

**Ejercicio 1.**

- ◇ Calcular el punto medio del segmento de extremos  $A(5, -1)$  y  $B(-4, 3)$ .
- ◇ Calcular el punto simétrico de  $A(3, -1)$  respecto de  $P(6, -3)$ .

**Solución:**

- ◇ Sea  $M(x, y)$  el punto medio. Sus coordenadas son:

$$X = \frac{5 + (-4)}{2} = \frac{1}{2}; \quad y = \frac{-1 + 3}{2} = 1$$

El punto medio es  $M\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

- ◇ Sea  $A'(x', y')$  el simétrico de  $A$  respecto de  $P$ . Puesto que  $P$  es el punto medio de  $AA'$ :

$$\begin{aligned} \frac{3 + x'}{2} = 6 &\implies x' = 9 \\ \frac{-1 + y'}{2} = -3 &\implies y' = -5 \end{aligned}$$

El punto simétrico es  $A'(9, -5)$ .

**Ejercicio 2.** *Dados los puntos  $A(k, -1)$ ,  $B(1, 1)$  y  $C(3, 2)$ , calcular  $k$  de forma que los tres puntos estén alineados.*

**Solución:**

Si los tres puntos están alineados, la pendiente de  $AB$  debe ser igual a la pendiente de  $BC$ :

$$m_{AB} = m_{BC} \implies \frac{1 - (-1)}{1 - k} = \frac{2 - 1}{3 - 1} \implies \frac{2}{1 - k} = \frac{1}{2}$$

y resolviendo esta ecuación resulta  $k = -3$ .

**Ejercicio 3.** *Calcular las ecuaciones implícita y segmentaria de la recta que pasa por el punto  $P(2, -2)$  y cuya pendiente es  $-3$ .*

**Solución:**

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y + 2 = -3(x - 2)$$

La ecuación implícita se obtiene pasando todos los sumandos al primer miembro:

$$3x + y - 4 = 0$$

Las intersecciones de esta recta con los ejes de coordenadas son los puntos  $A\left(\frac{4}{3}, 0\right)$  y  $B(0, 4)$ . Por consiguiente, la ecuación segmentaria es:

$$\frac{x}{\frac{4}{3}} + \frac{y}{4} = 1$$

**Ejercicio 4.** Calcular las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasa por los puntos  $A(-1, -2)$  y  $B(0, 5)$ .

**Solución:**

La pendiente de la recta es:

$$m = \frac{5 - (-2)}{0 - (-1)} = 7$$

así que la ecuación punto -pendiente es:

$$y + 2 = 7(x + 1)$$

Despejando  $y$  se obtiene la ecuación explícita:

$$y = 7x + 5$$

---

**Ejercicio 5.** Dados los puntos  $P(3, 2)$  y  $Q(-2, 4)$ , y la recta  $r : y = 2x - 3$  calcula la distancia:

◇ Entre  $P$  y  $Q$ .

◇ De  $P$  a  $r$ .

**Solución:**

◇ La distancia entre los puntos  $P$  y  $Q$  es:

$$d(P, Q) = \sqrt{(-3 - 2)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$

◇ Para calcular la distancia de  $P$  a  $r$  escribimos en primer lugar, la ecuación de  $r$  en forma implícita:

$$r : 2x - y - 3 = 0$$

La distancia de  $P$  a  $r$  es:

$$d(P, r) = \frac{|2 \cdot 3 - 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

---

**Ejercicio 6.** Calcular la tangente del ángulo agudo que forman las rectas  $r : 3x - 5y + 6 = 0$  y  $s : y = -2x + 1$ .

**Solución:**

La primera recta tiene pendiente  $m_1 = \frac{3}{5}$  y la segunda  $m_2 = -2$ . La tangente del ángulo agudo que forman es:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{\frac{3}{5} - (-2)}{1 + \frac{3}{5}(-2)} \right| = \left| \frac{\frac{13}{5}}{-\frac{1}{5}} \right| = 13$$

---

**Ejercicio 7.** ¿Cuál ha de ser el valor de  $k$  para que las rectas  $x + 3y - 2 = 0$  y  $kx + 2y + 3 = 0$  sean paralelas? ¿Y para que sean perpendiculares?

**Solución:**

◇ Para que sean paralelas debe verificarse que:

$$\frac{1}{k} = \frac{3}{2} \implies k = \frac{2}{3}$$

◇ Para que sean perpendiculares:

$$1 \cdot k + 3 \cdot 2 = 0 \implies k = -6$$

---

**Ejercicio 8.** Calcular las ecuaciones de la paralela y la perpendicular a la recta  $2x + 5y - 6 = 0$  por el punto  $P(-1, 4)$ .

**Solución:**

La pendiente de la recta es  $m = -\frac{2}{5}$ .

◇ La ecuación de la paralela es:

$$y - 4 = -\frac{2}{5}(x + 1)$$

◇ Y la ecuación de la perpendicular:

$$y - 4 = \frac{5}{2}(x + 1)$$

---

**Ejercicio 9.** Calcular los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas:

$$r : x - y - 2 = 0, \quad s : 2x + 3y - 9 = 0, \quad t : x = 0$$

**Solución:**

Basta resolver los tres sistemas de dos ecuaciones y dos incógnitas formados con estas ecuaciones para obtener los tres vértices:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \implies A(3, 1)$$

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies B(0, -2)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \implies C(0, 3)$$

---

**Ejercicio 10.** Dados los puntos  $B(-1, 3)$  y  $C(2, -1)$  escribe la condición que deben cumplir las coordenadas del punto  $A(x, y)$  para que el triángulo  $ABC$  sea rectángulo en  $A$ .

**Solución:**

Resolveremos el problema por dos procedimientos:

◇ Si el triángulo es rectángulo en  $A$  los lados  $AB$  y  $AC$  son los catetos y el lado  $BC$  la hipotenusa. Si el punto  $A$  tiene de coordenadas  $x$  e  $y$ , por el teorema de Pitágoras:

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = (2 + 1)^2 + (-1 - 3)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 25$$

$$2x^2 + 2y^2 - 2x - 4y - 10 = 0$$

$$x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$$

- ◇ Si el triángulo es rectángulo en  $A$ , las rectas  $AB$  y  $AC$  son perpendiculares, sus pendientes deben cumplir la condición de perpendicularidad  $1 + m_1 m_2 = 0$ :

$$m_{AB} = \frac{y-3}{x+1}; \quad m_{AC} = \frac{y+1}{x-2}$$

$$1 + \frac{y-3}{x+1} \cdot \frac{y+1}{x-2} = 0$$

$$(x+1)(x-2) + (y-3)(y+1) = 0$$

$$x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$$

La condición que hemos obtenido es la ecuación de una circunferencia que tiene como diámetro el segmento  $BC$ .

