

**Ejercicio 1.** (Puntuación máxima: 2 puntos)

Encontrar la ecuación del plano que pasa por el punto  $P(1,0,-1)$ , es paralelo a la recta  $r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$  y es perpendicular al plano  $\pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0$ .

Solución:

El plano que nos piden,  $\pi'$ , al ser paralelo a la recta  $r$ , contiene al vector director de esta recta.  $r \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$

la dirección de la recta  $r$  viene determinada por el vector  $\vec{u} = (2,1,0)$ .

Como el plano  $\pi'$  debe ser perpendicular al plano  $\pi$ , el vector normal al plano  $\pi$  estará contenido en  $\pi' \Rightarrow \pi \equiv 2x - y + z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 1)$ ; y como el plano  $\pi'$  tiene que pasar por el punto  $P(1,0,-1)$  ya tenemos los elementos necesarios para calcular su ecuación:

$$\pi' \equiv \begin{cases} P(1,0,-1) \\ \vec{u} = (2,1,0) \\ \vec{n} = (2,-1,1) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x - 2y - 4z - 5 = 0$$

**Ejercicio 2.** (Puntuación máxima: 3 puntos)

Dadas las rectas  $r \equiv \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases}$  y  $s \equiv x+1 = \frac{y-3}{n} = \frac{z}{2}$

- Hallar  $n$  para que  $r$  y  $s$  sean paralelas.
- Para el valor de  $n$  obtenido en el apartado anterior, determinar la ecuación del plano que contiene ambas rectas.
- Para ese mismo valor de  $n$ , calcular la distancia entre las dos rectas.

Solución:

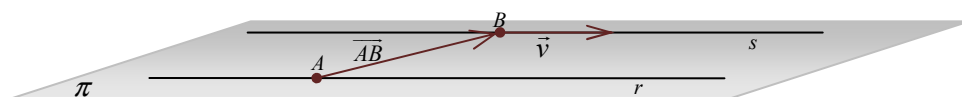
$$r \equiv \begin{cases} x+y-z+3=0 \\ -2x+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \text{pasando a las ecuaciones paramétricas} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(0,-2,1) \text{ punto de } r \\ \vec{u} = (1,1,2) \text{ vector de } r \end{cases}$$

$$s \equiv x+1 = \frac{y-3}{n} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} B(-1,3,0) \text{ punto de } s \\ \vec{v} = (1,n,2) \text{ vector de } s \end{cases}$$

$$\text{Para que } r \text{ y } s \text{ sean paralelas, } \vec{u} \text{ y } \vec{v} \text{ deben ser proporcionales} \Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{1}{n} = \frac{2}{2} \Rightarrow n=1$$

El plano  $\pi$  que contiene a  $r$  y a  $s$ , estará determinado por un punto,  $A \in r$  o  $B \in s$ , y dos vectores con direcciones diferentes, uno  $\vec{v}$  y el otro  $\vec{AB}$ .

$$\vec{AB} = (-1,5,-1); \pi \equiv \begin{cases} A(0,-2,1) \\ \vec{AB} = (-1,5,-1) \\ \vec{v} = (1,1,2) \end{cases} \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv 11x + y - 6z + 8 = 0$$



Para calcular la distancia entre  $r$  y  $s$ , hallamos la ecuación de un plano  $\pi'$  que contenga a una de las dos rectas (p. ej. a  $r$ ) y sea perpendicular al plano  $\pi$ , es decir, que contenga al vector  $\vec{n} = (11, 1, -6)$ , normal a  $\pi$ .

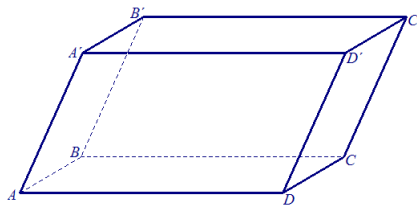
$$\pi' \equiv \begin{cases} A(0, -2, 1) \\ \vec{v} = (1, 1, 2) \\ \vec{n} = (11, 1, -6) \end{cases} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 11 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi' \equiv -4x + 14y - 5z + 33 = 0$$

$$\text{Ahora tenemos que } d(r, s) = d(B, \pi') = \frac{|(-4) \cdot (-1) + 14 \cdot 3 - 5 \cdot 0 + 33|}{\sqrt{(-4)^2 + 14^2 + (-5)^2}} = \frac{79}{\sqrt{237}} = \frac{\sqrt{237}}{3} u$$

### Ejercicio 3. (Puntuación máxima: 3 puntos)

Sea el paralelepípedo de vértices  $ABCD A' B' C' D'$  del que conocemos las coordenadas de los vértices  $A(0, -1, 1)$ ,  $B(1, 0, 2)$ ,  $D(-2, 1, 1)$ ,  $A'(1, 1, -1)$ . Se pide:

- Calcular el volumen de dicho paralelepípedo.
- Obtener la ecuación del plano que contiene a la cara  $CDD'C'$ .
- Determinar las coordenadas del punto medio de la arista  $B'C'$  expresadas en el sistema de referencia  $\mathfrak{R} = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\}$ .

