05039

EXAMEN DE FUNCIONES 1º BACHILLERATO DE CIENCIAS

1. Halla, justificando las respuestas, el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x-12}$ (0,5 puntos) b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{3x-6}}{4-x}$ (0,5 puntos)

c) Halla el valor de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(4)$, $g(-1)$ y $g(5)$. (0,5 puntos)

d) ¿En qué puntos corta la gráfica de $f(x)$ a los ejes de coordenadas? (0,3 puntos)

e) ¿En qué puntos corta la gráfica de $g(x)$ a los ejes de coordenadas? (0,2 puntos)

2. Representa la función $f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } x<0\\ 2^x-1, & \text{si } 0\le x\le 2\\ 3, & \text{si } x>2\end{cases}$. (1 punto)

A partir de su gráfica indica:

a) ¿En qué puntos es discontinua? (0,2 puntos)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,3 puntos)

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3^x}{4}=9$ (0,5 puntos) b) $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$ (1 punto)

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log\left(x^2-3\right)=0$ (0,3 puntos) b) $2\log(x+1)-\log(2x-8)=1$ (0,7 puntos)

5. Supongamos que un automóvil deprecia su valor en un 15% anual.

a) Si nuevo costó 24000 €, ¿cuánto valdrá a los 5 años? (0,3 puntos)

b) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 6000 euros? (0,7 puntos)

6. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^3+2x^2-9x-18}$, calcula su límite en los siguientes puntos:

a) $x=-3$ (0,3 puntos) b) $x=-2$ (0,5 puntos) c) $x=0$ (0,2 puntos)

d) $x=2$ (0,2 puntos) e) $x=3$ (0,5 puntos)

7. Halla $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-3\sqrt{x-2}}{6-x}$. (0,8 puntos)

8. Halla las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$. En cada caso indica la posición de la curva respecto de las asíntotas. (1,5 puntos)

Soluciones:

1. Halla, justificando las respuestas, el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x^2-4x-12}$ (0,5 puntos) b) $g(x)=\dfrac{\sqrt{3x-6}}{4-x}$ (0,5 puntos)

c) Halla el valor de $f(-2)$, $f(-1)$, $f(4)$, $g(-1)$ y $g(5)$. (0,5 puntos)

d) ¿En qué puntos corta la gráfica de $f(x)$ a los ejes de coordenadas? (0,3 puntos)

e) ¿En qué puntos corta la gráfica de $g(x)$ a los ejes de coordenadas? (0,2 puntos)

Solución:

a) Dom(f) = **R** − {−2, 6} → −2 y 6 son las soluciones $x^2-4x-12=0$.

b) Dom(g) = [2, +∞) – {4} → debe cumplirse que $3x-6\geq 0$ y $4-x\neq 0$.

c) $f(-2)$ no está definido; $f(-1)=-5/7$; $f(4)=0$; $g(-1)$ no está definido; $g(5)=-3$.

d) $(0, f(0))$ → (0, 0); $f(x)=0 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow x=0$; $x=4$. Puntos (0, 0) y (0, 4).

e) $(0, g(0))$: no está definida → No corta al eje OY.
$g(x)=0 \Rightarrow 3x-6=0 \Rightarrow x=2$. Punto (2, 0).

2. Representa la función $f(x)=\begin{cases}1-x, & \text{si } x<0\\ 2^x-1, & \text{si } 0\leq x\leq 2\\ 3, & \text{si } x>2\end{cases}$. (1 punto)

A partir de su gráfica indica:

a) ¿En qué puntos es discontinua? (0,2 puntos)

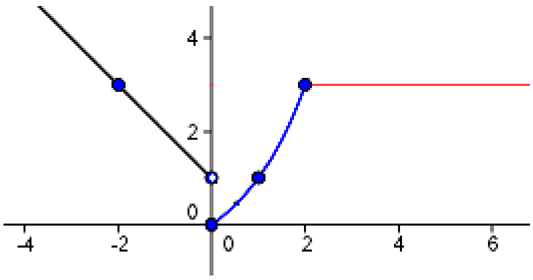
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (0,3 puntos)

Solución:

Su gráfica es la adjunta. Se obtiene dando algunos valores:

$f(-2)=1$; $f(-1)=2$;

$f(0)=2^0-1=0$; $f(1)=2-1=1$; $f(2)=3$



a) Es discontinua en $x=0$.

b) Decrece en el intervalo (–∞, 0); crece en el intervalo (0, 2). Para $x\geq 3$ es constante.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{3^x}{4}=9$ (0,5 puntos) b) $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0$ (1 punto)

Solución:

a) $\dfrac{3^x}{4}=9 \Rightarrow 3^x=36 \Rightarrow x\log 3=\log 36 \Rightarrow x=3{,}26\ldots$

b) $4^x-5\cdot 2^{x+1}+16=0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-10\cdot 2^x+16=0 \Rightarrow 2^x=\dfrac{10\pm\sqrt{100-64}}{2}=\begin{cases}8\\2\end{cases} \Rightarrow x=3$ ó 1.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:
a) $\log\left(x^2-3\right)=0$ (0,3 puntos) b) $2\log(x+1)-\log(2x-8)=1$ (0,7 puntos)
Solución:
a) $\log\left(x^2-3\right)=0 \Rightarrow x^2-3=1 \Rightarrow x=\pm 2$.

b) $2\log(x+1)-\log(2x-8)=1 \Rightarrow \log\dfrac{(x+1)^2}{2x-8}=1 \Rightarrow \dfrac{(x+1)^2}{2x-8}=10 \Rightarrow x^2-18x+81=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\dfrac{18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 81}}{2}=9$.

