Ejercicio 1 *Dados los números complejos* $z = 1 - 3i$, $w = -3 + 2i$, $t = -2i$ *calcula* $\dfrac{2z - 3t}{w}$

Solución:

$$\frac{2z-3t}{w} = \frac{2(1-3i)-3(-2i)}{-3+2i} = \frac{2-6i+6i}{-3+2i} = \frac{2}{-3+2i}$$

Multiplicando numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{2z-3t}{w} = \frac{2(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)} = \frac{-6-4i}{9+4} = \frac{-6}{13} - \frac{4}{13}i$$

Ejercicio 2 *Dados los complejos* $2 - ai$ *y* $3 - bi$*, halla* a *y* b *para que su producto sea igual a* $8 - 4i$.

Solución:

Multiplicamos los dos complejos:

$$(2-ai)(3-bi) = 6 - 2bi - 3ai + abi^2 = 6 - ab + (-3a - 2b)i$$

Como este complejo debe ser igual a 8-4i, igualando parte real e imaginaria resulta el sistema:

$$\begin{cases} 6 - ab = 8 \\ -3a - 2b = -4 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} ab = -2 \\ 3a + 2b = 4 \end{cases}$$

resolviendo este sistema se obtienen las dos soluciones:

$$a = 2, b = -1 \qquad y \qquad a = -\frac{2}{3}, b = 3$$

Ejercicio 3 *Escribe los siguientes números complejos en forma polar:*

1. -4
2. $2i$
3. $-\frac{3}{4}i$
4. $-2 + 2\sqrt{3}i$

Solución:

Los tres primeros son:

$$-4 = 4_{180^{\text{o}}}$$
$$2i = 2_{90^{\text{o}}}$$
$$-\frac{3}{4}i = \left(\frac{3}{4}\right)_{270^{\text{o}}}$$

Para el cuarto calculamos el módulo y el argumento:

$$r = \sqrt{4+12} = 4$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \varphi = 120^{\text{o}} \qquad (\varphi \text{ en el segundo cuadrante})$$

Por consiguiente:

$$-2 + 2\sqrt{3}i = 4_{120^{\text{o}}}$$

Ejercicio 4 *Escribe en la forma binómica los siguientes números complejos:*

1. $1_{\pi/2}$
2. 5_{270^o}
3. 1_{150^o}
4. 4_{100^o}

Solución:

$$\begin{aligned}
&1_{\pi/2} = i\\
&5_{270^o} = -5i\\
&1_{150^o} = 1\cdot(\cos 150^o + i \operatorname{sen} 150^o) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\\
&4_{100^o} = 4\cdot(\cos 100^o + i \operatorname{sen} 100^o) = 4\cos 100^o + 4\operatorname{sen} 100^o \cdot i
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 *Calcula*

$$(-1-i\sqrt{3})^6(\sqrt{3}-i)$$

Solución:

Pasamos a forma polar:

$$\begin{aligned}
-1-i\sqrt{3} &= 2_{240^o}\\
\sqrt{3}-i &= 2_{330^o}
\end{aligned}$$

De forma que:

$$\begin{aligned}
(-1-i\sqrt{3})^6(\sqrt{3}-i) &= (2^6)_{6\cdot 240^o}\cdot 2_{330^o}\\
&= (2^6\cdot 2)_{6/240^o+330^o}\\
&= 128_{1770^o} = 128_{330^o}
\end{aligned}$$

Ejercicio 6 *Calcula*

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{2-i}}$$

Solución:

Efectuamos el cociente y pasamos el resultado a forma polar:

$$\frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)_{71{,}57^o}$$

La primera raíz cúbica se obtiene haciendo la raíz del módulo y dividiendo por 3 el argumento:

$$z_1 = \left(\sqrt[3]{\frac{\sqrt{10}}{5}}\right)_{71{,}57^o/3} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23{,}86^o}$$

Como las otras raíces cúbics tienen el mismo módulo y difieren en el argumento en 120^o serán:

$$\begin{aligned}
z_2 &= \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23{,}86^o+120^o} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{143{,}86^o}\\
z_3 &= \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{23{,}86^o+240^o} = \left(\frac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[3]{5}}\right)_{263{,}86^o}
\end{aligned}$$

Ejercicio 7 *El producto de dos números complejos es -8 y el primero es el cuadrado del segundo. Calcúlalos.*

Solución:

Tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= -8 \\ z_1 &= z_2^2 \end{aligned}$$

Sustituyendo $z_1 = z_2^2$ en la primera ecuación resulta $z_2^3 = -8$. El complejo z_2 es, por consiguiente, cualquiera de las raíces cúbicas de -8. Conocemos una de ellas que es $-2 = 2_{0^o}$. Las otras dos tienen el mismo módulo y difieren en 120º en el argumento. Entonces:

$$\begin{aligned} z_2 = 2_{180^o} &\implies z_1 = z_2^2 = 4_{360^o} = 4_{0^o} \\ z_2 = 2_{300^o} &\implies z_1 = z_2^2 = 4_{600^o} = 4_{240^o} \\ z_2 = 2_{60^o} &\implies z_1 = z_2^2 = 4_{120^o} \end{aligned}$$

Ejercicio 8 *Si el producto de dos números complejos es -8 y dividiendo el cubo de uno de ellos entre el otro obtenemos de resultado 2, ¿cuánto valen el módulo y el argumento de cada uno?*

Solución:

Los dos complejos son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= -8 \\ \tfrac{z_1^3}{z_2} &= 2 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación resulta que $z_2 = \frac{z_1^3}{2}$: Sustituyendo en la primera:

$$z_1 \cdot \frac{z_1^3}{2} = -8 \implies z_1^4 = -16 = 16_{180^o}$$

Las soluciones las obtenemos haciendo las raíces cuartas de -16. Una de ellas es:

$$z_1 = \left(\sqrt[4]{16}\right)_{180^o/4} = 2_{45^o}$$

Sumando 90º obtenemos las demás. Así pues las soluciones son:

$$\begin{aligned} z_1 = 2_{45^o} &\implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{135^o}}{2} = 4_{135^o} \\ z_1 = 2_{135^o} &\implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{405^o}}{2} = 4_{45^o} \\ z_1 = 2_{225^o} &\implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{675^o}}{2} = 4_{315^o} \\ z_1 = 2_{315^o} &\implies z_2 = \frac{z_1^3}{2} = \frac{8_{945^o}}{2} = 4_{225^o} \end{aligned}$$