Logaritmos y radicales

Ejercicio 1. *Racionalizar los denominadores:*

- $\diamond \ \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$ $\qquad \diamond \ \dfrac{3}{4-\sqrt{7}}$ $\qquad \diamond \ \dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}}$ $\qquad \diamond \ \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Ejercicio 2. *Calcular los siguientes logaritmos:*

- $\diamond \ \log_{25} \dfrac{1}{125}$ $\qquad \diamond \ \log_3 \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\qquad \diamond \ \log_2 \left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right)$ $\qquad \diamond \ \log_8 \dfrac{4}{\sqrt[5]{16}}$

Ejercicio 3. *Simplificar expresando como un solo logaritmo:*

$\diamond \ 2\log_a 7 - 2\log_a a + 2\log_a 3$ $\qquad \diamond \ 5\log_a a + \frac{1}{3}\log_a 27 + \log_a 2$

$\diamond \ \log_a 5 + \frac{1}{2}\log_a 16 - \log_a 2$ $\qquad \diamond \ \frac{1}{4}\log_a 81 + 3\log_a \frac{1}{4} - 2\log_a \frac{3}{4}$

Ejercicio 4. *En las siguientes igualdades, despejar x y obtener un valor aproximado con tres cifras decimales:*

$\diamond \ 7^{-3x} = 15$ $\qquad \diamond \ 3^{-5x^2} = 1$

Ejercicio 5. *Resolver las ecuaciones:*

$\diamond \ \log(x+3) - \log(3x-2) = \log 7$ $\qquad \diamond \ \dfrac{35}{3^x} = 3^x - 2$

Soluciones

Ejercicio 1. *Solución:*

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9\cdot 5}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4-\sqrt{7}} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{(4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{16-7} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{16-7} = \frac{3\cdot(4+\sqrt{7})}{9} = \frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

$$\frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{2}(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{(\sqrt{8}-\sqrt{7})(\sqrt{8}+\sqrt{7})} = \frac{7\sqrt{2}(\sqrt{8}+\sqrt{7})}{8-7} = 7\sqrt{16}+7\sqrt{14} = 28+7\sqrt{14}$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} = \frac{5+3-2\sqrt{15}}{5-3} = \frac{8-2\sqrt{15}}{2} = 4-\sqrt{15}$$

Ejercicio 2. *Solución:*

$$\log_{25}\frac{1}{125} = \log_{25}1 - \log_{25}125 = 0 - \frac{\log_5 25}{\log_5 125} = -\frac{2}{3}$$

$$\log_3\frac{1}{\sqrt{3}} = \log_3 1 - \log_3\sqrt{3} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\log_2\left(\sqrt[3]{16}\,\sqrt[4]{8}\right) = \log_2\sqrt[3]{16} + \log_2\sqrt[4]{8} = \frac{1}{3}\log_2 16 + \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{4}{3}+\frac{3}{4} = \frac{25}{12}$$

$$\log_8\frac{4}{\sqrt[5]{16}} = \log_8 4 - \frac{1}{5}\cdot\log_8 16 = \frac{\log_2 4}{\log_2 8} - \frac{1}{5}\cdot\frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{2}{3}-\frac{4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Ejercicio 3. *Solución:*

$$2\log_a 7 - 2\log_a a + 2\log_a 3 = \log_a\frac{7^2\cdot 3^2}{a^2} = \log_a\frac{441}{a^2}$$

$$\log_a 5 + \frac{1}{2}\log_a 16 - \log_a 2 = \log_a\frac{5\sqrt{16}}{2} = \log_a 10$$

$$5\log_a a + \frac{1}{3}\log_a 27 + \log_a 2 = \log_a\left(a^5\sqrt[3]{27}\cdot 2\right) = \log_a(6a^5)$$

$$\frac{1}{4}\log_a 81 + 3\log_a\frac{1}{4} - 2\log_a\frac{3}{4} = \log_a\frac{\sqrt[4]{81}\left(\frac{1}{4}\right)^3}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \log_a\frac{3\cdot 4^2}{3^2\cdot 4^3} = \log_a\frac{1}{12}$$

Ejercicio 4. *Solución:*

- $7^{-3x} = 15 \quad\Longrightarrow\quad -3x = \log_7 15 \quad\Longrightarrow\quad x = -\frac{1}{3}\log_7 15 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\ln 15}{\ln 7} \simeq -0{,}464$
- $3^{-5x^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad -5x^2 = \log_3 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad x = 0$

Ejercicio 5. *Solución:*

- $\log(x+3) - \log(3x-2) = \log 7 \quad\Longrightarrow\quad \log\dfrac{x+3}{3x-2} = \log 7 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{x+3}{3x-2} = 7$

  Resolviendo esta ecuación:

  $x+3 = 7\cdot(3x-2) \quad\Longrightarrow\quad x+3 = 21x-14 \quad\Longrightarrow\quad x = \dfrac{17}{20}$

- $\dfrac{35}{3^x} = 3^x - 2 \quad\Longrightarrow\quad 35 = 3^{2x} - 2\cdot 3^x \quad\Longrightarrow\quad 3^{2x} - 2\cdot 3^x - 35 = 0$

  Ésta es una ecuación de segundo grado en 3^x. Despejando:

$$3^x = \frac{2\pm\sqrt{4+140}}{2} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 3^x = 7 & \Longrightarrow \quad x = \log_3 7 \\ 3^x = -5 & \quad \text{no tiene solución} \end{cases}$$