5. Supongamos que un automóvil deprecia su valor en un 15% anual.
a) Si nuevo costó 24000 €, ¿cuánto valdrá a los 5 años? (0,3 puntos)
b) ¿Cuántos años deben pasar para que su valor sea inferior a 6000 euros? (0,7 puntos)
Solución:
a) Su valor al cabo de un año será $P(1)=24000\cdot(1-0,15)=24000\cdot 0,85$:

Al cabo de dos años valdrá, $P(2)=(24000\cdot 0,85)\cdot 0,85=24000\cdot 0,85^2$.

Al cabo de 5 años: $P(5)=24000\cdot 0,85^5$ = 10648,93 euros.

b) En general, su valor al cabo de t años, viene dado por: $P(\mathrm{t})=24000\cdot(0,85)^t$

Si P = 6.000 euros $\Rightarrow 6000=24000\cdot(0,85)^t \Rightarrow 0,25=0,85^t \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(0,25)=\log(0,85^t)\Rightarrow t=\dfrac{\log 0,25}{\log 0,85}$ = 8,53 años

Deben pasar 8,53 años.

6. Dada la función $f(x)=\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^3+2x^2-9x-18}$, calcula su límite en los siguientes puntos:
a) $x=-3$ (0,3 puntos) b) $x=-2$ (0,5 puntos) c) $x=0$ (0,2 puntos)
d) $x=2$ (0,2 puntos) e) $x=3$ (0,5 puntos)
Solución:

a) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^3+2x^2-9x-18}=\dfrac{(9-4)\cdot(-3-3)}{-27+18+27-18}=\left[\dfrac{-30}{0}\right]=\infty$. No existe.

b) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^3+2x^2-9x-18}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (descomponiendo en factores) =

$=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)\cancel{(x+2)}(x-3)}{\cancel{(x+2)}(x^2-9)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x-3)}{x^2-9}=\dfrac{-4(-5)}{4-9}=-4$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^3+2x^2-9x-18}=\dfrac{-4(-3)}{-18}=-\dfrac{2}{3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^3+2x^2-9x-18}=\dfrac{0}{-20}=0$.

e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-4)(x-3)}{x^3+2x^2-9x-18}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=$ (descomponiendo en factores) =

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2-4)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x^2+5x+6)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4}{x^2+5x+6}=\dfrac{9-4}{9+15+6}=\dfrac{1}{6}$

7. Halla $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-3\sqrt{x-2}}{6-x}$. (0,8 puntos)

Solución:

Sustituyendo se tiene: $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-3\sqrt{x-2}}{6-x}=\dfrac{6-3\sqrt{4}}{6-6}=\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Resulta una forma indeterminada.

Para resolverla podemos multiplicar los términos del cociente de la función por la expresión conjugada del numerador. Se obtiene:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x-3\sqrt{x-2}}{6-x}=\lim_{x\to 6}\frac{(x-3\sqrt{x-2})(x+3\sqrt{x-2})}{(6-x)(x+3\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to 6}\frac{x^2-\left(3\sqrt{x-2}\right)^2}{(6-x)(x+3\sqrt{x-2})}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{x^2-9(x-2)}{(6-x)(x+3\sqrt{x-2})}=\left[\frac{0}{0}\right]=\text{(descomponemos el numerador en factores)}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x-3)}{(6-x)(x+3\sqrt{x-2})}=\lim_{x\to 6}\frac{-(x-3)}{(x+3\sqrt{x-2})}=\frac{-3}{6+3\sqrt{4}}=-\frac{1}{4}$$

8. Halla las asíntotas de la siguiente función: $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$. En cada caso indica la posición de la curva respecto de las asíntotas. (1,5 puntos)

Solución:

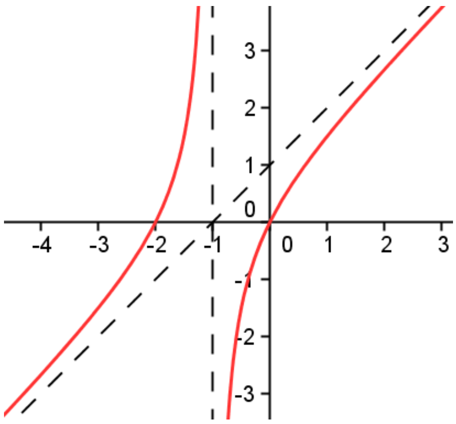
Como $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+2x}{x+1}=\left[\dfrac{-1}{0}\right]=\infty$, la recta $x=-1$ es asíntota vertical. → (0,25 puntos)

No tiene asíntota horizontal, pues el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. En cambio, tiene una asíntota oblicua (recta $y=mx+n$).

Se puede obtener dividiendo:

$$f(x)=\frac{x^2+2x}{x+1}=x+1-\frac{1}{x+1}$$

La asíntota oblicua es la recta $y=x+1$. → (0,75 p)



Posición de la curva respecto a las asíntotas:

Si $x\longrightarrow -1^-$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}=\left[\dfrac{-1}{0^-}\right]\to+\infty$ Si $x\longrightarrow -1^+$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}=\left[\dfrac{-1}{0^+}\right]\to-\infty$

Para la asíntota oblicua: $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x+1}=x+1-\dfrac{1}{x+1}$ ⇒ (el signo del término $\dfrac{1}{x+1}$ determina si la curva va por encima o por debajo de la asíntota).

Si $x\longrightarrow+\infty$, (el término anterior es positivo: resta) ⇒ la curva va por debajo de la recta.

Si $x\longrightarrow-\infty$, (el término anterior es negativo: suma) la curva va por encima de la recta.

→ (0,5 puntos) (La gráfica no es necesaria.)

La asíntota también puede calcularse como sigue:

$$m=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x^2+x}=1;$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)=1.$$

Se obtiene la recta $y=x+1$.