Ejercicio 1 *Calcular la derivada de la función* $y = \sqrt{x}$ *a partir de la definición. Calcular la ecuación de la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa 4.*

Solución:

$$\begin{aligned}
y' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

La ordenada en al punto de abscisa $x_0 = 4$ es $y_0 = \sqrt{4} = 2$.

La pendiente en ese punto es la derivada para $x = 4$:

$$m = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

De modo que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x-4)$$

Ejercicio 2 Derivar las siguientes funciones aplicando las reglas de derivación:

1. $y = \sqrt{3x^2 - 2x + 7}$
2. $y = \dfrac{3}{x^2}$
3. $y = \dfrac{4x-1}{(x-3)^2}$
4. $y = \dfrac{e^x}{x \operatorname{sen} x}$

Solución:

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{3x^2-2x+7} && \Longrightarrow && y' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2-2x+7}}\,(6x-2) \\
y &= \frac{3}{x^2} && \Longrightarrow && y' = \frac{0 - 2x\cdot 3}{x^4} \\
y &= \frac{4x-1}{(x-3)^2} && \Longrightarrow && y' = \frac{4\cdot(x-3)^2 - 2(x-3)(4x-1)}{(x-3)^4} \\
y &= \frac{e^x}{x \operatorname{sen} x} && \Longrightarrow && y' = \frac{e^x \cdot x \operatorname{sen} x - (1\cdot \operatorname{sen} x + x\cos x)e^x}{(x \operatorname{sen} x)^2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3 *Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 - 3x$ que sean paralelas a la recta $y = 6x + 10$.*

Solución:

Nos piden las ecuaciones de las tangentes a la curva que tienen pendiente igual a 6. Puesto que la pendiente de la tangente es la derivada, la derivada en los puntos de tangencia debe ser igual a 6:

$$y' = 3x^2 - 3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 = 9 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Las ordenadas de estos puntos se encuentran sustituyendo estos valores en la ecuación de la curva:

$$\begin{aligned} x_1 = \sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad y_1 = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\sqrt{3} = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \quad &\Longrightarrow \quad y_2 = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 3\,(-\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

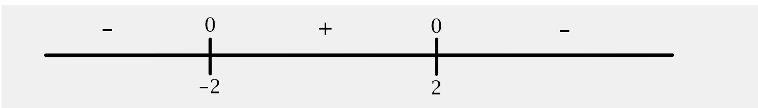
Ya tenemos los puntos de tangencia y la pendiente. Las ecuaciones de las tangentes son:

$$\begin{aligned} &y - 0 = 6\,(x - \sqrt{3}) \\ &y - 0 = 6\,(x + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Ejercicio 4 *En la función $y = 12x - x^3$ estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de tangente horizontal. A partir del dicho estudio decidir si se trata de máximos o mínimos y representar gráficamente la curva.*

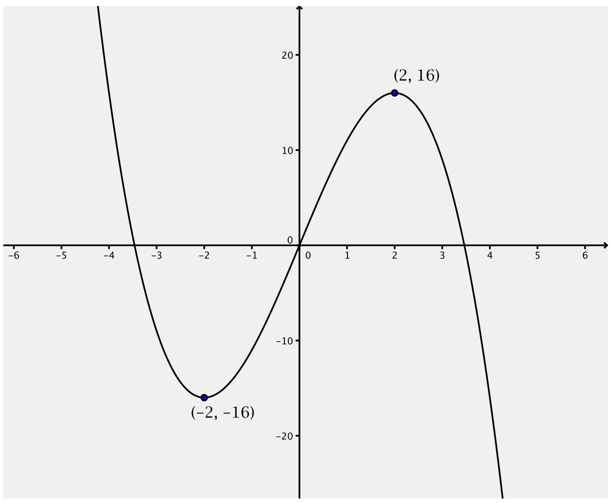
Solución:

Se trata de estudiar el signo de la derivada de la función $y' = 12 - 3x^2$. Los ceros de la derivada (puntos de tangente horizontal) so $x = -2$ y $x = 2$. El signo de la derivada se muestra en el esquema siguiente: Es decir:



$x \in (-\infty, -2)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -2$	$y' = 0$	mínimo en $m(-2, 16)$
$x \in (-2, +2)$	$y' > 0$	función creciente
$x = 2$	$y' = 0$	máximo en $M(2, 16)$
$x \in (2, \infty)$	$y' < 0$	función decreciente

La representación gráfica sería entonces:



Ejercicio 5 *Calcular las asíntotas de la curva*

$$y = \frac{x^2+1}{x}$$

Representar la curva a partir de sus asíntotas y simetría.