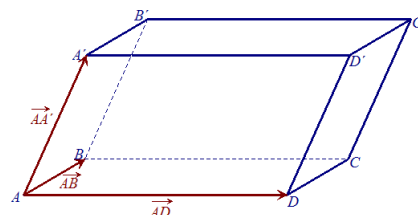


#### Solución:

$$A(0, -1, 1), B(1, 0, 2), D(-2, 1, 1), A'(1, 1, -1)$$

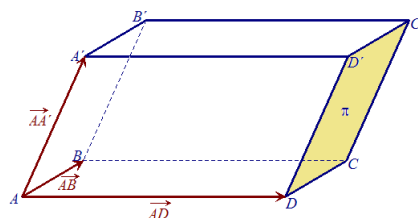
Calculamos los vectores  $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (-2, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{AA'} = (1, 2, -2)$ , y el volumen del paralelepípedo será:

$$V = \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}] \right| = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AA'}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = |-14| = 14 u^3$$

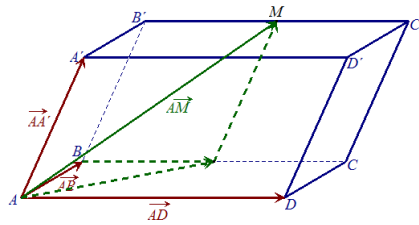


Llamamos  $\pi$  al plano que contiene a la cara  $CDD'C'$

$$\pi \equiv \begin{cases} \text{contiene al punto } D(-2, 1, 1) \\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \\ \text{contiene la dirección de } \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'} = (1, 2, -2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \pi \equiv -4x + 3y + z - 12 = 0$$



Para encontrar las coordenadas del punto medio del lado  $B'C'$ , que llamamos  $M$ , debemos conseguir las coordenadas del vector  $\overrightarrow{AM}$  en el sistema de referencia  $\mathfrak{R}$ , es decir, hay que poner el vector  $\overrightarrow{AM}$  como combinación lineal de los vectores  $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\}$  que forman la base del sistema de referencia con origen en el punto  $A$ .



Primero buscamos el vector que une el punto  $A$  con el punto medio del lado  $BC$ . Ese vector se obtiene como  $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Si a este vector le sumamos el vector  $\overrightarrow{AA'}$  conseguimos el vector  $\overrightarrow{AM}$ . Entonces  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ , por tanto:

$\overrightarrow{AM} = \left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$  en la base  $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}\} \Rightarrow M\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$  en el sistema de referencia  $\mathcal{R}$ .

#### Ejercicio 4. (Puntuación máxima: 2 puntos)

Dada la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{-4}$  y el plano  $\pi \equiv 2x + 3y + z = 0$ , hallar las ecuaciones de una recta  $s$  que se apoya en  $r$  perpendicularmente y está contenida en el plano  $\pi$ .

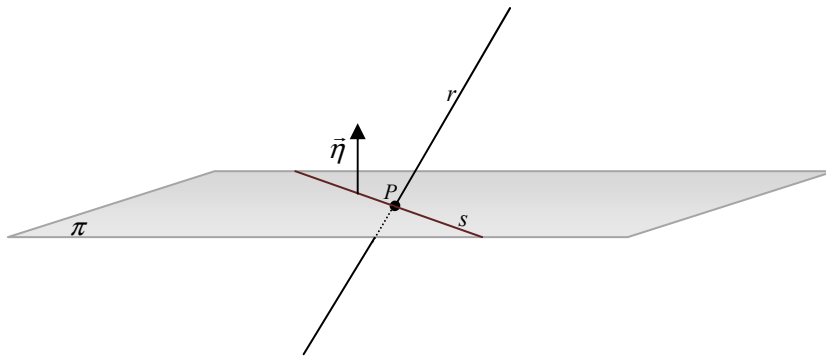
##### Solución:

Si la recta pedida tiene que estar contenida en el plano  $\pi$ , su vector director debe ser perpendicular al vector normal al plano. Como  $\pi \equiv 2x + 3y + z = 0 \Rightarrow \vec{n} = (2, 3, 1)$

Como la recta  $s$  tiene que cortar a  $r$  perpendicularmente, su vector director será perpendicular al vector de  $r$ .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{-4} \Rightarrow \vec{v} = (2, 3, -4)$$

$$\text{Entonces } \vec{u}' = \vec{v} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 15\vec{e}_1 - 10\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{u}' = (15, -10, 0); \vec{u} = (3, -2, 0) \text{ tiene la misma dirección que } \vec{u}'.$$



Si  $s$  está en el plano  $\pi$  y corta a la recta  $r$ , obligatoriamente tiene que pasar por el punto  $P$ , intersección entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z+2}{-4} \Rightarrow \text{expresada en paramétricas } r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = -2 - 4\lambda \end{cases}, P \in r \Rightarrow P(1 + 2\lambda, -3 + 3\lambda, -2 - 4\lambda)$$

$$\pi \equiv 2x + 3y + z = 0$$

$$P \in \pi \Rightarrow \text{verifica la ecuación del plano: } 2(1 + 2\lambda) + 3(-3 + 3\lambda) + (-2 - 4\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 1, \text{ entonces } P(3, 0, -6)$$

$$\text{Ahora la recta pedida } s \equiv \begin{cases} \text{pasa por el punto } P(3, 0, -6) \\ \text{tiene la dirección del vector } \vec{u} = (3, -2, 0) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = -6 \end{cases}$$

–  $s$  corta a  $r$  en el punto  $P$ .

–  $s$  está contenida en  $\pi$  porque pasa por  $P \in \pi$  y su dirección es perpendicular al vector  $\vec{n}$ , normal a  $\pi$ .

–  $s$  es perpendicular a  $r$  porque su vector director,  $\vec{u}$ , es perpendicular a  $\vec{v}$ , vector director de  $r$ .