PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD

CURSO 2017-2018

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

Instrucciones:	a) Duración: 1 hora y 30 minutos
	b) Elija una de las dos opciones propuestas y conteste los ejercicios de la opción elegida.
	c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima que le corresponde.
	d) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos.
	e) Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma. Justifique las respuestas.

OPCIÓN B

EJERCICIO 1

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) **(1 punto)** Calcule $A^{2018}+A^{2019}$

b) **(1.5 puntos)** Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+B\cdot B^t=2A$

EJERCICIO 2

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara a lo largo de 50 años viene dado por la expresión $B(t)=\begin{cases}-0.04t^2+2.4\text{t} & 0\le t<40\\ \dfrac{40t-320}{t} & 40\le t\le 50\end{cases}$

donde t es el tiempo transcurrido.

a) **(1 punto)** Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función $B(t)$ en el intervalo $[0,50]$.

b) **(1 punto)** Estudie la monotonía de la función $B(t)$ y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) **(0.5 puntos)** Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

EJERCICIO 3

Un hotel dispone de tres lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado del hotel.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

EJERCICIO 4

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa, obteniéndose las siguientes edades

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40

a) **(1.5 puntos)** Obtenga un intervalo de confianza para estimar la edad media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

b) **(1 punto)** Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y un nivel de confianza del 99%.

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$

a) Calcule $A^{2018}+A^{2019}$

b) Resuelva la ecuación matricial $X\cdot A+B\cdot B^{t}=2A$

SOCIALES II. 2018 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A^{2}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

$$A^{3}=A\cdot A^{2}=A\cdot I=A$$

$$A^{2018}=\left(A^{2}\right)^{1009}=\left(I\right)^{1009}=I$$

$$A^{2019}=A^{2018}\cdot A=I\cdot A=A$$

Calculamos: $A^{2018}+A^{2019}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

b) Calculamos la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^{d})^{t}}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}^{t}}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=A$$

En el apartado anterior ya habíamos visto que $A\cdot A=I\Rightarrow A=A^{-1}$

Resolvemos la ecuación matricial

$$X\cdot A+B\cdot B^{t}=2A\Rightarrow X\cdot A=2A-B\cdot B^{t}\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=(2A-B\cdot B^{t})\cdot A^{-1}\Rightarrow X=2I-B\cdot B^{t}\cdot A^{-1}$$

$$X=2I-B\cdot B^{t}\cdot A^{-1}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -2\\ 7 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -7 & 7\end{pmatrix}$$

El beneficio, en miles de euros, que ha obtenido una almazara a lo largo de 50 años viene dado por la expresión: $B(t)=\begin{cases} -0.04t^2+2.4t & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{40t-320}{t} & si \quad 40\le t\le 50\end{cases}$

Donde t es el tiempo transcurrido.

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función $B(t)$ en el intervalo $[0,50]$.

b) Estudie la monotonía de la función $B(t)$ y determine en qué momento fueron mayores los beneficios de la almazara, así como el beneficio máximo.

c) Represente la gráfica de la función y explique la evolución del beneficio.

SOCIALES II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) La función $-0'04t^2+2'4t$ por ser polinómica, es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función $\dfrac{40t-320}{t}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. Estudiamos la continuidad en $t=40$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 40^-}(-0'04t^2+2'4t)=32 \\ \lim\limits_{t\to 40^+}\left(\dfrac{40t-320}{t}\right)=32\end{array}\right\}\Rightarrow B(40)=\lim_{t\to 40}B(t)=32\Rightarrow \text{Es continua}$$

Estudiamos la derivabilidad en $t=40$

Calculamos la función derivada: $B'(t)=\begin{cases}-0'08t+2'4 & si \quad 0\le t<40 \\ \dfrac{320}{t^2} & si \quad 40<t\le 50\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l}B'(40^-)=-0'8 \\ B'(40^+)=0'2\end{array}\right\}\Rightarrow B'(40^-)\neq B'(40^+)\Rightarrow \text{No derivable en } t=40$$