Solución:

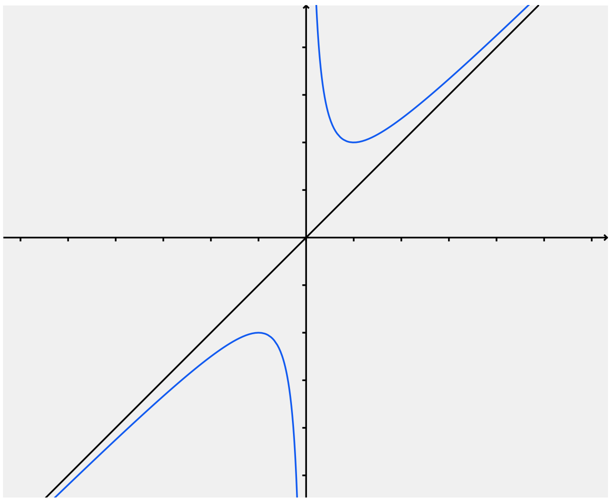
La curva tiene una asíntota vertical $x = 0$. No tiene asíntota horizontal porque el límite cuando x tiene a infinito es infinito. Calculamos la asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

La asíntota oblicua es $y = x$.

La función tiene simetría impar puesto que el numerador es par y el denominador impar. Teniendo todo esto en cuenta y que además la curva no corta a los ejes, su representación gráfica es:



Ejercicio 6 *Representa la función*

$$y = \frac{x}{x^2+5x+4}$$

estudiando el crecimiento y decrecimiento y sus asíntotas.

Solución:

Comenzamos calculando las asíntotas. Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador. Así se obtiene $x = -1$ y $x = -4$. Como para estos valores de x el numerador no se anula la función se hace infinita, de modo que $x = -1$ y $x = -4$ son las asíntotas verticales.

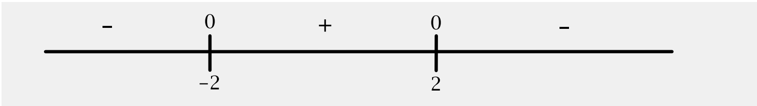
Por otra parte, $y = 0$ es la asíntota horizontal puesto que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+5x+4} = 0$$

Vamos a estudiar seguidamente el signo de la derivada:

$$y' = \frac{1\cdot(x^2+5x+4) - (2x+5)\cdot x}{(x^2+5x+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+5x+4)^2}$$

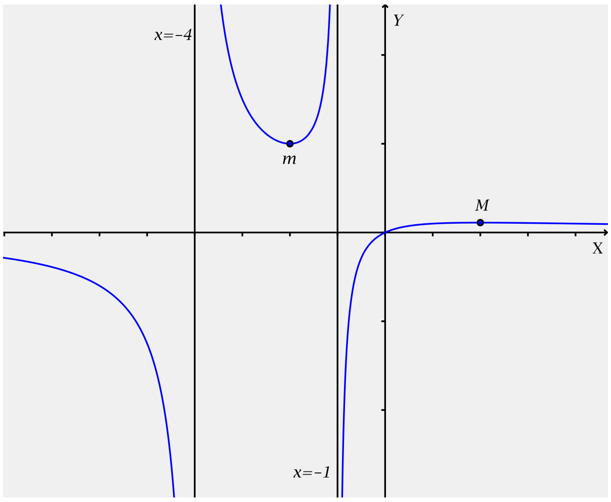
El esquema de signos es:



Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función son:

$x \in (-\infty, -4)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -4$	no existe la función	asíntota
$x \in (-4, -2)$	$y' < 0$	función decreciente
$x = -2$	$y' = 0$	mínimo en $m(-2, 1)$
$x \in (-2, -1)$	$y' > 0$	función creciente
$x = -1$	no existe la función	asíntota
$x \in (-1, +2)$	$y' > 0$	función creciente
$x = 2$	$y' = 0$	máximo en $M(2, \frac{1}{9})$
$x \in (2, \infty)$	$y' < 0$	función decreciente

Con estos datos la gráfica sería:



Ejercicio 7 *Se considera la función definida por:*

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2 - x + a}$$

Determinar las asíntotas de f, especificando los valores del parámetro real a para los cuales f tiene una asíntota vertical, dos asíntotas verticales, o bien no tiene asíntotas verticales.

Solución:

Sea cual sea el valor de a, la recta $y = 0$ es asíntota (horizontal) de la función.

Las asíntotas verticales se obtienen igualando a cero el denominador, es decir, las asíntotas serán

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$$

De acuerdo con el valor del discriminante $1 - 4a$ puede ocurrir:

$$\begin{array}{lcl} 1 - 4a < 0 & \Longrightarrow & \text{no hay asíntotas verticales} \\ 1 - 4a = 0 & \Longrightarrow & \text{una asíntota vertical} \\ 1 - 4a > 0 & \Longrightarrow & \text{dos asíntotas verticales} \end{array}$$

Las rectas así calculadas serán asíntotas si para los valores obtenidos de x se anula el denominador y no se anula el numerador. Un caso especial se presenta para el valor $x = 3$ que anula el numerador. Si además se anula el denominador, es decir, para

$$3^2 - 3 + a = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = -6$$

la función es

$$y = \frac{x-3}{x^2+x-6} = \frac{x-3}{(x-3)(x+2)}$$

Esta función no tiene una asíntota vertical en $x = 3$ puesto que el límite cuando x tiende a 3 no es infinito. En ese punto el límite es $1/5$ y la función presenta una discontinuidad evitable.

Resumiendo, para $1 - 4a > 0$ hay dos asíntotas verticales

$$x = \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, \qquad x = \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$$

salvo para $a = -6$ que solamente hay una ($x = -2$).