EXAMEN DE DERIVADAS.

(1º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS)

1. Definición de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. (1,5 puntos)

2. Halla el valor que debe tener *a* para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-a & x\geq 1 \end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de $f(x)$. (1,5 puntos)
¿La función obtenida será derivable en $x = 1$? Justifícalo. (0,5 puntos)

3. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=5x\left(4x^2-2\right)^3$ b) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-2x}$ c) $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}$

d) $y=\ln\left(x^2+5x\right)$ e) $y=\left(\operatorname{sen}(2-2x^3)\right)^2$ f) $y=e^{x^2+3}$

g) $f(x)=5x\cdot\ln(1+x)$ h) $f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (2,5 puntos)

¿Alguna de las funciones anteriores es derivable en $x = 0$? Indica por qué lo son o por qué no. (0,5 puntos)

4. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^2-3x+1$ en el punto $x = 2$. Representa gráficamente (dando valores) la curva y la tangente. (2 puntos)
(Para la parábola, determina mediante derivadas su vértice y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento).

5. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos de la función $f(x)=x^3-3x^2+1$. Esboza su gráfica. (1,5 puntos)

SOLUCIONES

1. Definición de derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica. (1,5 puntos)
$\rightarrow$ Ver libro de texto.

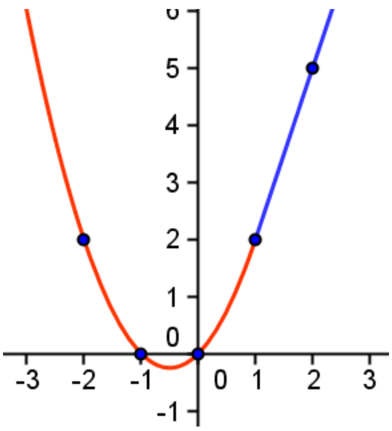
2. Halla el valor que debe tener *a* para que sea continua la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-a & x\geq 1\end{cases}$.

Justifica tu resultado haciendo una representación gráfica de *f*(*x*). (1,5 puntos)
¿La función obtenida será derivable en $x = 1$? (0,5 puntos)
Solución:

- El único punto dudoso es $x = 1$.

Por la izquierda:
Si $x \to 1^-$, $f(x)=x^2+x \to 2$
Por la derecha:
Si $x \to 1^+$, $f(x)=3x-a \to 3-a$.
Deben ser iguales: $2=3-a \Rightarrow a=1$.

La función continua será: $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x<1 \\ 3x-1 & x\geq 1\end{cases}$



Dando algunos valores se puede trazar su gráfica:
(–2, 2); (–1, 0); (0, 0); (1, 2); (2, 5)

Derivada. Salvo en $x = 1$:

$$f´(x)=\begin{cases} 2x+1 & x<1 \\ 3 & x>1\end{cases}$$

Como $f´(1^-)=3=f´(1^+)$, la función obtenida es derivable en $x = 1$.

3. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x)=5x\left(4x^2-2\right)^3$ b) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x^2-2x}$ c) $f(x)=\sqrt{x^4+2x^2}$

d) $y=\ln\left(x^2+5x\right)$ e) $y=\left(\text{sen}\,(2-2x^3)\right)^2$ f) $y=e^{x^2+3}$

g) $f(x)=5x\cdot\ln(1+x)$ h) $f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (2,5 puntos)

¿Alguna de las funciones anteriores es derivable en $x = 0$? Indica por qué lo son o por qué no. (0,5 puntos)
Solución:

a) $f´(x)=5\left(4x^2-2\right)^3+5x\cdot 3\left(4x^2-2\right)^2\cdot 8x = 5\left(4x^2-2\right)^3+120x^2\left(4x^2-2\right)^2$

b) $f´(x)=\dfrac{3\cdot\left(x^2-2x\right)-\left(3x-2\right)\cdot\left(2x-2\right)}{\left(x^2-2x\right)^2}=\dfrac{-3x^2+4x-4}{\left(x^2-2x\right)^2}$

c) $f´(x)=\dfrac{4x^3+4x}{2\sqrt{x^4+2x^2}}=\dfrac{2\left(x^3+x\right)}{\sqrt{x^4+2x^2}}$

d) $y´=\dfrac{2x+5}{x^2+5x}$

e) $y´=3\left(\text{sen}\,(2-2x^3)\right)\cdot\left(\cos(2-2x^3)\right)\cdot(-6x^2)=-12x^2\left(\text{sen}\,(2-2x^3)\right)\cdot\left(\cos(2-2x^3)\right)$

f) $y´=2xe^{x^2+3}$

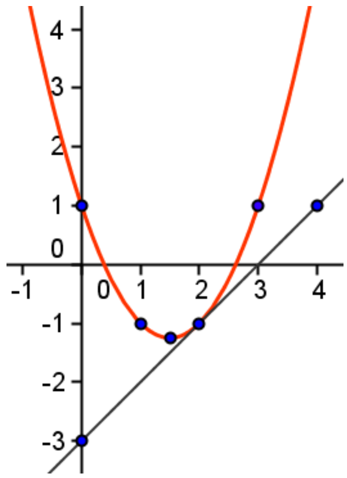
g) $f'(x) = 5\ln(1+x) + \dfrac{5x}{1+x}$

h) $f'(x) = -\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2}\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

→ Las funciones b), d) y h) no están definidas en $x = 0$; por tanto no pueden ser derivables.
La función definida en c) no es derivable en $x = 0$, pues $f'(0)$ no existe.
Las restante funciones sí son derivables en $x = 0$.

4. Halla la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x + 1$ en el punto $x = 2$. Representa gráficamente (dando valores) la curva y la tangente. (2 puntos)
(Para la parábola, determina mediante derivadas su vértice y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento).

Solución:



- $f(x) = x^2 - 3x + 1 \to f(2) = -1$; $f'(x) = 2x - 3 \to f'(2) = 1$

El punto de tangencia es (2, –1).

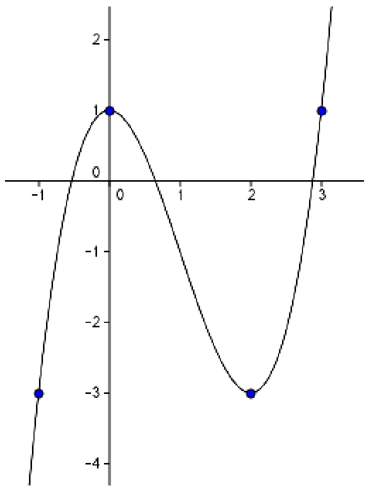
Tangente: $y - (-1) = 1\cdot(x - 2) \Rightarrow y = x - 3$

Algunos puntos de la parábola: (0, 1); (1, –1); (2, –1); (3, 1).

Vértice: $f'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = -\dfrac{5}{4} \to V = \left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$

5. Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los máximos y mínimos de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Esboza su gráfica. (1,5 puntos)

Solución:



- $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2) \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ si $x = 0$ o $x = 2$.

Si $x < 0$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creciente.
Si $0 < x < 2$, $f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ decreciente.
Si $x > 2$, $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ creciente.
En $x = 0$ se tiene un máximo: $f(0) = 1$.
En $x = 2$ se tiene un mínimo: $f(2) = -3$.
Otros valores: $(-1, -3)$; $(3, 1)$.