Luego, la función es continua en $[0,50]$ y derivable en $[0,40)\cup(40,50]$

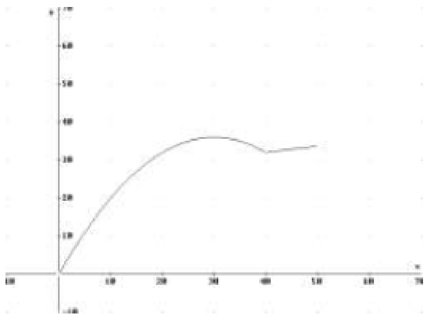
b) El máximo puede estar en los extremos del intervalo $t=0$ y $t=50$, y también en las soluciones de $B'(t)=0$ y donde no es derivable $t=40$.

$$B(0)=0 \;;\; B(50)=33'6 \;;\; B'(t)=-0'08t+2'4=0\Rightarrow t=30\Rightarrow B(30)=36 \;;\; B(40)=32$$

Luego, el máximo beneficio fue de 36.000 € y corresponde a $t=30$

La función es creciente en el intervalo $[0,30)\cup(40,50]$ y decreciente en el intervalo $(30,40)$

c)



Un hotel dispone de tras lavadoras industriales L_1, L_2 y L_3 para el servicio de lavandería. El 50% de los lavados los realiza L_1, el 30% los hace L_2 y el resto L_3. La lavadora L_1 produce un 5% de lavados defectuosos, L_2 produce un 15% y L_3 un 20%. Se elige al azar un lavado del hotel.

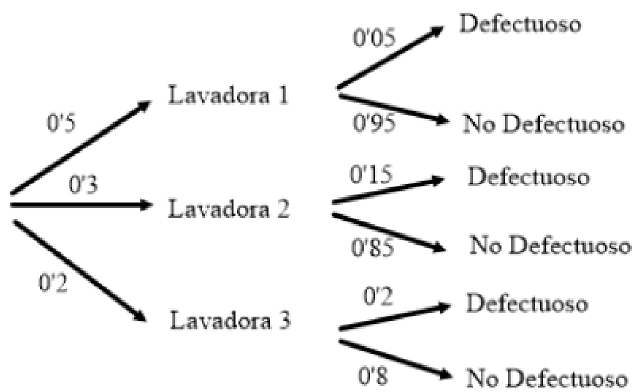
a) Calcule la probabilidad de que no sea defectuoso.

b) Calcule la probabilidad de que el lavado haya sido realizado por L_1, sabiendo que ha sido defectuoso.

SOCIALES II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un diagrama de árbol con los datos del problema



a) $p(No\ defectuoso) = 0'5 \cdot 0'95 + 0'3 \cdot 0'85 + 0'2 \cdot 0'8 = 0'89$

b) $p(L_1 / Defectuoso) = \dfrac{0'5 \cdot 0'05}{0'5 \cdot 0'05 + 0'3 \cdot 0'15 + 0'2 \cdot 0'2} = \dfrac{0'025}{0'11} = \dfrac{5}{22} = 0'2272$

La edad de los empleados de una empresa sigue una ley Normal de varianza 64 y media desconocida. Se toma una muestra aleatoria simple de 16 empleados de dicha empresa, obteniéndose las siguientes edades:

30 42 38 45 52 60 21 26 33 44 28 49 37 41 38 40

a) Obtenga un intervalo de confianza para estimar la edad media de los empleados, con un nivel de confianza del 97%.

b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la edad media de los empleados, con un error inferior a 2 años y con un nivel de confianza del 99%.

SOCIALES II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCION B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será:

$$\mu = \frac{30+42+38+45+52+60+21+26+33+44+28+49+37+41+38+40}{16} = 39$$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = \left(39 \pm 2'17 \frac{8}{\sqrt{16}}\right) = (39 \pm 4'34) = (34'66\ ;\ 43'34)$$

b)

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

$$E = 2 = 2'575 \cdot \frac{8}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 106'09 \simeq 107 \text{ empleados}$$