \frac{x^2 - 10x + 21}{(x - 5)^2} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 3, 7 \\ DEN > 0 \text{ en } R - \{5\} \end{cases}$

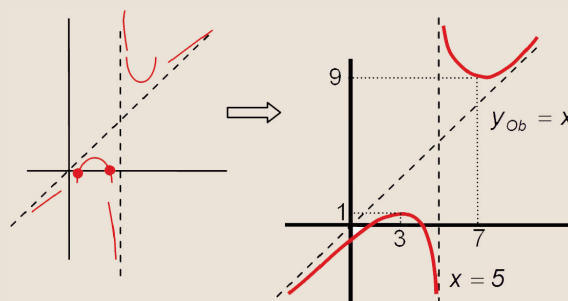
	$(-\infty, 3)$	$(3, 7) - \{5\}$	$(7, \infty)$
sgn y'	+	-	+
y	C↑	D↓	C↑

vii) Puntos singulares: máximo en (3,1) y mínimo en (7,9).

viii) Curvatura: $y'' = \frac{8}{(x - 5)^3} \begin{cases} NUM > 0 \\ DEN = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (triple)} \end{cases}$

	$(-\infty, 5)$	$(5, \infty)$
sgn y''	-	+
y	∩	∪

No tiene puntos de inflexión.



UNIDAD 10

INICIACIÓN AL CÁLCULO DE DERIVADAS. APLICACIONES

55. Estudia y representa la función $y = \frac{x}{x^2 + 9}$.

Solución:

i) Dominio: $DEN > 0 \Rightarrow Dom y = R$;

ii) Simetría: $y(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 9} = -\frac{x}{x^2 + 9} = -y(x) \Rightarrow$ impar, simétrica respecto del origen de coordenadas.

iii) Punto de corte con los ejes: $f \cap OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0, 0)$. Corta a ambos ejes en el origen de coordenadas.

iv) Signo: $\begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = 0 \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
sgn y	-	+

v) Asíntotas: No tiene AV; $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 + 9} \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y_H = 0$;

$y - y_H = \frac{x}{x^2 + 9} \begin{cases} < 0, \text{ cuando } x \rightarrow -\infty \Rightarrow y < y_H \\ > 0, \text{ cuando } x \rightarrow \infty \Rightarrow y > y_H \end{cases}$; no tiene A Ob por tener AH.

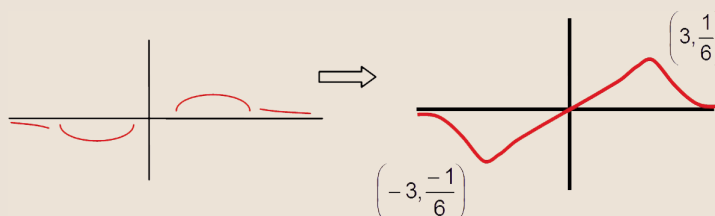
vi) Monotonía: $y' = \frac{9 - x^2}{(x^2 + 9)^2} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 3)$	$(3, \infty)$
sgn y'	-	+	-
y	D↓	C↑	D↓

vii) Puntos singulares: mínimo en $\left(-3, -\frac{1}{6}\right)$ y máximo en $\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

viii) Curvatura: $y'' = \frac{2x(x^2 - 27)}{(x^2 + 9)^3} \begin{cases} NUM = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{27}, 0, \sqrt{27} \\ DEN > 0 \end{cases}$

	$(-\infty, -\sqrt{27})$	$(-\sqrt{27}, 0)$	$(0, \sqrt{27})$	$(\sqrt{27}, \infty)$
sgn y''	-	+	-	+
y	∩	∪	∩	∪



Actividades

45. Estudia y representa las funciones: **a)** $y = x^3 - 3x$; **b)** $y = x^4 - x^2$.

46. Construye las curvas: **a)** $y = 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$; **b)** $f(x) = x^4 + x^3$.

47. Estudia y representa las funciones: **a)** $y = \frac{x}{x^2 - 9}$; **b)** $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$.

48. Construye las curvas: **a)** $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2$; **b)** $y = (2x - 1)^3$.

49. Representa las funciones: **a)** $f(x) = (x - 1)^4$; **b)** $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$.



Recuerda

- ✓ La **Tasa de Variación Media (TVM)** de la función f en el intervalo $[a, b]$ o $[x_1, x_2]$ nos proporciona una variación relativa y se define como: $TVM(f, [a, b]) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ó $TVM(f, [x_1, x_2]) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ó $TVM(f, [a, b]) = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
- ✓ La **derivada** de una función en un punto es: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.
- ✓ La **recta tangente** a una función f en un punto (x_0, y_0) tiene por ecuación $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
- ✓ La **función derivada** se define como $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
- ✓ Tablas de derivadas

Función	Derivada
k (constante)	0
$x^n, n \in \mathbb{R}$	$n \cdot x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Función	Derivada
$(f(x))^n$	$n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x), n \in \mathbb{R}$
$e^{f(x)}$	$f'(x) \cdot e^{f(x)}$
$\ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$

- ✓ Álgebra de Derivadas
 - $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.
 - $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
 - $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, g(x) \neq 0$.
 - $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
- ✓ Derivada segunda: $f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$.
- ✓ f es **creciente** en $x = a$ si y sólo si $f'(a) > 0$ y **decreciente** en $x = a$ si y sólo si $f'(a) < 0$.
- ✓ f tiene un **extremo relativo** en x_0 cuando $f'(a) = 0$. Es un **máximo relativo** cuando $f''(a) < 0$ y un **mínimo relativo** cuando $f''(a) > 0$.
- ✓ Optimizar una función consiste en buscar sus extremos relativos.
- ✓ Una función presenta dos **curvaturas** diferentes
 - f es $\cap$ en aquellos intervalos en los que $f''(x) < 0$.
 - f es $\cup$ en aquellos intervalos en los que $f''(x) > 0$.
 - f tiene un **punto de inflexión** en aquellos puntos en los que $f''(x) = 0$.
- ✓ Los pasos para efectuar el estudio de una función son los siguientes:
 1. Cálculo del dominio de la función.
 2. Estudio de la simetría y de la periodicidad.
 3. Cálculo de los puntos de corte de la función con los ejes de coordenadas.
 4. Estudio del signo de la función.
 5. Cálculo de las asíntotas y de la forma en la que la función se acerca a ella.
 6. Estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento).
 7. Cálculo de los puntos singulares (máximos y mínimos relativos).
 8. Estudio de la curvatura (concavidad y convexidad) y cálculo de los puntos de inflexión.