FUNCIONES. GEOMETRIA. COMPLEJOS.

1. Halla, razonadamente, el dominio de la función f_1 definida por $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x^3-1}}$. *(1'5 puntos)*.

2. Halla, razonadamente y con el mínimo número de cálculos posible, el recorrido de la función f_2 definida por $f_2(x)=-x^2-4x+96$. *(1'5 puntos)*.

3. Si g y h son funciones recíprocas entre sí (inversas respecto a la composición), ¿cuál es la función compuesta $g\circ h$? *(0'5 puntos)*. Si $h(x)=\dfrac{x+2}{2x-3}$ halla, razonadamente, la expresión de $g(x)$. *(1'5 puntos)*.

4. Sea f_3 la función definida por $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x^2-4}{x^2+x-2} & \text{si } x>0\end{cases}$ Halla los límites de $f_3(x)$ en los puntos en los que f_3 no está definida. *(3 puntos)*.

5. Halla, razonadamente el área del triángulo que tiene por vértices a los puntos $A(1,-2)$, $B(0,3)$ y $C(-3,2)$ estando sus coordenadas en centímetros. *(2 puntos)*.

VOLUNTARIO:

Una de las raíces cúbicas de Z es $z_1=-3+4i$; halla razonadamente el módulo y el argumento de las tres raíces cúbicas de Z. *(2 puntos)*.

1. $f_1(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-16}{x^3-1}}$ Dom (f_1) = $\{x\in\Re \mid f_1(x)\in\Re\}$ = $\{x\in\Re \mid \dfrac{x^2-16}{x^3-1}\geq 0\}$

Resolvemos la inecuación $\dfrac{x^2-16}{x^3-1}\geq 0$ hallando los valores que anulan al numerador y al denominador y analizando el signo que tendrá el valor numérico de la fracción en cada uno de los intervalos en que aquellos valores dividen al conjunto de los números reales:

Valores de x que anulan el numerador: $x^2-16=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 4$

Valores de x que anulan el denominador: $x^3-1=0 \quad\Rightarrow\quad (x-1)(x^2+x+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x=1$

Valor de x	$(-\infty\ ,-4)$	-4	$(-4\ ,\ 1)$	1	$(1\ ,\ 4)$	4	$(4\ ,+\infty)$
$\dfrac{x^2-16}{x^3-1}$	$\dfrac{+}{-}=-$ <0	$\dfrac{0}{-65}$ $=0$	$\dfrac{-}{-}$ >0	$\dfrac{-15}{0}$ No existe	$\dfrac{-}{+}$ <0	$\dfrac{0}{63}$ $=0$	$\dfrac{+}{+}$ >0

El dominio de f_1, es decir, el conjunto de valores de x para los que $f_1(x)\in\Re$ es:

$$\text{Dom}(f_1)=[-4\ ,\ 1)\cup[4\ ,+\infty)$$

2. El recorrido de una función es el conjunto de valores que toman las imágenes, en este caso, $f_2(x)$.

$f_2(x) = -x^2 - 4x + 96$ $\Rightarrow$ Se trata de una función cuadrática, cuyas características generales son conocidas. Su gráfica es una parábola y, al ser negativo (-1) el coeficiente de x^2, tiene las ramas hacia abajo, por lo que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f_2(x) = -\infty$ y, su vértice es el punto más alto (máximo).

El vértice corresponde al punto en que $x = \dfrac{-B}{2A} \xrightarrow{A=-1 \text{ y } B=-4} x = -2$ y su imagen, es decir, el valor mayor del recorrido es: $f_2(-2) = -(-2)^2 - 4(-2) + 96 = 100$

El recorrido de f_2, es decir, el conjunto de valores $f_2(x) \in \Re$ que tienen antiimagen es:
Rec (f_2) = $(-\infty\ ,\ 100]$

3. Si g y h son funciones recíprocas entre sí $\Rightarrow$ la compuesta $g \circ h$ de ambas es, por definición, la función identidad, es decir: $\boxed{(g \circ h)(x) = x}$.

$$h(x) = \frac{x+2}{2x-3} \iff y = \frac{x+2}{2x-3}$$

las funciones recíprocas tienen intercambiadas las variables (por eso al hacer la composición de ambas el resultado es la función identidad)

$y = \dfrac{x+2}{2x-3} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} x = \dfrac{y+2}{2y-3}$ Despejando y tendremos el valor de $h^{-1}(x)$, es decir, de $g(x)$

$$x = \frac{y+2}{2y-3} \Rightarrow 2xy - 3x = y + 2 \Rightarrow 2xy - y = 3x + 2 \Rightarrow y(2x-1) = 3x + 2 \Rightarrow y = \frac{3x+2}{2x-1}$$

$$\boxed{g(x) = \frac{3x+2}{2x-1}}$$

Comprobación de que $(g \circ h)(x) = x$:

$$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g\left(\frac{x+2}{2x-3}\right) = \frac{3\dfrac{x+2}{2x-3} + 2}{2\dfrac{x+2}{2x-3} - 1} = \frac{\dfrac{3x+6}{2x-3} + \dfrac{4x-6}{2x-3}}{\dfrac{2x+4}{2x-3} - \dfrac{2x-3}{2x-3}} = \frac{\dfrac{7x}{2x-3}}{\dfrac{7}{2x-3}} = \frac{7x}{7} = x$$

De igual manera, podemos comprobar que $(h \circ g)(x) = x$:

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right) = \frac{\dfrac{3x+2}{2x-1} + 2}{2\dfrac{3x+2}{2x-1} - 3} = \frac{\dfrac{3x+2}{2x-1} + \dfrac{4x-2}{2x-1}}{\dfrac{6x+4}{2x-1} - \dfrac{6x-3}{2x-1}} = \frac{\dfrac{7x}{2x-1}}{\dfrac{7}{2x-1}} = \frac{7x}{7} = x$$

4. $f_3(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4} & \text{si } x<0\\[2ex] \dfrac{x^2-4}{x^2+x-2} & \text{si } x>0\end{cases}$ Se trata de una función definida a trozos

En el primer intervalo, $x<0$ es decir, $\forall x\in(-\infty,0)$ está definida por $f_3(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$ que, únicamente, no existe en los valores negativos que anulan al denominador:
$x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x=\pm 2$ pero al intervalo en que se define por esta expresión sólo pertenece $x=-2$

$$\lim_{x\to -2} f_3(x)=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x-2}\overset{\frac{-3}{-4}}{=}\frac{3}{4}$$

En el segundo intervalo, $x>0$ es decir, $\forall x\in(0,+\infty)$ está definida por $f_3(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$ que, únicamente, no existe en los valores positivos que anulan al denominador:
$x^2+x-4=0 \quad\Rightarrow\quad (x+2)(x-1)=0 \quad\Rightarrow\quad x=-2 \quad y \quad x=1$ pero al intervalo en que se define por esta expresión sólo pertenece $x=1$

$$\lim_{x\to 1} f_3(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x-1}\overset{\frac{-1}{0}}{=}\begin{cases}+\infty\, cuando\, x\to 1^-\\ -\infty\, cuando\, x\to 1^+\end{cases}$$

Como no coinciden los límites laterales, en $x=1$ no tiene límite.

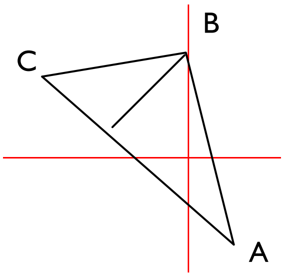
Por último, la función tampoco está definida en $x=0$, frontera de los dos intervalos

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f_3(x)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x-2}{x^2-4}\overset{\frac{-2}{-4}}{=}\frac{1}{2}\\ \lim_{x\to 0^+} f_3(x)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-4}{x^2+x-2}\overset{\frac{-4}{-2}}{=}2\end{aligned}\right\}$$

Al no coincidir los límites laterales, en $x=0$ tampoco tiene límite

Los valores de x para los que no está definida f_3 son: $x=-2$, $x=1$ y $x=0$ El límite en $x=-2$ es: $\lim_{x\to -2} f_3(x)=\frac{3}{4}$ y en los otros dos puntos no tiene límite por no coincidir los valores de límites laterales en ellos.

5. $A(1,-2)$, $B(0,3)$ y $C(-3,2)$



$$Área = \frac{Base \cdot Altura}{2}$$

Si tomamos como $Base$ = CA, entonces $Altura$ =distancia entre B y el lado CA.

$$\overrightarrow{CA} = \big(1-(-3),-2-2\big) = (4,-4) \Rightarrow Base = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{4^2+(-4)^2} = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

Para calcular la $Altura$ =distancia entre B y el lado CA. Hallaremos primero la ecuación de la recta, r, que contiene a la base:

Vector director de r es, por ejemplo: $\vec{v} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = (1,-1)$ y un punto de r es A$(1,-2)$ por lo que la ecuación de r es: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1}$ que en forma general queda $x+y+1=0$.

$$\left.\begin{matrix} r \equiv (x+y+1=0) \\ B(0,3) \end{matrix}\right\} \Rightarrow Altura = d(B,r) = \frac{|0+3+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$Área = \frac{Base \cdot Altura}{2} = \frac{4\sqrt{2}cm \cdot \frac{4}{\sqrt{2}}cm}{2} = \boxed{8\ cm^2}$$

VOLUNTARIO:

Sea $Z = R_\alpha \Rightarrow \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{R_\alpha} = \begin{cases} Módulo: & r = \sqrt[3]{R} \\ Argum.: & \beta = \frac{\alpha + 360^\circ k}{3} = \frac{\alpha}{3} + 120^\circ k \end{cases}$ Dando valores consecutivos a k obtenemos los argumentos de las tres raíces cúbicas que se diferencian entre sí en $120°$. Si tenemos una, podemos hallar las otras dos, sin más que sumar o restar $120°$ a su argumento. El módulo es el mismo para todas.

$z_1 = -3+4i$ el afijo de z_1 está en el segundo cuadrante por tener la componente real negativa (-3) y la imaginaria positiva (4):

$$z_1 = -3+4i = \begin{cases} Módulo: & r = \sqrt{3^2+4^2} = 5 \\ Argum.: & Arctg -\frac{4}{3} = -53'13^\circ + 180^\circ = 126'87^\circ \end{cases} \qquad 126'87^\circ \begin{cases} \xrightarrow{-120^\circ} 6'87^\circ \\ \xrightarrow{+120^\circ} 246'87^\circ \end{cases}$$

El módulo de las tres raíces cúbicas de Z es $r = 5$
y sus argumentos: $6'87^\circ$, $126'87^\circ$ y $246'87^\circ$, respectivamente.