Ejercicio 1

1. *Halla el punto medio del segmento de extremos* $P(3,-2)$ *y* $Q(-1,5)$.
2. *Halla el simétrico del punto* $P(3,-2)$ *con respecto a* $Q(-1,5)$.

Solución:

El punto medio tiene de coordenadas:

$$x = \frac{3+(-1)}{2} = 1, \qquad y = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}$$

Si $P'(x',y')$ es el simétrico de P respecto de Q, éste último punto es el punto medio del segmento PP'. Entonces:

$$\begin{aligned} -1 &= \frac{3+x'}{2} \quad &\Longrightarrow \quad x' = -5 \\ 5 &= \frac{-2+y'}{2} \quad &\Longrightarrow \quad y' = 12 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *Halla la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos* $A(2,-3)$ *y* $B(-1,4)$.

Solución:

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{4-(-3)}{-1-2} = -\frac{7}{3}$$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y+3 = -\frac{7}{3}(x-2)$$

Para ponerla en forma explícita despejamos y:

$$y = -\frac{7}{3}x + \frac{14}{3} - 3 \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{7}{3}x + \frac{5}{3}$$

Ejercicio 3 *Halla el ángulo que forman las rectas:*

$$r: \ \frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{3}, \qquad s: \ \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-6}$$

Solución:

Calculando las pendientes de ambas rectas se obtiene que ambas son iguales a $-\frac{3}{2}$. Las dos rectas son paralelas y el ángulo que forman es de cero grados.

Ejercicio 4 *Halla la ecuación implícita de la recta que pasa por* $P(-2,5)$ *y tiene pendiente* $-\frac{2}{5}$.

Solución:

En forma punto-pendiente la ecuación de la recta es:

$$y-5 = -\frac{2}{5}(x+2)$$

Quitando denominadores y pasando todos los sumados al primer miembro se obtiene la ecuación implícita:

$$5y - 25 = -2x - 4 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 5y - 21 = 0$$

Ejercicio 5 *Halla el valor de k para que las rectas $2x - 3y + 4 = 0$ y $-3x + ky - 1 = 0$ sean* a) *paralelas,* b) *perpendiculares.*

Solución:

Para que sean paralelas debe cumplirse:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-3}{k} \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{9}{2}$$

y para que sean perpendiculares:

$$2 \cdot (-3) + (-3) \cdot k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -2$$

Ejercicio 6 *Los puntos $A(3, -5)$, $B(-6, 1)$ y $C(-1, k)$ están alineados. Obtener el valor de k.*

Solución:

Un modo de resolver este problema es aplicar que si los tres puntos están alineados la pendiente de la recta AB es igual que la pendiente de la recta AC:

$$m_{AB} = m_{AC} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1 - (-5)}{-6 - 3} = \frac{k - (-5)}{-1 - 3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{-9} = \frac{k + 5}{-4} \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{7}{3}$$

Otra forma sería calcular la ecuación de la recta AB:

$$y + 5 = -\frac{2}{3}(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad 2x + 3y + 9 = 0$$

Si el punto C está alineado con A y B está contenido en esta recta y, por consiguiente, sus coordenadas cumplen esta ecuación:

$$2 \cdot (-1) + 3k + 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -\frac{7}{3}$$

Ejercicio 7 *Encuentra el punto de la recta $r: \; 4x - 8y + 7 = 0$ equidistante de los puntos $A(2, 1)$ y $B(1, -3)$.*

Solución:

El punto que buscamos es equidistante de A y B y, por tanto, está en la mediatriz de AB que tiene por ecuación:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2 \qquad \text{simplificando}$$
$$2x + 8y + 5 = 0$$

Como el punto debe estar en la recta r y en la mediatriz que acabamos de calcular, debe ser la intersección de ambas rectas. Sus coordenadas serán la solución del sistema formado por sus ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 8y + 7 = 0 \\ 2x + 8y + 5 = 0 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -\frac{1}{8} \end{array} \right.$$

Ejercicio 8 *La recta $r: \; 2x + y - 4 = 0$ es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto $(0, 0)$. Halla las coordenadas del otro extremo.*

Solución:

- ⋄ Perpendicular por O(0,0) a la recta r. Puesto que r tiene pendiente -2 la perpendicular tendrá pendiente $\frac{1}{2}$:

$$y = \frac{1}{2}\,x$$

- ⋄ Intersección de la recta r y la perpendicular (pie de la perpendicular P):

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + y - 4 = 0 \\ y = \frac{1}{2}\,x \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad P\left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

- ⋄ Punto simétrico de O respecto de P:

$$\frac{8}{5} = \frac{0+x}{2}; \quad \frac{4}{5} = \frac{0+y}{2}$$

de forma que el punto buscado es $O'(\frac{16}{5}, \frac{8}{5})$.

Otro método (de Lupiani)

Sea $P(a,b)$ el punto buscado. La mediatriz de OP es:

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

Haciendo operaciones y simplificando resulta la siguiente ecuación para la mediatriz:

$$2ax + 2by + a^2 + b^2 = 0$$

Como esta mediatriz debe coincidir con la dada, los coeficientes de la ecuación deben ser proporcionales:

$$\frac{2a}{2} = \frac{2b}{1} = \frac{a^2+b^2}{4}$$

Resolviendo este sistema resulta

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2b \\ a^2 + b^2 = 8b \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad 4b^2 + b^2 = 8b \quad \Longrightarrow \quad 5b^2 - 8b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b(5b-8) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{8}{5}$$

La solución $b = 0$ no es válida pues nos da de nuevo el punto $O(0,0)$. Puesto que $a = 2b$ obtenemos de nuevo el resultado $\left(\frac{16}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Ejercicio 9 *Un punto P, que es equidistante de los puntos $A(3,4)$ y $B(-5,6)$ dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son las coordenadas de P?*

Solución:

Si el punto P es equidistante de A y B está en la mediatriz de AB que tiene por ecuación:

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (x+5)^2 + (y-6)^2 \qquad \text{simplificando:}$$
$$4x - y + 9 = 0$$

Si la distancia de $P(x,y)$ al eje de abscisas es el doble que al eje de ordenadas se verifica que, o bien $y = 2x$ o bien $y = -2x$. Las dos soluciones del problema son:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x - y + 9 = 0 \\ y = 2x \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad P\left(-\frac{9}{2}, 9\right); \qquad \left\{\begin{array}{l} 4x - y + 9 = 0 \\ y = -2x \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad P\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$$

Ejercicio 10 *Dada la recta $r: 2x - 3y + 5 = 0$, hallar la ecuación de la recta simétrica de r respecto al eje de abscisas.*

Solución:

La recta simétrica tiene el mismo punto de intersección con el eje de abscisas que la recta r y su pendiente es igual pero de signo contrario. La recta r tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y su intersección con el eje de abscisas A es:

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + 5 = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \quad A\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$$

La recta simétrica tiene entonces de ecuación:

$$y - 0 = -\frac{2}{3}\left(x + \frac{5}{2}\right)$$
